Leibniz Online, Nr. 40 (2020)
Zeitschrift der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin e. V.
ISSN 1863-3285

Ernst-Christoph Haß (MLS) und Peter Jörg Plath (MLS)

Leibniz, Ruch und Unvergleichbarkeit

Intelligenzquotient, Social Scores und Demokratie Index

Vorbereitet für Iwan Frolow conference on November 26th, 2019: „Der Mensch in einer globalisierten Welt: Risiken und Perspektiven“

Veröffentlicht: 4. Juni 2020

Einleitung

In unserem Artikel „Strukturbildung durch soziale Spiegelung – Mythen und Realität“[1] haben wir herausgearbeitet, dass Mythen Erzählungen sind, die Ereignisse in sozialen Systemen beschreiben, beruhend auf unseren Ideen, Vorstellungen und Begriffen dieser Ereignisse. Als Mythen der technischen Revolution haben wir drei mathematische Mythen („Alles ist messbar“, „Alles ist vergleichbar“, „Alles ist berechenbar“) und drei physikalische Mythen („Alles hat eine Ursache“, „Alles ist machbar“, „Unbeschränktes Wachstum“) näher erläutert. Beruhen diese auf der Verwendung des Allquantors, wie es im gesellschaftlichen Kontext üblich ist, so entstehen dabei unvermeidlich Paradoxien bzw. Nichteindeutigkeiten.

Eine besondere und wirkungsmächtige Rolle in sozialen Systemen spielt die Vorstellung der allseitigen Vergleichbarkeit. So beeinflusst der Intelligenzquotient IQ[2] die Bildungs- und Berufsperspektiven insbesondere von Kindern und Jugendlichen. Mit der internationalen PISA-Studie[3] werden Leistungen fünfzehnjähriger Schüler untersucht mit dem Ziel, deren alltags- und berufsrelevante Kenntnisse und Fähigkeiten zu messen und zu vergleichen. Auswahltests in Assessment-Centern tragen wesentlich zur Einstellung qualifizierter Bewerber in Unternehmen bei.

In China wird derzeit ein „Social Credit System“[4] eingeführt, das die Handlungsweise sämtlicher Chinesen erfasst und vergleicht. Mit diesem „Citizen Scoring“ wird über ein Punktesystem gutes Verhalten im Sinne der chinesischen Führung belohnt und schlechtes bestraft. Mit dem Demokratieindex[5] der britischen Analysefirma Economist Intelligence Unit (EIU) wird versucht, die „demokratischen Zustände“ in 167 Ländern zu bewerten und zu vergleichen. Dabei wird jedes Land nach einem aus fünf Kategorien bestehenden Punktesystem in einen von vier Regimetypen eingeordnet.

In der politischen Debatte besonders brisant ist die Frage nach Gerechtigkeit. Hier werden vor allem sechs Dimensionen von Gerechtigkeit diskutiert, die jeweils auf unterschiedlichen Wertvorstellungen basieren: Bedarfsgerechtigkeit, Leistungsgerechtigkeit, Chancengerechtigkeit, Einkommensgerechtigkeit, Regelgerechtigkeit und Generationengerechtigkeit[6]. Für jedes dieser Gerechtigkeitsprinzipien werden ein Index und ein Ranking aufgestellt sowie ein Gesamtindex ermittelt, mit dem die Gerechtigkeitslage in verschiedenen Ländern verglichen wird. Mit einem Gerechtigkeitsmonitor[7] wird sogar die *Entwicklung der Gerechtigkeitsverteilung* in 28 OECD Staaten verfolgt.

Es ließen sich viele weitere Beispiele für Vergleiche und daraus folgende Indizes im gesellschaftlichen Bereich (und auch in anderen Disziplinen) finden. Ergänzend soll hier nur noch der Glücksindex[8] genannt werden, mit dem in einer seit 2012 von den Vereinten Nationen jährlich veröffentlichten Rangliste (World Happiness Report[9]) persönliche Faktoren wie Lebenszufriedenheit, Wohlstand, Einbindung in das soziale Umfeld und (wirtschaftliche) Freiheit ermittelt und vergleichen werden; seit 2013 wird sogar auf Beschluss der UN jährlich am 20.März der Weltglückstag[10] begangen. Es sei noch erwähnt, dass im buddhistischen Bhutan bereits im 18. Jahrhundert das Glück der Bevölkerung als Ziel des politischen Handelns definiert wurde und dort das Bruttonationalglück[11] anstelle des Bruttosozialeinkommens als Maß für eine nachhaltige Entwicklung der Gesellschaft verwendet wird.

Aber ist es möglich, Eigenschaften wie Intelligenz, Leistungsvermögen, Handlungsweisen, Demokratie, Gerechtigkeit, Glück, Zufriedenheit usw. tatsächlich zu messen und zu vergleichen? Betrachten wir hierzu zunächst die grundlegenden Gedanken von E. Ruch zu Ordnungsstrukturen.

Diagramm- bzw. Partitionsverbände. Ernst Ruch – Halbordnung in Diagrammverbänden von Young Diagrammen

Vor ca. 50 Jahren trat Ernst Ruch mit seiner Behauptung hervor, nicht die *Totale Ordnung*, sondern die *Halbordnung* sei die natürliche Ordnung. Er arbeitete damals an dem Problem der Chiralität (Händigkeit) chemischer Verbindungen[12] und beschrieb die chirale Struktur der Moleküle mit Hilfe von Diagrammverbänden. Als Diagramme bzw. *Young Diagramme* bezeichnete er Anordnungen von Kästchen, die zu Zeilen und Spalten zusammengefügt werden können in Art der Abb. 1, ganz im Sinne von A. Young.[13]

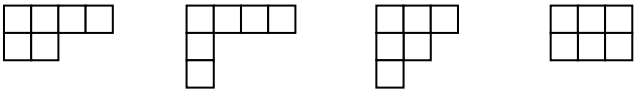


Abb. 1: Sechs Kästchen, die zu verschiedenen Young-Diagrammen zusammengefügt sind.

Mit dem Konzept des *Diagrammverbands als Strukturprinzip* verglich E. Ruch diese Diagrammstrukturen dadurch, dass er eine Ordnungsrelation in Form von „kleiner-gleich“ bzw. „größer-gleich“ auf ihnen erklärte, indem er fragte, welches Diagramm aus welchem anderen nach bestimmten Regeln erzeugt werden kann:[14]

1a: „A diagram γ is called greater than a diagram γ', denoted by $\gamma \supset \gamma'$, if γ can be constructed from γ' by moving boxes exclusively upwards, i.e. from shorter rows into longer or equal ones.”

1b: „A diagram γ is called greater than a diagram γ', denoted by $\gamma \supset \gamma'$, if γ' can be constructed from γ by moving boxes exclusively from right to left, i.e. from shorter columns into longer or equal ones.”

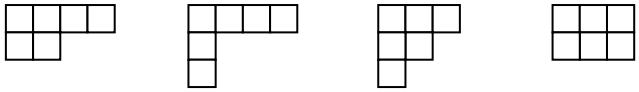
Definition 1a beschreibt die Konstruktion der Diagramme an Hand von Zeilen, während Definition 1b die Konstruktion der Diagramme an Hand von Spalten beschreibt.

Außerdem gilt: $\gamma \subset \gamma', \gamma \supset \gamma' \Rightarrow \gamma = \gamma'$.

Der Vorteil seiner Vorgehensweise bestand in der Anschaulichkeit dieser Diagramme. E. Ruch war sich aber darüber bewusst, dass diese Diagramme selbst nichts anderes waren als graphische Repräsentationen von Partitionen einer natürlichen Zahl *n*, d.h. der Zerlegungen von *n* in mögliche Summen natürlicher Zahlen wie sie in Abb. 2 dargestellt sind. Daraus folgt eine weitere Definition der Ordnungsrelation in Diagrammverbänden:

1c: “A diagram γ is greater than a diagram γ', if and only if the row partition of γ is greater than that of γ', or in other words if the column partition of γ is smaller than that of γ'.”

Die Diagrammverbände von E. Ruch sind also isomorph den entsprechenden Partitionsverbänden.



4+2	4+1+1	3+2+1	3+3

(4,2)	(4,1,1)	(3,2,1)	(3,3)

Abb. 2: Die Darstellung der natürlichen Zahl 6 durch Young-Diagramme, Summe natürlicher Zahlen bzw. Partitionen und als Vektoren bzw. Zahlentupel.

Gottfried Wilhelm Leibniz – Zerlegung natürlicher Zahlen

Bereits G. W. Leibniz befasste sich mit dem Problem der Zerlegung von natürlichen Zahlen in alle möglichen Summen aus ebenfalls natürlichen Zahlen. Er interessierte sich vor allem dafür, in wie viele mögliche Summen eine natürliche Zahl auf diese Weise zerlegt werden kann.

Schon in seiner *Dissertatio de Arte Combinatoria*[15], die Leibniz 1666 in jungen Jahren in Leipzig veröffentlichte, untersuchte er Zerlegungen (*discerpiones*) in 2 Summanden („*com2nationes partium* oder Zerfällungen in zwey Theyl“) und gab für die Zahl 6 die Partitionen 5, 1; 4, 2; und 3, 3 an. Es ist bemerkenswert, dass die Partitionen nach fallendem erstem Summanden angeordnet sind, wie es auch in den Ruch'schen Diagrammverbänden (s. u.) der Fall ist. Er stellte auch eine allgemeine Formel für die bipartiten Zerlegungen auf:[16, 17, 18]

„Wenn die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt, existieren für *n* gerade: $\frac{n}{2}$ und

für *n* ungerade: $\frac{n-1}{2}$ Zweierpartitionen; andernfalls gibt es *n* – 1 Bipartitionen.“

In späteren Jahren beschäftigte sich Leibniz auch mit Partitionen aus mehr als 2, insbesondere aus 3 Summanden und stellte dafür eine Reihe von Formeln auf. Abb. 3 zeigt schematisch anhand von *n* = 8, wie aus Bipartitionen durch Hinzufügen eines weiteren Summenden Tripartitionen abgeleitet werden können:[16]

7 + 1	6 + 2	5 + 3	4 +4	3 + 5	2 + 6	1 + 7
6.1.1	~~5.1.2~~	~~4.1.3~~	~~3.1.4~~	~~2.1.5~~	~~1,2,6~~	
5.2.1	4.2.2	~~3.2.3~~	~~2.2.4~~			
4.3.1	3.3.2					

Abb. 3: Erzeugung von Tripartitionen aus Bipartitionen durch Hinzufügen eines Summanden für n = 8.

Für jede der n – 1 = 7 Bipartitionen der Zahl 8 werden untereinander in einer Spalte durch Zerlegung des ersten Summanden in fallender Reihenfolge alle hierbei möglichen Zweierpartitionen erzeugt. (Der zweite Summand bleibt hierbei unverändert.) Dabei treten mit zunehmender Häufigkeit Wiederholungen von Dreierpartitionen auf, die durchgestrichen gekennzeichnet sind. Die nicht durchgestrichenen Tripartitionen sind dann alle möglichen Zerlegungen der Zahl 8 in drei Summanden, angeordnet nach fallendem erstem Summanden.

Es liegt eine ungeheure Faszination in diesem Spiel mit den Zahlen bzw. den Kästchen! Diese Betrachtungen ermöglichen nämlich einen Einblick in die Struktur des Systems unserer Zahlen, die uns doch „so natürlich“ vorkommen, kann doch jeder zählen: eins, zwei, drei, … und vergleichen: zwei ist größer als eins und drei ist gleich drei, … usw. Was kann dabei noch von Interesse sein?

Eigenschaften der Diagramm- bzw. Partitionsverbände

Das für E. Ruch Interessante war, dass sich zum Beispiel für die Zahlen *n* = 1, 2, 3, 4, 5 die Diagramme alle ganz einfach, eine totale Ordnung bildend, untereinander angeordnet werden können, wobei die jeweils größeren Diagramme oberhalb der kleineren Diagramme liegen[14] (s. Abb. 4).

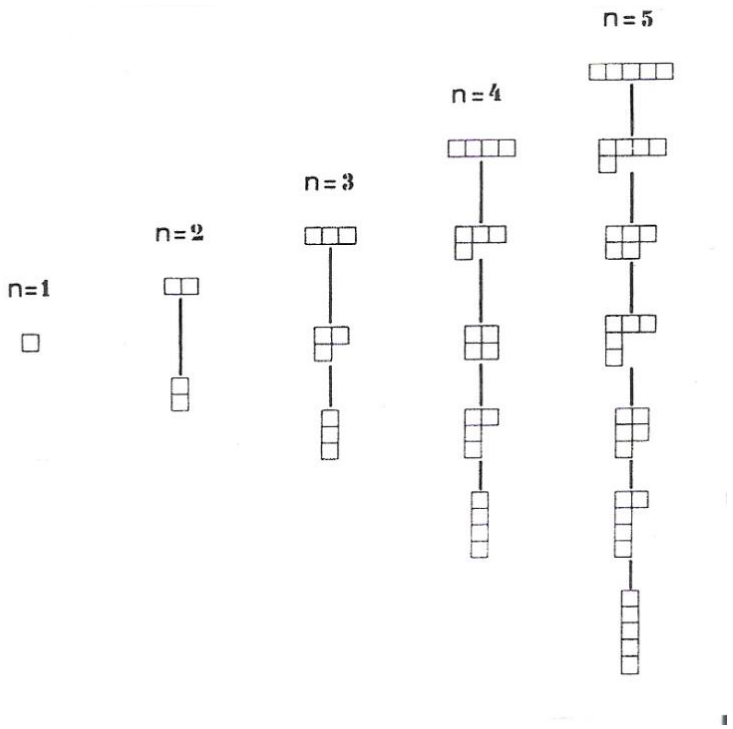


Abb. 4: Die Diagrammverbände der Zahlen eins bis fünf. Die Diagramme eines jeden dieser Verbände sind total geordnet, d.h. ein im Diagrammverband weiter oben stehendes Diagramm ist stets größer als ein darunter stehendes. (Die Abbildung entstammt der Arbeit von E. Ruch.[14])

Eine solche totale Ordnung der Diagramme lässt sich aber für alle natürlichen Zahlen $n \geq 6$ nicht mehr bilden! Bereits für $n = 6$ ist der entstehende Verband nicht mehr *total geordnet*, sondern eben „nur" *halbgeordnet*![14] (vgl. Abb. 5).

Das hat zur Konsequenz, dass es Paare von Diagrammen gibt, von denen man nicht mehr sagen kann, dass das eine Diagramm „größer" bzw. „kleiner" als das andere Diagramm ist. Das gilt für fast alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme der Zahlen von eins bis fünf, weshalb E. Ruch diese *Halbordnung* als natürliche Ordnung betrachtete. Solche Paare unvergleichbarer Diagramme entstehen dann, wenn im entsprechenden Verband zweiatomige Boole'sche Teilverbände auftreten. In dem Diagrammverband für *n* = 6 gibt es also zwei solcher unvergleichbarer Paare in den beiden zweiatomigen Boole'schen Teilverbänden (vgl. Abb. 5).

Die rasch anwachsende Anzahl zweiatomiger Boole'scher Verbände in den Ruch'schen Diagrammverbänden von *n* = 6 bis *n* = 25 (vgl. Tab 1) macht deutlich, wie groß die Zahl der unvergleichbaren Diagramme wird, wenn man zu etwas „größeren" Zahlen kommt. Die Zahl der unvergleichbaren Diagramme ist jedoch wesentlich größer als die Zahl der zweiatomigen Boole'schen Teilverbände, da unvergleichbare Diagramme auch in Teilverbänden auftreten, die homöomorph zu den Boole'schen Verbänden sind. Ab *n* = 7 sind die Diagrammverbände nicht mehr modular, d.h. sie enthalten mindestens einen 5-Ring als Teilverband. [14]

Nun lassen sich diese Ruch'schen Diagramme bzw. die Leibniz'schen Partitionen ganz allgemein als Verteilungen begreifen, so dass man diesen Gedankengang und seine Folgerungen auf beliebige diskrete und kontinuierliche Verteilungen anwenden kann. Darin liegt die große Bedeutung der Ruch'schen Entdeckung der Unvergleichbarkeit.

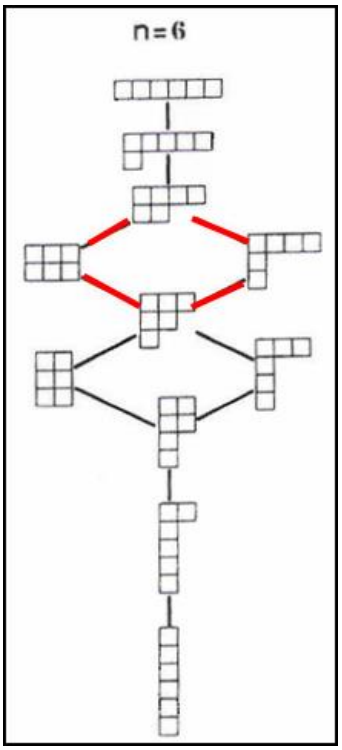


Abb. 5: Der Diagrammverband der natürlichen Zahl n = 6. Dabei sind die Diagramme, die den Partitionen (3, 3) und (4, 1, 1) entsprechen, unvergleichbar, aber auch das Paar (2, 2, 2) und (3, 1, 1, 1). In rot ist einer der beiden zweiatomigen Boole'schen Teilverbände besonders hervorgehoben.

n	N_{Bool2}
6	2
7	2
8	5
9	8
10	17
11	26
12	44
13	65
14	106
15	152

n	N_{Bool2}
16	229
17	323
18	471
19	650
20	915
21	1245
22	1712
23	2292
24	3093
25	4085

Tab. 1: Die Anzahl N_{Bool2} der zweiatomigen Boole'schen Verbände in den Ruch'schen Diagrammverbänden von n = 6 bis n = 25[19].

Diese unvergleichbaren Verteilungen lassen sich auch nicht – wie im Fall vergleichbarer Verteilungen allgemein üblich – durch bi-stochastische Matrizen ineinander überführen! Das ist, besonders wenn man soziale Verteilungen betrachtet, von großer gesellschaftlicher Relevanz!

Da diese Unvergleichbarkeit in fast allen Systemen mit einer genügend großen Anzahl von Eigenschaften auftreten kann, nimmt es schon Wunder, dass man heute alles miteinander zu vergleichen sucht, wie die Intelligenz von Menschen, die Demokratie von Staaten oder den sozialen Wert von Menschen.

Strikte Ordnungsmaße über Diagramm- bzw. Partitionsverbänden

Betrachtet man nun einen Weg, der direkt vom obersten Diagramm im Diagrammverband zum untersten Diagramm führt, d.h. bei dem jeder Vorgänger den benachbarten Nachfolger majorisiert, dann sind alle Diagramme/Partitionen auf diesem Weg miteinander vergleichbar bzw. durch bi-stochastische Matrizen ineinander überführbar. Jeder dieser Wege erzeugt also eine totale (strikte) Ordnung im Diagrammverband. Andererseits steigt die Anzahl dieser Wege mit zunehmenden *n* exponentiell an. (Für $n \leq 5$ gibt es genau einen solchen Weg, für $n = 6$ sind es 4 Wege, für $n = 7$, 8 Wege, für $n = 8$, 28 Wege usw.) Die Anzahl dieser Wege ist – ebenso wie die Anzahl der zweiatomigen Boole'schen Teilverbände – ein Maß für die Komplexität der Diagramm-/Partitionsverbände.[20]

Im Folgenden beschreiben wir Ansätze, Young-Diagramme bzw. Partitionen natürlicher Zahlen durch geeignete skalare Funktionen auf reelle Zahlen abzubilden. Diese Maßzahlen lassen sich dann im Gegensatz zu den Diagrammen (Partitionen) des halb-geordneten Diagramm-(Partitions-) Verbands bezüglich der „kleiner-gleich" bzw. „größer-gleich" Relation total (strikt) ordnen und damit auch vollständig vergleichen.

Entropie

Um die Bedeutung der Ruch'schen Unvergleichbarkeit von Diagrammen, Partitionen bzw. allgemeiner von Verteilungen zu verdeutlichen, wollen wir sie an dem zentralen Begriff der Thermodynamik, der Entropie, veranschaulichen. Jeder Verteilung lässt sich bekanntlich eine Entropie zuordnen. Für die Ruch'schen Diagramme bzw. Partitionen würde dies gewöhnlich durch die Shannon'sche Informationsentropie[21] geschehen.

Zu diesem Zweck wird zunächst die Anzahl der Kästchen $\nu_{\gamma,i}$ in der *i*-ten Zeile eines gegebenen *Young-Diagramms* $\gamma = \left(\nu_{\gamma,1}, \nu_{\gamma,2}, \cdots, \nu_{\gamma,i}, \cdots, \nu_{\gamma,n}\right)$ mit insgesamt *n* Kästchen (bzw. die Anzahl der *i*-ten Komponente des Partitionsvektors einer natürlichen Zahl *n*) im Hinblick auf die Gesamtzahl der Kästchen *n* des Diagramms normiert[22], wodurch $\nu_{\gamma,i}$ zur Wahrscheinlichkeit $p_{\gamma,i}$ wird:

$$p_{\gamma,i} = \frac{\nu_{\gamma,i}}{n} .$$

Dann kann man alle Diagramme (Partitionen der Zahl *n*) auf eine skalare Funktion wie zum Beispiel die *Shannon Entropie H*(*γ*) abbilden[22]:

$$I(\gamma) = F_1(\gamma) = -\sum_{i=1}^{n} p_{\gamma,i} \mathrm{ld}\left(p_{\gamma,i}\right) .$$

Auf diese Weise lässt sich eine totale Ordnung auf der Menge aller Young-Diagramme zu einer gegebenen Zahl *n* von Kästchen erklären. Für die weitere Diskussion sei erwähnt, dass die Summe s_n aller normierten Zeilenwerte $p_{\gamma,i}$ eines Diagramms (Komponenten eines Partitionsvektors) γ gleich eins ist (*Simplexbedingung*); d.h. die Spur dieses Vektors ist eins:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} p_{\gamma,i} = 1, \qquad 0 \le p_{\gamma,i} \le 1 .$$

Durch die Simplexbedingung erhält man einen normierten und beschränkten Bereich der Dimension *n* – den *Simplex* s_n, auf dem die *Shannon-Entropie* definiert ist.

Normierung der Entropiefunktion bezogen auf die Anzahl der Kästchen *n*

Aber auch die Funktion über diesem normierten Definitionsbereich selbst, d.h. die *Shannon Entropie* $I(\gamma)=F_1(\gamma)$ kann für jede Anzahl *n* von Kästchen normiert werden[22]:

$$F_2(\gamma) = \frac{1}{\mathrm{ld}(n)} F_1(\gamma) = -\frac{1}{\mathrm{ld}(n)} \sum_{i=1}^{n} p_{\gamma,i} \mathrm{ld}\left(p_{\gamma,i}\right) .$$

Diese normierte Shannon Entropie $F_2(\gamma)$ bildet die Young Diagramme auf die reellen Zahlen des abgeschlossenen Intervalls [0,1] ab:

$$\gamma \mapsto F_2(\gamma) \in [0,1].$$

In der klassischen Thermodynamik formuliert man bekanntermaßen für ein System von Mikrozuständen, die nicht alle gleichwahrscheinlich sind, die Gibbs'sche Entropie[23] (1875-1878).

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i .$$

Wobei k_B die Boltzmann Konstante ist und p_i die Wahrscheinlichkeit des *i*-ten Mikrozustands. Ob es sich nun um den dualen oder den natürlichen Logarithmus handelt, spielt für unsere weitere Argumentation keine Rolle.

Für ein Diagramm mit nur zwei Zeilen (eine Partition mit zwei Komponenten, wie sie auch Leibniz in seiner *Arte Combinatoria*[15] angegeben hat) bzw. ein System mit nur zwei möglichen Zuständen lautet die Gleichung für die Shannon'sche Informationsentropie *H*:

$$H = -\sum_{i=1}^{2} p_i \operatorname{ld} p_i \; ; \; p \in [0,1] \text{ und } p_1 + p_2 = 1,$$

Die Shannon Entropie ist hierbei eine zur *H*-Achse parallelen Geraden bei p_i = 0,5 symmetrische, konvexe Funktion[24] über dem Intervall [0,1] (s. Abb. 6).

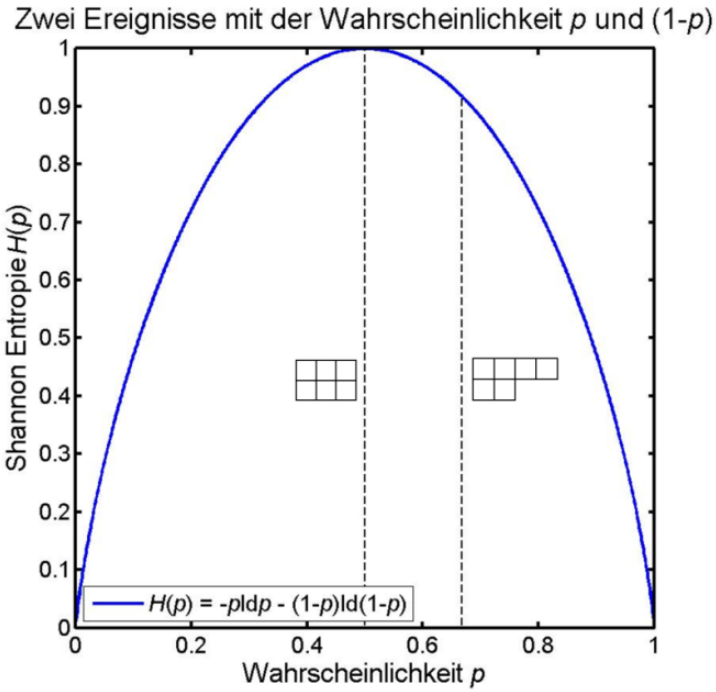


Abb. 6: Shannon Entropie über dem s_2 Simplex [0,1]. Für zwei Diagramme (Partitionen (4,2) und (3,3)) sind deren Entropiewerte durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.

Ist aber die Anzahl der Eigenschaften, bzw. der Zeilen des Diagramms $n \geq 3$, so ist der Simplex s_n, auf dem die Entropiefunktion erklärt ist, nicht mehr durch eine Linie wie in Abb. 6 zu beschreiben, sondern durch ein spezielles *n*-dimensionales konvexes Polytop[25], im 3-dimensionalen Fall ein gleichseitiges Dreieck, für $n = 4$ ein Tetraeder und für $n \geq 4$ ein Hypertetraeder; und die Entropiefunktion stellt bei einem 3-dimensionalen Simplex s_3 eine Fläche und in höherdimensionalen Simplices eine Hyperfläche dar[22] (vgl. Abb. 7).

Hierbei sei betont, dass die Funktion $F(\gamma)$ eine *konvexe* Funktion ist[26] (auch *konvex von oben genannt*[27, 28]) über dem Simplex s_n welcher zusätzlich die Bedingungen erfüllt:

$$F(s_n) = 0, \text{ für } v_i = 1, \; v_j \neq v_i$$

und

$$F(s_n) = 1, \text{ für } v_1 = v_2 = \ldots = v_n = \frac{1}{n}.$$

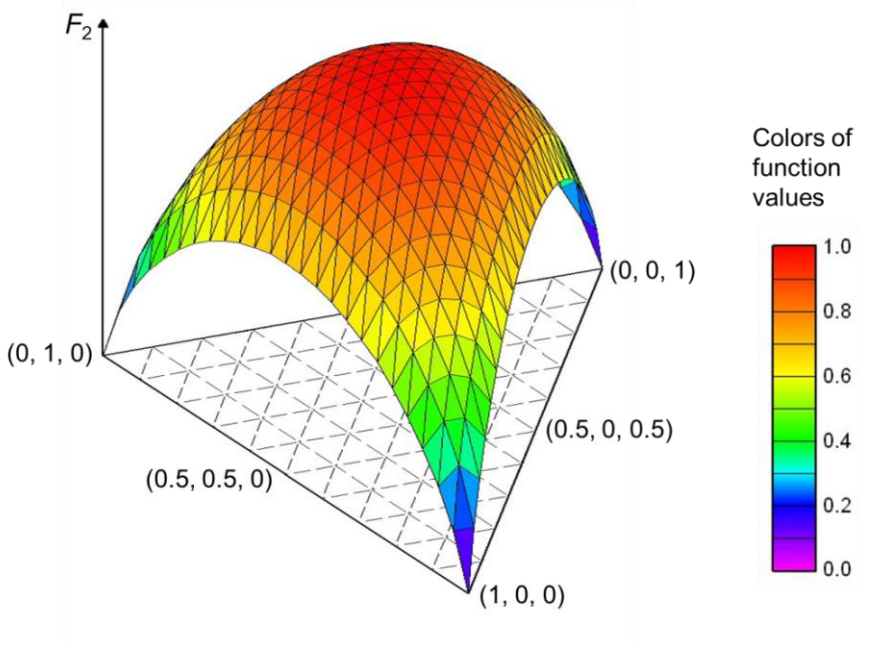


Abb. 7: Normierte Shannon Entropie $F_2(\gamma)$ für n = 3, definiert über dem Simplex s_3 mit drei Ecken unter Verwendung von Dreieckskoordinaten in der Ebene.

Die Funktionen der Shannon Informationsentropie F_1 (γ) bzw. F_2 (γ) können als ein Maß für den Informationsgewinn betrachtet werden, wenn man ein Experiment ausführt, für das die Wahrscheinlichkeiten seiner Ereignisse entsprechend der Beschränkungen der Simplexbedingung s_n verteilt sind.

Weitere Ordnungsmaße

Die Shannon-Entropie entspricht jedoch nur einer möglichen Wahl unter einer unendlichen Anzahl von Möglichkeiten, konvexe Skalarfunktionen über dem Simplex s_n zu finden[24]. Beispiele für andere konvexe Funktionen – vergleichbar mit der normierten Shannon Entropie F_2 –, die die Young-Diagramme auf das geschlossene Intervall [0,1] abbilden und die Bedingung über *n*-dimensionale Simplices s_n als Domänen erfüllen, sind z.B.[22]

- die normierte, verallgemeinerte *logistische Funktion* $F_4(\gamma)$,

$$F_4(\gamma) = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1-p_{\gamma,i}\right)p_{\gamma,i}\right],$$

- und die normierte, verallgemeinerte bi-quadratische Funktion $F_5(\gamma)$,

$$F_5(\gamma) = 1 - \frac{n^4}{(n-1)^4 + (n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(p_{\gamma,i} - \frac{1}{n}\right)^4 .$$

In Abb. 8 sind diese Funktionen (zusammen mit der Shannon Entropie) über dem s_2 Simplex und in Abb. 9 über dem s_3 Simplex dargestellt.

Alle diese Funktionen können als Maße verwendet werden, die die Unordnung oder Mischung des betrachteten Systems charakterisieren. Wir bezeichnen über dem Simplex s_n definierte konvexe Funktionen wie $F_2(\gamma)$, $F_4(\gamma)$ und $F_5(\gamma)$ als entropieartige Mischungsfunktionen, da sie eine Familie von Funktionen bilden, deren Maxima gleich 1 sind für den Fall, dass $p_i = \frac{1}{n}$ für alle Indizes ist.

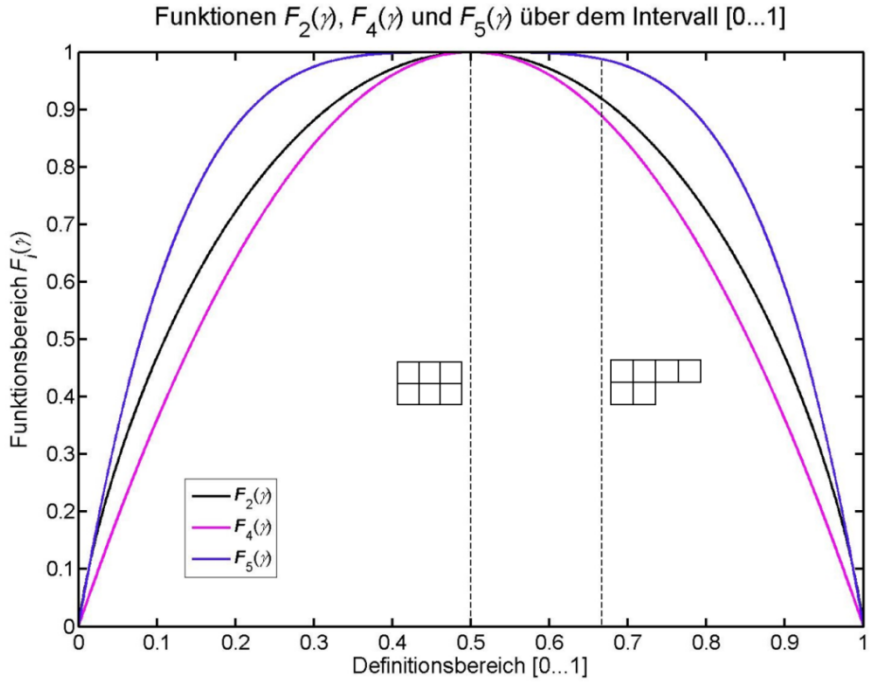
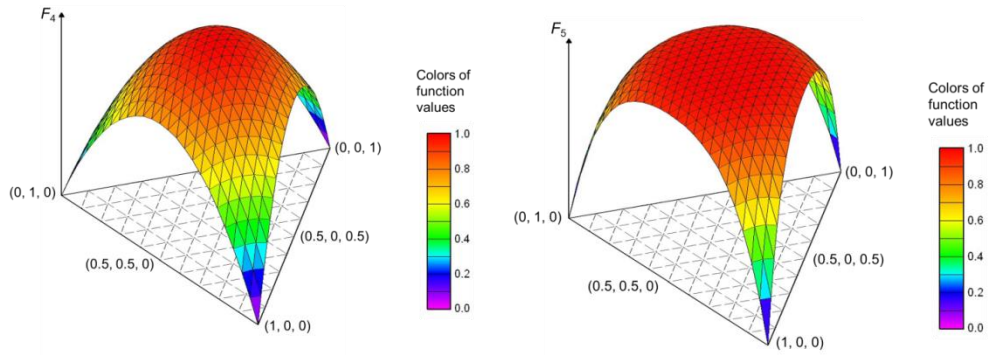


Abb. 8: Vergleich der normierten Funktionen $F_2(\gamma)$, $F_4(\gamma)$ und $F_5(\gamma)$ über dem Simplex s_2, .d.h. dem abgeschlossenen Intervall [0,1]. Ebenso wie in Abb. 6 sind die Entropiewerte für zwei Diagramme (Partitionen (4, 2) und (3, 3)) durch gestrichelte Linien gekennzeichnet.



a) *b)*

Abb. 9: a) Normierte, verallgemeinerte logistische Funktion $F_4(\gamma)$ und b) normierte, verallgemeinerte bi-quadratische Funktion $F_5(\gamma)$ für n = 3, definiert über dem Simplex s_3 mit drei Ecken unter Verwendung von Dreieckskoordinaten in der Ebene. Während die Fläche der Funktion $F_4(\gamma)$ weitgehend derjenigen der normierten Shannon Entropie $F_2(\gamma)$ ähnelt, weicht die Fläche von $F_5(\gamma)$ deutlich davon ab.

Es gibt also eine unendliche Menge von konvexen Funktionen, die über dem Simplex s_n normiert sind und als Maß für die Unordnung dienen können. Je nachdem, für welches Maß man sich entscheidet, kann sich sogar die Reihenfolge der betrachteten Diagramme/Partitionen bzw. Verteilungen ändern – insbesondere im Fall der unvergleichbaren Diagramme bzw. Partitionen (s. Abb. 10). Wie man aus der Abbildung ersehen kann, lautet die Reihenfolge der Partitionen im Falle der normierten Shannon-Entropie F_2 (schwarz): (4, 2), (3, 3), (4, 1, 1) und (3, 2, 1), und im Falle der verallgemeinerten bi-quadratischen Funktion F_5 (magenta): (4, 2), (4, 1, 1), (3, 3) und (3, 2, 1). Im Falle der verallgemeinerten logistischen Funktion F_4 (blau) haben die Partitionen (3, 3) und (4, 1, 1) die gleichen Funktionswerte.

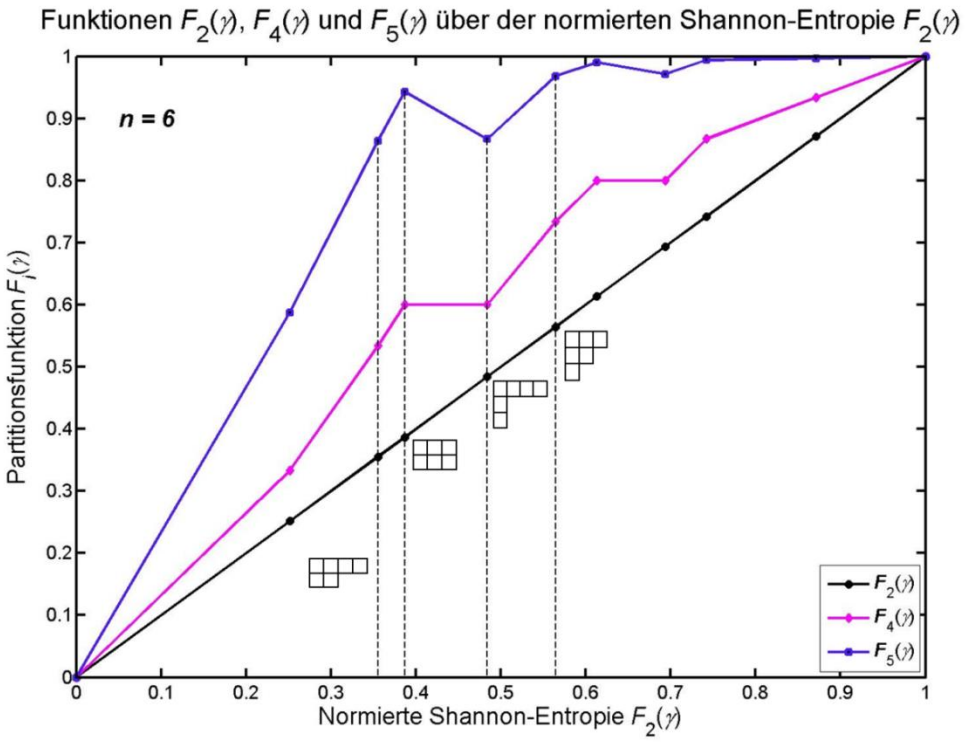


Abb. 10: Abhängigkeit konvexer Partitionsfunktionen $F_i(\gamma)$ von der normierten Shannon Entropie der Young Diagramme im Fall von n = 6. Die Winkelhalbierende resultiert aus der Auftragung der normierten Shannon Entropie als Funktion ihrer selbst. Die Wahl der Funktion $F_4(\gamma)$ ordnet den unvergleichbaren Diagrammen dieselben „Entropie"-Werte zu, während die Funktion $F_5(\gamma)$ die Reihenfolge der „Entropie"-Werte vertauscht (siehe Partitionen (3, 3) und (4, 1, 1)).

Jede Entscheidung für ein dem Vorurteil entsprechendes Maß erzeugt eine *totale Ordnung* durch Reduktion der natürlichen *Halbordnung*

Die Unordnung lässt sich also nicht durch nur ein Maß bzw. eine Funktion sondern nur durch die Menge aller über dem Simplex erklärbaren konvexen Funktionen beschreiben. Es ist die *Halbordnung* mit ihren unvergleichbaren Elementen (Diagrammen, Partitionen), die die Eindeutigkeit einer Zuordnung durch nur ein Maß, eine Funktion zerstört!

Dieser Gedanke entspricht völlig dem Vorgehen bei der Bestimmung der Länge eines räumlichen Fraktals, einer in den zweidimensionalen Raum hinein zerklüfteten Linie. Es ist die berühmte Frage „Was ist die Länge der Küste Englands?"[29] Die Länge einer solchen zerklüfteten Linie hängt von der Wahl der Längeneinheit bzw. dem gewählten Maßstab ab![30] Es gibt unendlich viele solcher Maße und dementsprechend auch unendlich viele angebbare Längen. Mehr noch, je kleiner die gewählte Maßeinheit, desto länger wird die Linie! Natürlich gilt dies auch für die Oberflächengröße zerklüfteter Flächen und dementsprechend auch für die Bestimmung der Oberfläche von Katalysatoren.

Selbstverständlich kann man sich auf ein Maß einigen, aber damit wird man der Komplexität des betrachteten Systems nicht gerecht, denn es negiert seine Unordnung, seine Eigenschaft ein Fraktal zu sein und reduziert es auf ein einfaches, total geordnetes bzw. ein nicht fraktales System.

Begrifflich ist die Unvergleichbarkeit nur Negation der Vergleichbarkeit und damit selbst an diese gebunden. Aber für die nicht miteinander vergleichbaren Verteilungsstrukturen gilt insbesondere die Nicht-Überführbarkeit bzw. die nicht direkte Umwandelbarkeit ineinander; d.h. es existiert keine bistochastische Matrix, die die Matrizen, die den Verteilungen (Diagrammen) zugeordnet sind, ineinander überführt. Das wäre die eigentliche, originäre Beschreibung der Unvergleichbarkeit der Verteilungen[14, 24].

Emergenz der Katalyse - mehr als Unvergleichbarkeit?!

Die Unvergleichbarkeit von Diagrammen bzw. Partitionen erwies sich als Konsequenz der Einführung einer Ordnungsrelation auf der Menge der Diagramme/Partitionen der natürlichen Zahlen, wenn $n \geq 6$ ist. Die Einführung der Ordnungsstruktur führte zu einer Verbandsstruktur. Wenn nur eindimensionale Boole'sche Teilverbände im Verband aller Partitionen auftreten, d.h. für $n \leq 5$, waren alle Diagramme/Partitionen miteinander vergleichbar. Diese Diagrammverbände entsprachen totalen Ordnungen. Für $n \geq 6$ gibt es im Verband aller Diagramme/Partitionen neben den eindimensionalen auch zweidimensionale Boole'sche Teilverbände, womit die Unvergleichbarkeit als neue Eigenschaft auftritt. Als Konsequenz der Unvergleichbarkeit ergibt sich, dass nicht nur ein willkürliches Maß – die Gibbs'sche oder Shannon'sche Entropie – die „Ordnung" bzw. „Unordnung" eines gemischten Systems beschreibt, sondern nur die Menge aller möglichen Entropiemaße. Das bedeutet, dass die „Unordnung" eine qualitative Eigenschaft ist, die E. Ruch als Mischungscharakter einer statistischen Verteilung interpretiert[14, 31]. Sie kann nicht vorurteilsfrei quantifiziert werden – schon gar nicht durch irgendein beliebig gewähltes Maßsystem.

Betrachtet man wie E. Ruch und A. Mead die Entwicklung eines geschlossenen Systems als Prozess mit zunehmendem Mischungscharakter[31], so hat das zur Folge, dass die Möglichkeit *aller* Wege in Betracht gezogen werden muss. Dabei stellt sich auch die Frage, ob möglicherweise noch weitere neue Eigenschaften auftreten, die mit höher atomigen Boole'schen Teilverbänden verbunden sein könnten.

Vektorkatalyse in Diagramm-/Partitionsverbänden und soziale Implikationen

Für $n \geq 11$ treten zum 3-atomigen Boole'schen Verband homöomorphe und für $n \geq 12$ isomorphe Teilverbände in den Diagramm- bzw. Partitionsverbänden auf; und mit ihnen verbunden ist die Emergenz einer ganz neuen Eigenschaft – der Katalyse. Wir haben dieses Phänomen in früheren Arbeiten[32, 33] ausführlich beschrieben, weshalb wir uns hier auf eine kurze Darstellung beschränken, um vielmehr die sozialen Implikationen und Analogien dieser Art der Katalyse diskutieren zu können.

Im Fall der Diagramme/Partitionen bedeutet Katalyse, dass unvergleichbare Diagramme der Dimension (natürlichen Zahl) n, die nicht mit einer bi-stochastischen Matrix ineinander überführt werden können, sich mit Hilfe eines anderen Diagrammes / einer anderen Partition der Dimension m, die als „Katalysator" wirkt, jeweils in einen neuen Zustand der Dimension $n \cdot m$ überführen lassen. Die hierbei resultierenden Diagramme/Partitionen im erweiterten Dimensionsraum können nun mittels einer bi-stochastischen Matrix ineinander überführt werden, d.h. sie sind vergleichbar bezüglich der Majorisierung. Selbstverständlich können die neuen Zustände auch wieder in die unvergleichbaren Diagramme/Partitionen und den Katalysator zerfallen. In Abb. 11 ist dies schematisch dargestellt[32]; Abb. 12 zeigt ein Beispiel für $n \geq 6$[33].

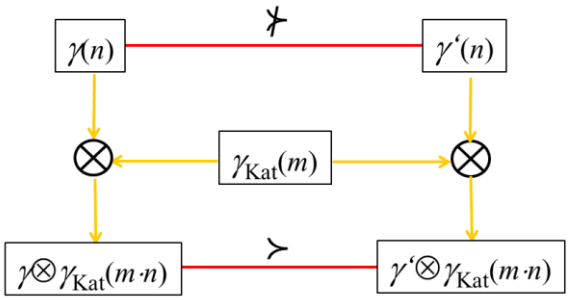


Abb. 11: Schematische Darstellung der Katalyse zweier Diagramme/Partitionen γ und γ' durch ein Diagramm / eine Partition γ_{Kat}[32].

$$(6,2,2,2,0)\otimes(2,1,1)=\begin{pmatrix}12 & 4 & 4 & 4 & 0\\ 6 & 2 & 2 & 2 & 0\\ 6 & 2 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow(12,6,6,4,4,4,2,2,2,2,2,2,0,0,0)$$

$$(5,4,1,1,1)\otimes(2,1,1)=\begin{pmatrix}10 & 8 & 2 & 2 & 2\\ 5 & 4 & 1 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow(10,8,5,5,4,4,2,2,2,1,1,1,1,1,1)$$

$$(12,6,6,4,4,4,2,2,2,2,2,2,0,0,0)\succ(10,8,5,5,4,4,2,2,2,1,1,1,1,1,1)$$

Abb. 12: Beispiel für Vektor-Katalyse der unvergleichbaren Partitionen (6,2,2,0) und (5,4,1,1,1) durch die „katalytische Partition“ (2,1,1)[33].

Dies ist in der Quantenmechanik unter dem Begriff des „entanglement catalysis“, der „Katalyse verschränkter Systeme“ bekannt[34]. Etwas anders formuliert heißt das, dass ganz spezielle, nicht vergleichbare Strukturen bzw. Verteilungen dadurch doch wieder ineinander überführt werden können, dass sie mit der Katalysatorstruktur ein verschränktes System bilden. Kann man diesen Sachverhalt auch auf soziale Systeme übertragen?

Nehmen wir zum Beispiel den Fall der Intelligenz von Menschen, von der wir ja (bereits) wissen, dass Schüler ganz unterschiedliche Begabungen aufweisen können und wenn sie für sich allein lernen oft nur sehr begrenzt lernfähig sind. Die Strukturen, die uns zuerst einfallen, mit der sie verschränkt werden können, sind unter anderem die Eltern, Lehrer oder auch in einigen Fällen Geschwister, Mitschüler und Freundeskreise.

In der Quantenmechanik wie auch bei der Vektorkatalyse der Partitionen wird die Verschränkung durch die Bildung eines Tensorproduktes (⊗) realisiert. Im Fall des Lernverhaltens könnte es eine besonders intensive Beziehung – eine Verschränkung – sein, zumindest des „Schülers“ und der Struktur des „Lehrers“, die beide miteinander eingehen, so dass der Schüler in dieser Beziehung Begabungen entwickelt, die ihm ansonsten verwehrt geblieben wären.

Natürlich gelingt dies nicht mit jedem „Schüler“ und jedem beliebigen „Lehrer“. Es gibt ja auch sehr viel mehr nicht katalysierbare Diagramme/Partitionen in den dreiatomigen Boole‘schen Teilverbänden als katalysierbare Strukturen und das sollte wohl auch für die Verteilungen von Begabungen der Fall sein.

Unvergleichbarkeit, Ähnlichkeit und Formen der Vektorkatalyse

E. Ruch betont den qualitativen Charakter des Begriffes des Mischens, indem er darauf verweist, dass ein abgeschlossenes thermodynamisches System über alle direkten Wege in einem Verband in den thermodynamisch stabilsten Zustand der Gleichverteilung übergeht. „Direkt“ bedeutet hier, dass nur Wege möglich sind, deren einzelne Schritte durch Operatoren vom Charakter bi-stochastischer Matrizen beschrieben werden. Der Übergang zwischen unvergleichbaren Strukturen bzw. Verteilungen ist damit ausgeschlossen. Dies ist völlig unabhängig von dem gewählten Maßsystem. Dass es hier kein bevorzugtes Maßsystem gibt, die Unordnung zu beschreiben, zeigt, dass auch der Begriff der Unordnung einen qualitativen Charakter besitzt.

Die Tatsache, dass es in der Menge der unvergleichbaren Strukturen auch solche gibt, die mit Hilfe eines Katalysators durch einen bi-stochastischen Prozess ineinander überführbar sind, schafft zwei neue Klassen von Strukturen: die nun katalysierbaren, unvergleichbaren Strukturen und die Strukturen der Katalysatoren. Darüber hinaus erweitern die Katalysatoren die Menge der möglichen Wege innerhalb des Verbandes der Strukturen.

Nun kann man die eingangs diskutierten Young-Diagramme auch als Vektoren im *n*-dimensionalen Raum betrachten. Im Fall kontinuierlicher Verteilungen handelt es sich um Funktionen bzw. um Vektoren im unendlich-dimensionalen Raum.

Dann ist die Überführung von Vektoren ineinander mit Hilfe bi-stochastischer Matrizen als eine Ähnlichkeitsoperation zu betrachten. E. Ruch fragt deshalb auch, welcher Vektor einer Menge von Vektoren einem anderen, vorgegebenen Vektor ähnlicher ist[31, 35, 36]. Unter diesem Aspekt erhält der Begriff der unvergleichbaren Strukturen den Aspekt der unähnlichen Strukturen und ermöglicht eine Klassifikation von Strukturen: die Menge der ähnlichen Strukturen und die Menge der ihnen unähnlichen Strukturen.

Ein zweidimensionales Bild lässt sich ja als Vektor im $n{\cdot}m$-dimensionalen Raum begreifen, wobei $n{\cdot}m$ die Zahl der Pixel angibt, in die das Bild aufgelöst ist. Das ist ein gängiger Ansatz in der Bildverarbeitung im Computer. In diesem Sinn können Bilder also auf ihre Ähnlichkeit hin miteinander verglichen werden. Solche Überlegungen führten E. Ruch auf den Begriff des Richtungsabstandes (von Vektoren)[36] und Hermann Haken auf den des „Synergetischen Computers“[37].

Man kann aber auch fragen, wie ein Begriff im aus Neuronen bestehenden Gehirn gespeichert wird. Wir gehen davon aus, dass es sich bei Begriffen um eine Verteilungsstruktur innerhalb einer recht überschaubaren Menge von Neuronen handelt. In dieser neuronalen Struktur gibt es verschiedene Teilmengen von jeweils gleich agierenden Neuronen[38].

Ist die Zahl der kooperierenden, also einen Begriff bildenden Neuronen klein ($n < 6$), dann sind alle darauf abgebildeten Bilder miteinander vergleichbar, d.h. sie gehören zur selben Begriffsklasse; sie sind sich ähnlich, denn sie lassen sich alle ineinander überführen. Am Begriff des Baumes lässt sich dies recht anschaulich darstellen und nachvollziehen, da man ja einer bestimmten Baumart den Begriff dieses Baumes zuordnen kann: z.B. Birke, so verschieden sie im Einzelnen sind, so sind sie doch alle miteinander vergleichbar.

Will man nun mehrere Eigenschaften den Objekten zuordnen, dann bedarf es dazu einer größeren Anzahl kooperierender Neuronen und einer Diversifikation ihrer Aktionen bzw. einer größeren Menge von verschiedenen, gleich agierenden Teilgruppen von Neuronen. So können wir verschiedene Baumarten voneinander unterscheiden: Tanne, Eiche, …, die durchaus unvergleichbar sind. Hegel würde dies als das gewöhnliche Denken, den besonderen Begriff[39] bezeichnen.

Haben wir aber genügend viele kooperierende Neuronen mit genügend vielen Teilmengen gleichagierender Neuronen, dann kann es auch Katalyse im oben genannten Sinne der Katalyse verschränkter Systeme geben. Wir nehmen an, dass es erst auf dieser Entwicklungsstufe die Möglichkeit gibt, auch die Einheit unterschiedlicher Begriffe zu erfassen, die auf vorhergehender Entwicklungsstufe völlig unvergleichbar waren. Katalysator könnten hierbei die z.B. sprachlich übermittelten Gedanken Anderer sein oder auch nur andere Eindrücke z.B. ästhetischer Natur.

Das, was wir allgemein als Denken bezeichnen, tritt – diese Betrachtungsweise voraussetzend – erst auf der Entwicklungsstufe auf, bei der wir es mit der Autokatalyse zu tun haben, bei der also ein Begriff bzw. ein Partitionsvektor sich selbst katalysiert[32]. D.h. er bildet mit sich selbst ein Tensorprodukt, wobei ein zuvor unvergleichbarer Systemzustand jetzt in einen Systemzustand transformiert wird, in dem der sich selbst katalysierende Partitionsvektor und ein katalysierter, vorher nicht vergleichbarer Vektor durch eine bi-stochastische Matrix ineinander überführt werden können.

Bei den zuvor diskutierten Young-Diagrammen bzw. Ruch-Diagrammen oder Leibniz-Partitionsvektoren tritt dieser Fall erst bei $n = 15$ auf, wobei der majorisierte Vektor als Katalysator wirkt. Gemäß unseren Ausführungen in einer früheren Arbeit[32] bezeichnen wir diesen Fall als Slave-Autokatalyse. Die Situation, dass der majorisierende Vektor katalysiert, tritt erstmals bei $n = 16$ auf (Master-Autokatalyse). Darüber hinaus ist es auch möglich, unvergleichbare Vektorpaare zu finden, bei denen sowohl der majorisierende als auch der majorisierte Vektor katalytisch wirken können (erstmalig bei $n = 22$). Wir sprechen dann von wechselseitiger Autokatalyse.

Dies könnte im Falle des Schüler/Lehrer-Beispiels dahingehend interpretiert werden, dass im ersten Fall (Slave-Autokatalyse) der Schüler überwiegend profitiert und im zweiten Fall (Master-Autokatalyse) der Lehrer. Bei wechselseitiger Autokatalyse können beide gewinnen; dieser Fall tritt insbesondere im Verhältnis von Diplomanden/Doktoranden im Verhältnis zu ihrem Betreuer/Doktorvater auf.

Beispiel: Intelligenzquotient

„Wir waren schon mal schlauer“ lautet das Titelthema der Wochenzeitung DIE ZEIT vom 28. März 2019[40]. Weiter heißt es dort, dass der Intelligenzquotient in den meisten Industrienationen wie auch in Deutschland jahrzehntelang anstieg, seit einigen Jahren aber wieder sinkt. In dem Artikel werden einige Hypothesen angeführt, um diese Beobachtungen zu erklären. Aber kann man Intelligenz wirklich messen und vergleichen?

Der Intelligenzquotient IQ[2] ist wohl eines der ältesten und bekanntesten Verfahren, um die Intelligenz von Menschen miteinander vergleichen zu können. Er ist von großer gesellschaftlicher Bedeutung, denn seine Anwendung hat eine starke Auswirkung auf die individuelle Situation des vermessenen Menschen. Er beruht auf der Annahme, dass alle Menschen hinsichtlich ihrer Intelligenz miteinander vergleichbar – ausgedrückt in einer Zahl – sind und dass die Intelligenz einer Bevölkerung bzw. Bevölkerungsgruppe normalverteilt sei. Der IQ wird so konstruiert, dass das Maximum der Normalverteilung (Erwartungswert) bei dem Wert 100 liegt und die Standardabweichung bei ± 15. „Entsprechend einer Normalverteilung haben rund 68 % der Personen dieser Referenzgruppe einen IQ im sogenannten Mittelbereich (bei dem sich die größte Wahrscheinlichkeitsmasse der Dichtefunktion befindet) zwischen 85 und 115.“[2] Um den Intelligenzquotienten zu ermitteln bedarf es eines geschulten Fachpersonals, um sicher zu stellen, dass die Art des gewählten Intelligenztests und das dahinter stehende Intelligenzkonzept auch die entsprechende postulierte Normalverteilung gewährleistet.

Nun zeigte sich aber durch die Arbeiten von Flynn[41], dass bis in die 1990er Jahre die IQ-Tests in den Industrieländern einen stetig steigenden Durchschnitt aufwiesen. Um diesen „Flynn-Effekt“ zu vermeiden, müssen die Intelligenztests ständig neu überprüft und neu normiert werden. Hierfür gibt es in Deutschland eine Norm (DIN 33430) für den Bereich der Eignungsdiagnostik[42]. Diese Norm bezieht sich auf alle Situationen, in denen die berufsbezogene Eignung für Personen beurteilt wird und macht Aussagen zur

- Qualifikation der beteiligten Personen,
- Qualität der verwendeten Instrumente und zum
- Zusammenspiel und Design von Prozessschritten und Abläufen.

Damit spiegelt sie die Komplexität des eignungsdiagnostischen Prozesses wider. „Denn falsch angewendet oder in den Händen unzureichend ausgebildeter Personen sind auch die besten Verfahren nicht DIN-konform. Daher gibt es kein Verfahren, das ohne Berücksichtigung der Qualifikation der Personen und der Einhaltung der Abläufe für sich genommen die DIN-Kriterien erfüllt.“[43]

Ist schon die Festlegung der Intelligenz-Verteilungsfunktion auf die Normalverteilung bzw. Gauß‘sche Glockenkurve recht fragwürdig, so sollte die ständige Nachjustierung bzw. Normierung, um diese Wahl aufrechtzuerhalten, doch ein Warnsignal dafür sein, dass hier möglicherweise etwas prinzipiell nicht ganz in Ordnung sein könnte.

Beispiel: Demokratiemessung – Demokratieindex

> „Norwegen? Eine vollständige Demokratie. Nordkorea? Ein autoritäres Regime. Die Türkei? Auf dem Weg von einer zweifelhaften Demokratie zum hybriden Regime. Jedes Jahr publiziert das britische Magazin *The Economist* eine Art Zeugnis für Staaten: seinen Demokratieindex. Wer erreicht auf einer Skala von null bis zehn die meisten Punkte im Demokratie-Ranking?“[44]

Mit dem Begriff der „Demokratiemessung“ wird in der Politikwissenschaft und der Demografie versucht, den „Grad der Demokratie“ in den einzelnen Ländern zu vermessen und zu vergleichen und diese gemäß ihrer „Demokratiequalität“ zu klassifizieren.[45] Dabei ist die Messbarkeit der Demokratie ein insbesondere in der anglo-amerikanischen Welt geprägtes Gedanken-Konstrukt, das auf der Annahme der Vergleichbarkeit gesellschaftlicher Systeme beruht und sich auf eine bestimmte Auswahl von die Demokratie beschreibenden Merkmalen wie z.B. Wahlen und bürgerliche Freiheiten abstützt[46]. Entsprechend der Komplexität des Demokratiebegriffs gibt es diverse Ansätze, den Grad der Demokratie eines Landes zu messen, die zu unterschiedlichen Rangfolgen in der Demokratiequalität der einzelnen Länder führen.

Das derzeit wirkungsmächtigste Maß, die Demokratiequalität von 167 Ländern zu erfassen, ist der seit 2006 meist jährlich von der britischen Analysefirma ‚The Economist Intelligence Unit' (EIU) veröffentlichte *Demokratie-Index*[47].

Er basiert auf 60 Fragen mit jeweils 2 oder 3 Antwortmöglichkeiten, die mit 0 oder 1 Punkten und bei 3 möglichen Antworten mit einem zusätzlichen halben (0,5) Punkt bewertet werden. (Beispiel Frage 3: Sind Kommunalwahlen frei und gerecht? Antwort a: Ja – 1 Punkt, Antwort b: frei, aber nicht gerecht – 0,5 Punkte, Antwort c: weder frei noch gerecht – 0 Punkte). Der gesamte Fragenkatalog umfasst die Bereiche Wahlprozess und Pluralismus, Funktionsweise der Regierung, politische Teilhabe, demokratisch-politische Kultur sowie Bürgerrechte. Die Punkte werden für jeden Bereich eines Landes addiert, mit 10 multipliziert und durch die Anzahl der Fragen innerhalb dieses Bereiches dividiert. Der Gesamtindex, d.h. der Demokratie-Index für dieses Land, ist der Mittelwert aus den Einzelwerten der 5 Bereiche und befindet sich auf einer kontinuierlichen Skala von 0,0 bis 10,0.

Innerhalb dieses Indexes wird zwischen zwei Demokratietypen, der vollständigen und der unvollständigen Demokratie (8,0 – 10,0 bzw. 6,0 – 7,99), und zwei Regimetypen, dem Hybridregime (Mischform aus Autokratie und Demokratie) und dem autoritären Regime (4,0 – 5,99 bzw. 0.0 – 3,99), unterschieden. Abb. 13 veranschaulicht den Grad der Demokratie in den einzelnen Ländern entsprechend dem vor kurzem von der EIU veröffentlichten Demokratie-Index für das Jahr 2019[48].

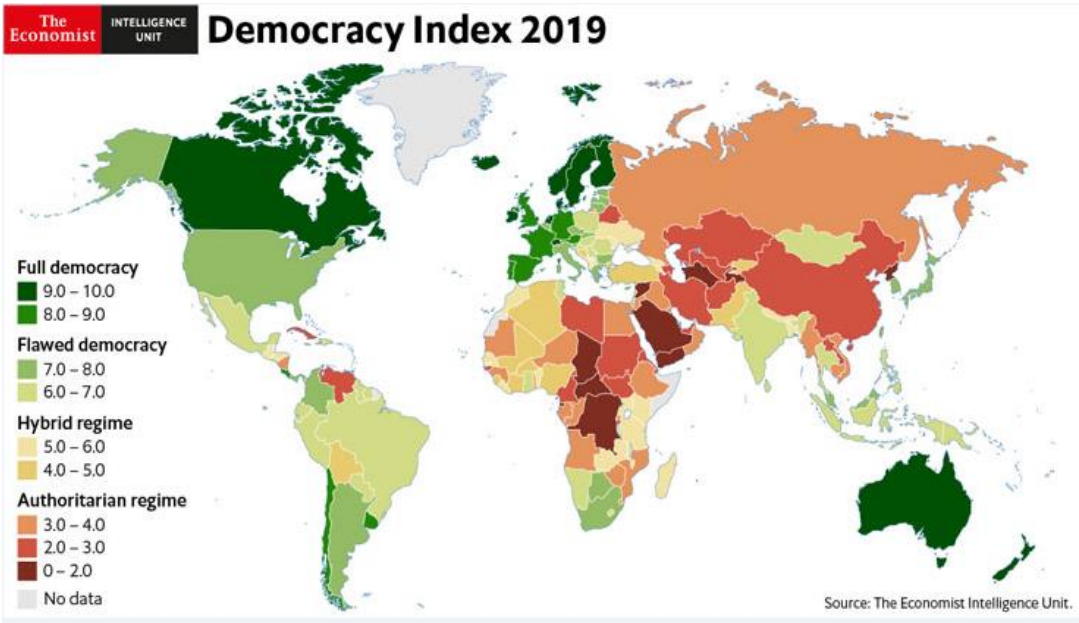


Abb. 13: Veranschaulichung des von der EIU veröffentlichen Demokratie-Indexes 2019 für 167 Länder[48,49].

Weitere Demokratiemaße, die teilweise zu ähnlichen, aber auch zu unterschiedlichen Bewertungen führen, sind u.a.

- der im Rahmen des Polity Projects des Centers für Systemic Peace veröffentlichte *Polity-Score*[50],
- der seit 1973 jährlich von der Nichtregierungsorganisation Freedom House in Washington DC publizierte *Freedom-House-Index*[51]
- und der von Hans-Joachim Lauth am Institut für Politwissenschaft und Soziologie der Universität Würzburg entwickelte *Kombinierte Index der Demokratie*[52] (KID), der die Indexwerte des Polity- und des Freedom-House-Index mit dem Rule-of-Law-Indikator (Rechtsstaatlichkeitsindex) der Weltbank verknüpft, wodurch ein dreidimensionales Demokratieverständnis aus Freiheit, Gleichheit sowie politischer und rechtlicher Kontrolle abgebildet werden soll.

Erwähnt sei noch das von einem Forscherteam der Universitäten Bern und Zürich sowie des Wissenschaftlichen Zentrums Berlin entwickelte *Demokratiebarometer*[53], mit dem versucht wird, die Qualitätsunterschiede von etablierten Demokratien zu messen und zu analysieren. Dabei fließen,

abgeleitet aus drei Grundprinzipien (Freiheit, Gleichheit und Kontrolle), Kriterien wie Rechtsstaatlichkeit, Transparenz, Partizipation, Repräsentation, politischer Wettbewerb, Gewaltenkontrolle und die Fähigkeit, demokratische Entscheidungen umzusetzen, ein.

Wie zu Beginn dieses Abschnitts bemerkt, ist der Demokratiebegriff äußerst komplex und wird je nach Betonung auf Wahlen, Regierungsbeteiligung und individuellen Freiheiten unterschiedlich interpretiert. Selbst der *Economist* stellt in seinem Bericht „Democracy Index 2012“[45,54] fest, dass es keinen Konsens über die Art und Weise der Demokratiemessung gibt. Ist bereits die Auswahl der Fragen fragwürdig, so basieren die Urteile über manche Länder nur auf intransparenten Expertenaussagen, während andere Länder anhand öffentlicher Umfragen bewertet werden.

Wie bereits im Abschnitt über strikte Ordnungsmaße erwähnt, lassen sich auch in hochparametrischen Diagrammverbänden, die komplexe Systeme wie den Intelligenzbegriff, das Demokratieverständnis oder die Einkommensgerechtigkeit beschreiben, Verteilungen fallend – aber auch steigend – total ordnen. In der Ökonomie verwendet man hierfür Lorenz-Kurven[55] bzw. als Maß den Gini-Koeffizienten[56]. Im Fall unvergleichbarer Verteilungen führt dies zu Kreuzungen der entsprechenden Lorenz-Kurven. Wenn das auftritt, kann man nicht mehr davon reden, dass eine Verteilung besser oder schlechter – d.h. im Kontext der Majorisierung – größer oder kleiner sei als die andere. Nach Rothschild und Stiglitz ist es in einem solchen Fall notwendig, eine fremdbestimmte Entscheidung zu treffen[57]. Ein solcher Ansatz liegt implizit allen Maßen wie dem Intelligenzquotienten oder dem Demokratieindex zugrunde.

Es ist daher durchaus problematisch, wenn auf der Grundlage der so ermittelten Bewertung eines Landes politische Entscheidungen getroffen werden. So stützen die USA etwa die Vergabe von Milliarden Dollar an ‚Demokratieförderung‘ auch auf die Bewertung durch Demokratiebarometer[44].

Schlussbemerkung

Allen sozialen Vergleichsmaßen – wie dem Intelligenzquotient, den PISA-Studien, dem chinesischen „Social Credit System“, dem Demokratie-Index, dem Gerechtigkeits-Index, dem Glücksindex usw. – gemeinsam ist, dass sie sich aus einer Mischung verschiedener Eigenschaften des betrachteten Begriffs zusammensetzen, wobei jede einzelne Eigenschaft skalierbar ist. Sie beschreiben hochgradig komplexe Systeme, deren Charakteristika je nach dem jeweiligen Standpunkt nahezu beliebig normiert werden können. Denn die zugrunde liegende Komplexität der betrachteten Begriffe führt unweigerlich zu Verteilungsfunktionen in hochdimensionalen Räumen und damit auf unvergleichbare, katalysierbare oder nicht katalysierbare Strukturen.

Wir haben eingangs im Kapitel über die Entropie-ähnlichen Maße am Beispiel der Young-Diagramme gezeigt, dass es unendlich viele Maße gibt, die Unordnung bzw. die Mischung messend zu erfassen. Dies gilt ganz genauso für den Intelligenzquotienten und all die vielen anderen Versuche, die Verteilungen von Eigenschaften sozialer Systeme zu messen. Die Versuche, durch Erweiterung der zu quantifizierenden Eigenschaften Objektivität zu kreieren, erhöhen deren Anzahl und führen somit unweigerlich zu unvergleichbaren oder gar katalysierbaren Verteilungen der jeweiligen Eigenschaften und führen damit die Ansätze selbst ad Absurdum. Die Komplexität der Systeme und Begriffe bzw. ihr qualitativer Charakter kann, wie wir gezeigt haben, auf diese Weise nicht „objektiv“ erfasst werden.

Nur durch gesellschaftlich bedingte Vorurteile lassen sich überhaupt solche sozialen Maße angeben. Ihre Bewertung ist aber Interessen-gesteuert und muss in jedem Einzelfall hinterfragt werden. Die vorgetäuschte Objektivität ist also nur ein politisches Marketing. Kurz gesagt: Gemessen wird, was politisch opportun ist.

Literatur

[1] P.J. Plath und E.C. Haß, *Strukturbildung durch soziale Spiegelung - Mythen und Realität*, Leibniz Online 34 (2018).

[2] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 03. Juli 2019, 19:06 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Intelligenzquotient&oldid=190104082 (Abgerufen: 13. September 2019, 12:56 UTC).

[3] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 24. Juli 2019, 19:05 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=PISA-Studien&oldid=190711647 (Abgerufen: 13. September 2019, 13:02 UTC).

[4] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 30. August 2019, 13:48 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Sozialkredit-System&oldid=191814472 (Abgerufen: 13. September 2019, 13:16 UTC);
s. auch: *China belohnt den Idealbürger*, Märkische Allgemeine Zeitung (MAZ) vom 2.1.208, S. 2 – 3.

[5] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 21. Juli 2019, 17:50 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Demokratieindex&oldid=190619653 (Abgerufen: 13. September 2019, 13:30 UTC).

[6] D.H. Enste, H. Haas und J. Wies, *Internationaler Gerechtigkeitsindex – Analysen und Ergebnisse für 28 Industriestaaten*, Institut der deutschen Wirtschaft Köln Medien GmbH (2013).

[7] D.H. Enste und M. Möller, *Internationaler Gerechtigkeitsmonitor 2015 (GEMO II) – Ein Vergleich von 28 Ländern für die Jahre 2000 bis 2014 über sechs Gerechtigkeitsdimensionen*, Institut der deutschen Wirtschaft Köln (2015).

[8] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 24. Januar 2019, 13:25 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gl%C3%BCcksindikator&oldid=185025042 (Abgerufen: 13. September 2019, 13:59 UTC).

[9] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 08. Augus 2019, 01:45 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=World_Happiness_Report&oldid=191141384 (Abgerufen: 13. September 2019, 13:59 UTC);
s. auch: J.F. Helliwell, R. Layard and J.D. Sachs, *World Happiness Report 2018*, Sustainable Development Solutions Network, New York (2018).

[10] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 03. Juni 2019, 08:34 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Weltgl%C3%BCckstag&oldid=189206746 (Abgerufen: 13. September 2019, 14:15 UTC).

[11] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 28. Juni 2019, 22:11 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Bruttonationalgl%C3%BCck&oldid=189950140 (Abgerufen: 13. September 2019, 14:18 UTC).

[12] E. Ruch, und A. Schönhofer, *Theorie der Chiralitätsfunktionen*, Theoret. Chim. Acta 19 (1970) 225 – 287.

[13] A. Young, A., *On Quantitative Substitutional Analysis*, Proc. London Math. Soc. (1) 33 (1901) 97 – 146.

[14] E. Ruch, *The Diagram Lattice as Structural Principle*, Theoret. Chim. Acta 38 (1975) 167 – 183.

[15] G.W. Leibniz, *Disssertatio de Arte Combinatoria*, 1666, in: Philosophische Schriften, Band 1: 1663 – 1672, Akademie-Verlag Berlin (1990) 163 – 230.

[16] E. Knobloch, *The Mathematical Studies of G.W. Leibniz on Combinatorics*, Historia Mathematica 1 (1974) 409 – 430.

[17] H. Hecht, *Gottfried Wilhelm Leibniz – Mathematik und Naturwissenschaften im Paradigma der Metaphysik*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, Leipzig (1992) S. 64 – 66.

[18] A.I. Echeverria und G.I. Amunátegui, *La Dissertatio de Arte Combinatoria de Leibniz en seconde lecture*, Studia Leibnitiana, Band XXXVII/2 (2005), in URL: arXiv:1408.4771.

[19] Rechnungen von E. Swart mit der funktionalen Programmiersprache *Haskell*, vorgetragen auf dem 18. Winterseminar „Struktur der Unordnung“ vom 30.03.-06.04.2008 in Galtür/Wirl, Österreich, und von E.C. Haß mit MATLAB (2019, unveröffentlicht).

[20] Komplexitätsmaße werden auch bei Software-Tests verwendet, um die Anzahl der durchzuführenden Testfälle zu bestimmen.

[21] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, The Bell System Technical Journal, Vol. 27 (1948) 379 – 423 and 623 – 656.

[22] S. Sauerbrei, E.C. Haß and P.J. Plath, *The Apollonian Decay of Beer Foam Bubble SizeDistribution and the Lattices of Young Diagrams and their Correlated Mixing Functions*, Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2006, Article ID 79717, 1 – 35.

[23] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 19. August 2019, 09:29 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Entropie&oldid=191481555 (Abgerufen: 16. September 2019, 20:25 UTC).

[24] A. Uhlmann, *On the Shannon entropy and related functionals on convex sets*, Reports on Mathematical Physics 1.2 (1970) 147 – 159.
Es sei darauf hingewiesen, dass in der „Uhlmann Schule" Funktionale wie die Shannon-Entropie ursprünglich als ‚konkave' Funktionen bezeichnet wurden. In unserer früheren Arbeit[22] haben wir ebenfalls diese Bezeichnung verwendet.

[25] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 25. Januar 2019, 17:31 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Polytop_(Geometrie)&oldid=185063793 (Abgerufen: 16. September 2019, 20:41 UTC).

[26] H. Meschkowski, *Mathematisches Begriffswörterbuch*, BI- Hochschultaschenbücher 99/99a, Bibliographisches Institut, Mannheim (1965).

[27] I.N. Bronstein und K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1981) S. 323 – 324.

[28] A.M. Jaglom und I.M. Jaglom, *Wahrscheinlichkeit und Information*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1984) S. 330 – 343.

[29] B.B. Mandelbrot, *How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*, Science 156 (1967) 636 – 638.

[30] B.B. Mandelbrot, *Fractals – Form, Chance, and Dimension*, W.H. Freeman and Company, San Francisco (1977).

[31] E. Ruch and A. Mead, *The principle of increasing mixing character and some of its consequences*, Theoret. Chim. Acta 41 (1976) 95 – 117.

[32] E.C. Haß, S. Sauerbrei and P.J. Plath, *Discrete Vector Models for Catalysis and Autocatalysis*, Discrete Dynamics in Nature and Society, vol. 2008, Article ID 590142, 26 pages, 2008; https://doi.org/10.1155/2008/590142.

[33] P.J. Plath, S. Sauerbrei, E.C. Haß, G. Patzelt, K. Knicker, J. Plath, E. Swart und U. Sydow, *Vom Bier zur höheren Mathematik*, Vortrag an der Humboldt Universität zu Berlin am 11.02.2009.

[34] S. z.B.: D. Jonathan and M.B. Plenio, *Entanglement-Assisted Local Manipulation of Pure Quantum States*, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3566 – 3569;
J. Eisert and M. Wilkens, *Catalysis of Entaglement Manipulation for Mixed States*, Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 437 – 440;
G. Aubrun and J. Nechita, *Catalytic majorization and lp norms*, Comm. Math. *Phys*. 278.1 (2008) 133 – 144.
C. Duarte, R.C. Drumond and M. Terra Cunha, *Self-catalytic conversion of pure quantum states*, Report (2015), *arXiv:1504.06364*.

[35] E. Ruch and B. Lesche, *Information extent and information distance*, J. Chem. Phys. 69 (1978) 393 – 401.

[36] E. Ruch, *Der Richtungsabstand*, Acta Applicandae Mathematicae 30 (1993) 67 – 93.

[37] H. Haken, *Synergetic computers and Cognition*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1991, 2004);
s. auch: H. Haken, *Entwicklungslinien der Synergetic*, in: H. Haken, P.J. Plath, W. Ebeling und Y.M. Romanovsky, *Beiträge zur Geschichte der Synergetik*, Springer Spektrum, Wiesbaden (2016) 36 – 42.

[38] P.J. Plath, *Meme, Märchen, Magisches. Gesellschaftliche Phasenübergänge im alteuropäischen Matriarchat*, in: K.F. Wessel, H. Laitko und T. Diesner (Hrsg.), *Hermann Ley – Denker einer offenen Welt*, Berliner Studien zur Wissenschaftsphilosophie und Humanontogenetik, Bd. 29, Kleine Verlag, Grünwald (2012) S. 450;
Quelle: E.C. Haß, *Spiele zur Simulation der zeitlichen Entwicklung von Strukturen und Aktivitätsmustern in Neuronennetzwerken*, Vortrag beim VI. Winterseminar auf dem Zeinisjoch (unpublished results).

[39] G. Lasson (Hrsg.), *Gottfried Wilhelm Friedrich Hegel – Wissenschaft der Logik, Zweiter Teil*, Philosophische Bibliothek Bd. 57, Felix Meiner Verlag, Hamburg (1934, 1969) 245 – 259; s. auch: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 01. August 2019, 10:33 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Wissenschaft_der_Logik&oldid=190943488 (Abgerufen: 18. September 2019, 16:52 UTC).

[40] N. Bleuel, N. Heinen und T. Stelzer, *Wir waren mal schlauer*, DIE ZEIT Nr. 14 (2019) 13 – 15.

[41] J.R. Flynn, *Are we getting smarter? Rising IQ in the Twenty-First Century*, Cambridge University Press, Cambridge (2012); http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781139235679.

[42] DIN 33430:2016-07, *Anforderungen an berufsbezogene Eignungsdiagnostik*, (2016); https://www.beuth.de/de/norm/din-33430/254909784.

[43] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 27. Juli 2019, 00:22 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=DIN_33430&oldid=190784836 (Abgerufen: 18. September 2019, 20:45 UTC).

[44] addendum Projekt Demokratie 004, Demokratiebarometer: *Die Rating Agenturen politischer Systeme*, Quo Vadis Veritas Redaktions GmbH, Wien (2017), URL: https://www.addendum.org/demokratie/demokratie-barometer/ (Abgerufen: 5. März 2020, 16:05 UTC).

[45] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 20.Februar 2020, 12:18 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Demokratiemessung&oldid=196987035 (Abgerufen: 21. Februar 2020, 20:35 UTC).

[46] M. Stoiber, *Ein neues, kontextualisiertes Maß für Demokratie - Konzeptualisierung und Operationalisierung*, Zeitschrift für Politikwissenschaft 18. Jahrgang, Heft 2 (2008) 209 – 231.

[47] The Economist Intelligence Unit, *Democracy Index 2018: Me Too? – Political participation, protest and democracy*, URL: http://pages.eiu.com/rs/753-RIQ-438/images/Democracy_Index_2018.pdf (Abgerufen: 25. Februar 2020, 19:32 UTC);
s. auch: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 19. Februar 2020, 21:48 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Demokratieindex&oldid=196973067 (Abgerufen: 25. Februar 2020, 19:03 UTC).

[48] The Economist Intelligence Unit, *Democracy Index 2019*, URL: https://www.eiu.com/public/topical_report.aspx?campaignid=democracyindex2019 (Abgerufen: 25. Februar 2020, 20:25 UTC).

[49] Bildnachweis: The Economist Intelligence Unit, URL: http://graphics.eiu.com/upload/topic-pages/democracy-index-2019/Democracy-map-2019-website.jpg (Abgerufen: 3. März 2020, 13:43 UTC).

[50] Center for Systemic Peace, *The Polity Project*, (CSP, Vienna, VA, USA, 2018), URL: http://www.systemicpeace.org/polityproject.html (Abgerufen: 24.Februar 2020, 21:12 UTC).

[51] Freedom House, *Freedom in the World Research Methodology*, URL: https://freedomhouse.org/reports/freedom-world/freedom-world-research-methodology (Abgerufen: 24. Februar 2020, 21:31 UTC).

[52] Institut für Politwissenschaft und Soziologie, *Kombinierter Index der Demokratie (KID)*, (o. J.), URL: https://www.politikwissenschaft.uni-wuerzburg.de/lehrbereiche/vergleichende/forschung/kombinierter-index-der-demokratie-kid/ (Abgerufen: 05. März 2020, 21:50 UTC).

[53] M. Bühlmann, W. Merkel, L. Müller, H. Giebler und B. Weßels, *Demokratiebarometer: ein neues Instrument zur Messung von Demokratiequalität*, Z Vgl Polit Wiss **6,** 115–159 (2012), https://doi.org/10.1007;
s.auch: A. Petring, W. Merkel und B. Tanneberg – WZB Democracy Blog, *The Good, the Bad and the Ugly? Das Demokratiebarometer stellt sich vor*, veröffentlicht am 15. Oktober 2013, URL: https://democracy.blog.wzb.eu/2013/10/15/the-good-the-bad-and-the-ugly-das-demokratiebarometer-stellt-sich-vor/ (Abgerufen: 5. März 2020, 19:16 UTC).

[54] The Economist Intelligence Unit, *Democracy Index 2012 – Democracy at a standstll*, URL: https://civitanaorg.files.wordpress.com/2014/05/democracy-index-2012.pdf (Abgerufen: 5. März 2020, 19:48 UTC).

[55] M.O. Lorenz, *Methods of measuring the concentration of wealth*. Quarterly Publications of the American Statistical Association 9 (New Series, No. 70) (1905) 209 – 219;
s auch: C. Kleiber, *The Lorenz curve in economics and econometrics*, Working papers 2007/09, Faculty of

Business and Economics - University of Basel, 2007;
https://www.econstor.eu/bitstream/10419/22620/1/tr30-05.pdf;
K. Knicker und P. Plath, *Foam Decay with Incomparable Lorenz Curves*, In: G. Wunner und A. Pelster (eds), *Selforganization in Complex Systems: The Past, Present, and Future of Synergetics. Understanding Complex Systems*, Springer, Cham. (2016) S. 325 – 331.

[56] In: Wikipedia, Die freie Enzyklopädie. Bearbeitungsstand: 14.Februar 2020, 14:50 UTC. URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gini-Koeffizient&oldid=195821981 (Abgerufen: 11. März 2020, 16:20 UTC).

[57] M. Rothschild and J. Stiglitz, *Equilibrium in Competitive Insurance Markets: An Essay on the Economics of Imperfect Information*, Quarterly Journal of Economics 90 (1976) 629–649;
s. auch: V.R. Young and M.J. Browne, *Equilibrium in Competitive Insurance Markets Under Adverse Selection and Yaari's Dual Theory of Risk*, The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory 25 (2001) 141 – 157.

E-Mail-Adressen der Verfasser: **ernst-christoph.hass@web.de**
peter_plath@t-online.de