

Rainer Burghardt

Karl Schwarzschild und was mit seinem Werk geschah

Veröffentlicht: 08.02.2017

1. Das Gravitationsmodell von Schwarzschild und die Versuche es zu erweitern

Bald nachdem Einstein den ersten Aufsatz zur Allgemeinen Relativitätstheorie veröffentlicht hat, sind von Karl Schwarzschild zwei Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen vorgeschlagen worden, die das Äussere und Innere eines stellaren Objekts beschreiben sollen. Es ist sicher von Interesse zu untersuchen, wie im Lauf eines Jahrhunderts mit diesen Lösungen umgegangen wurde und dies kritisch zu beleuchten. Zunächst muss angemerkt werden, dass das Schwarzschild-Linienelement der äusseren Lösung, das bereits das Wesentliche der Theorie beinhaltet, von Hilbert in jene Form gegossen wurde, die wir heute als Standard-Schwarzschild-Metrik bezeichnen. Das Linienelement

$$(1.1) \quad ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2$$

beschreibt den Abschnitt einer Kurve im gekrümmten Raum unter Verwendung von Polarkoordinaten, wobei M die Masse des felderzeugenden Objekts in geometrischen Einheiten ist.

Flamm hat 1916 das Modell auf eine geometrische Grundlage gestellt. Der Raumteil der Metrik (1.1) kann als Fläche 4. Ordnung interpretiert werden, die in einem höherdimensionalen ebenen Raum. Diese Fläche wird als Flamm'sches Paraboloid bezeichnet.

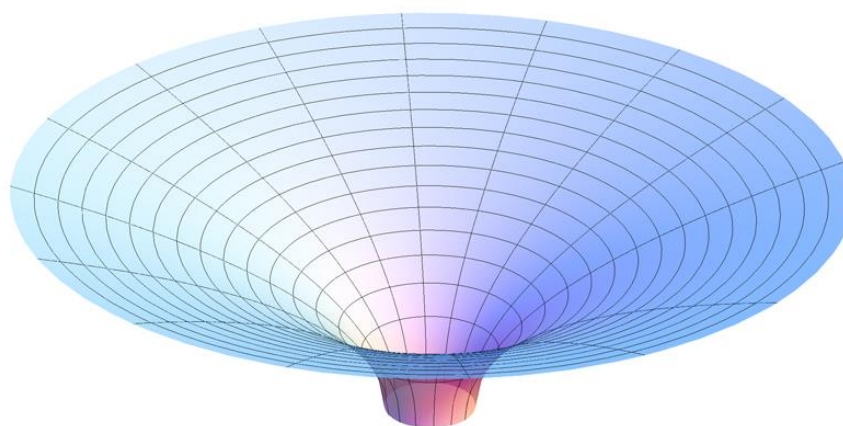


Fig. 1. Flamm'sches Paraboloid

Bei $r = 2M$ liegt der Kehlkreis dieser Fläche. Man bezeichnet ihn als Ereignishorizont oder Schwarzschildhorizont. Für $r < 2M$ existiert die Fläche nicht, Gl. (1.1) kann diesen Bereich nicht beschreiben. In (1.1) erkennt man, dass wegen

$$(1.2) \quad r \rightarrow 2M, \quad \frac{1}{1-2M/r} \rightarrow \infty$$

die Metrik am Ereignishorizont eine Singularität hat. Bis heute wird gestritten, ob diese Singularität eine echte oder eine Koordinatensingularität ist. Trifft letzteres zu, müsste sich die Singularität durch eine geeignete Koordinatenwahl beheben lassen. Das ist auch der Fall, wenn man die Einstein-Rosen-Koordinaten [1] verwendet. Die radialen Kurven am Flamm'schen Paraboloid haben die Gleichung

$$(1.3) \quad R^2 = 8M(r - 2M)$$

Verwendet man in (1.1) die Extradimension R statt der radialen Koordinate r , erhält man die singularitätsfreie Metrik

$$(1.4) \quad ds^2 = \frac{R^2 + 16M^2}{16M^2} dR^2 + \left(\frac{R^2 + 16M^2}{8M} \right)^2 (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \frac{R^2}{R^2 + 16M^2} dt^2 .$$

Der Ereignishorizont liegt dann bei $R = 0$. Unbestritten ist jedoch, dass am Ereignishorizont die physikalischen Größen sich merkwürdig verhalten. Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Objekts würde am Ereignishorizont die Lichtgeschwindigkeit erreichen, die Schwerkraft wäre dort unendlich hoch und die Zeit würde still stehen. Das sind Eigenschaften, die eine gute physikalische Theorie nicht haben sollte. Wir gehen daher davon aus, dass der Ereignishorizont nicht erreicht werden kann und wir werden zeigen, warum das so ist.

Zunächst befassen wir uns mit Versuchen, die Metrik (1.1) mittels einer Koordinatentransformation so umzuformen, dass auch der Bereich $r < 2M$ erfasst werden kann. Eddington [2] und später Finkelstein [3] haben mit der Transformation

$$(1.5) \quad t = t' \pm 2M \ln(r - 2M)$$

die Metrik in die Form

$$(1.6) \quad ds^2 = dr^2 - dt^2 + v^2 (dr + dt)^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2, \quad v = -\sqrt{2M/r}$$

gebracht. Sie ist singularitätsfrei und oberflächlich betrachtet scheint es, dass die radiale Koordinate r jetzt auch den Bereich $r < 2M$ durchlaufen kann. Multipliziert man jedoch die Klammer aus, erhält man

$$(1.7) \quad ds^2 = (1 + v^2) dr^2 + 2v^2 dr dt + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta d\varphi^2 - (1 - 2M/r) dt^2$$

und erkennt, dass in der Formel ein Kreuzterm auftritt. Das bedeutet, dass ein schiefwinkeliges Koordinatensystem verwendet wird, das zur Darstellung physikalischer Größen ungeeignet ist. Um diesen Mangel zu vermeiden, muss man eine orthogonale Zeitkoordinate einführen

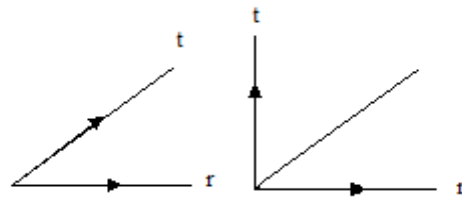


Fig. 2. Eddington-Finkelstein-Koordinaten

und ist damit wieder dort, wo man vorher war: beim Standard-Schwarzschild-Koordinatensystem.

Einen weiteren Vorstoss in den Bereich unter den Ereignishorizont vorzudringen, hat Kruskal [4] unternommen. Er führt ein Koordinatensystem ein, das neue noch nicht bekannte Bereiche der Schwarzschild-Geometrie darstellen soll. Das Kruskalsystem enthält vier Sektoren, man spricht daher von der vierfachen Wahrheit und der maximalen Erweiterung der Schwarzschildtheorie. Im Kruskal-diagramm

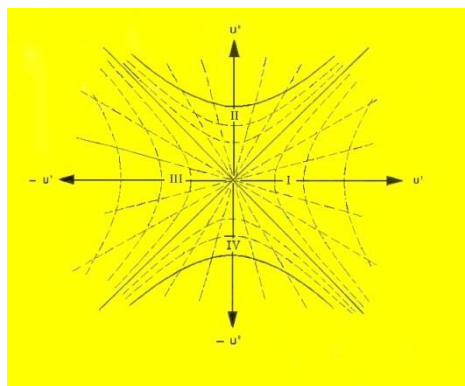


Fig. 3. Kruskaldiagramm

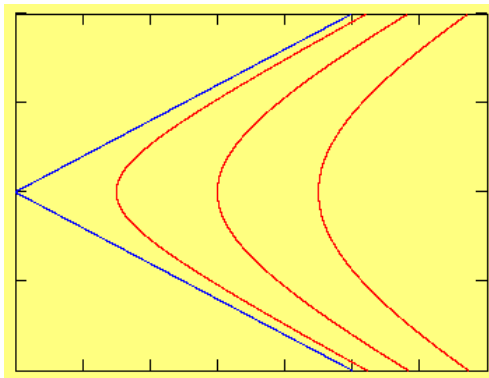


Fig. 4. Hyperbelscharen

wird der Sektor II als schwarzes Loch, das Materie verschlingt, gedeutet, der Sektor IV als weisses Loch, das Materie ausstösst. Wir untersuchen, wie das Diagramm zustande kommt. Die Hyperbeln in der Zeichnung deuten wir als eine Folge von Lorentztransformationen von einem ruhenden System zu einem beschleunigten System in pseudoreeller Darstellung

$$Y^2 = (u^1)^2 - (u^0)^2 .$$

Die Hyperbeln sind den Werten $Y = 0, 1, 2, 3$ in Fig.4 zugeordnet. So gedeutet, ist das Kruskaldiagramm kein Raum-Zeit-Diagramm, sondern die Darstellung einer beschleunigten Bewegung. Die beiden gleichartigen Sektoren I und III stellen eine bradyonische Bewegung dar, ein Objekt wird vom Ereignishorizont ins Unendliche beschleunigt. Die Sektoren II und IV beschreiben eine tachyonische Bewegung, d.h. eine Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit - ein Objekt hätte am Ereignishorizont unendlich hohe Geschwindigkeit und bremst im Unendlichen auf Lichtgeschwindigkeit ab.

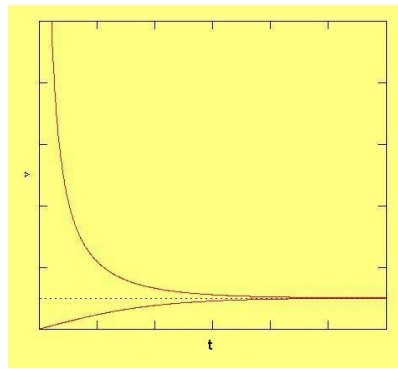


Fig. 5. Kruskalgeschwindigkeiten

Die zunächst etwas deskriptive Vorgehensweise vervollständigen wir durch folgende Überlegungen: Aus dem Kruskal-Koordinatensystem ($x^1 = u^1$, $x^4 = iu^0$) leiten wir durch Differenzieren die Transformationsmatrix $x^i{}_{|j}$ her. Aus der Schwarzschildmetrik (1.1) und der Kruskalmetrik

$$(1.8) \quad ds^2 = \gamma^2 (du^{12} + du^{42}) + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad \gamma^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}}$$

lesen wir die 4-Beine ab und erhalten mit

$$(1.9) \quad L_m^{m'} = e^{m'} x^i{}_{|i} e^i_m$$

die Lorentztransformation

$$(1.10) \quad L_m^{m'} = \begin{pmatrix} \cos i\chi & & -\sin i\chi \\ & 1 & \\ \sin i\chi & & \cos i\chi \end{pmatrix}$$

mit der skalierten Koordinatenzeit $\chi = t/4M$. Daraus ergibt sich für den bradyonischen Fall die Kruskalgeschwindigkeit

$$(1.11) \quad v_K = \text{th}\chi.$$

Das Gravitationsfeld wird durch die Ricci-Rotations-Koeffizienten beschrieben. Diese transformieren inhomogen in ein relativ bewegtes System:

$$(1.12) \quad {}^i A_{m'n'}{}^{s'} = L_m^{m'n} A_{mn}{}^s + L_s^{s'} L_n{}^{m'}.$$

Setzt man darin die Schwarzschildwerte in A ein und berechnet den zweiten Term mit (1.10), gewinnt man die Kruskalbeschleunigung, die auch vom statischen System aus betrachtet werden kann. Die effektive Kruskalbeschleunigung ist

$$(1.13) \quad K_m^e = K_m + E_m, \quad K_m = \{1, 0, 0, 0\} \frac{1}{4M\sqrt{1-2M/r}},$$

wobei die eigentliche Kruskalbeschleunigung K durch die (negative) Schwerebeschleunigung E vermindert wird. Man erkennt mit (1.12), dass die Feldgrößen im Kruskalsystem nur im äusseren Schwarzschildbereich definiert sind und die einsteinschen Feldgleichungen den inneren Schwarzschildbereich nicht beschreiben können. Es erhellt, dass die Wahl eines neuen Koordinatensystems den geometrischen und physikalischen Gehalt einer Theorie nicht verändern kann. Das ist eigentlich die Grundvoraussetzung einer physikalischen Theorie.

Ein weiterer Vorstoss in den inneren Bereich wird durch die Umformung der Schwarzschildmetrik mit

$$\frac{1}{1-\frac{2M}{r}} dr^2 \rightarrow -\frac{1}{\frac{2M}{r}-1} dr^2, \quad -\left(1-\frac{2M}{r}\right) dt^2 \rightarrow \left(\frac{2M}{r}-1\right) dt^2$$

ermöglicht. In dieser Schreibweise kann $r < 2M$ sein. Die Metrik hat dann die Form

$$(1.14) \quad ds^2 = -\frac{1}{\frac{2M}{r}-1} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + \left(\frac{2M}{r}-1\right) dt^2$$

wobei die roten Ausdrücke jetzt zeitartig sind, die blauen raumartig. Es fällt auf dass die Variable r in beiden Bedeutungen vorkommt, was widersprüchlich ist. Dennoch wird Gl. (1.14) als Grundbeziehung für die Definition eines schwarzen Loches herangezogen. Ein stellares Objekt könnte bis zum Ereignishorizont kollabieren und zum schwarzen Loch werden. Der Ereignishorizont wäre dann eine Einwegmembran, alles kann hinein, nichts kann heraus, auch nicht Licht. Wir treten dem Gedanken nicht bei und halten uns an Laue: Punkte mit $r < 2M$ existieren nicht für die äussere Schwarzschild-Lösung.

2. Freier Fall und schwarzes Loch

Wiederholt wurden Versuche gemacht, Bewegungen zu beschreiben, die das Eindringen von Objekten in den inneren Bereich des äusseren Schwarzschild-Modells ermöglichen sollen.

Gautreau [6-7] und Gautreau und Hoffmann [8] nehmen an, dass Körper beim Überschreiten des Ereignishorizonts mit Überlichtgeschwindigkeit ihren Fall im inneren Bereich $r < 2M$ fortsetzen. Von De Sabbata, Pavšič und Recami [9] und De Sabbata [10] wurde dieses tachyonische (Bewegung mit Überlichtgeschwindigkeit) und bradyonische (Bewegung mit Unterlichtgeschwindigkeit) Verhalten ausführlich untersucht.

Janis [11] führt ein neues Bezugssystem ein, in dem die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers gemessen wird und zeigt, dass in diesem System die Geschwindigkeit am Ereignishorizont $r = 2M$ kleiner ist als die Lichtgeschwindigkeit. Cavalleri und Spinelli [12,13] erkennen als Ursache eine spezielle Koordinatenwahl und Missinterpretation der Teilchengeschwindigkeit. Janis [14] versucht in einer Antwort darauf seinen Standpunkt mit einem Vergleich mit dem Minkowskiraum zu untermauern.

Aus Jaffes und Shapiros [15-18] Berechnungen ergibt sich, dass Teilchen, die auf ein stellares Objekt zufallen, zuerst beschleunigen, dann aber wieder langsamer werden. Ihre Übergangsgeschwindigkeit am Ereignishorizont wäre dann kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. McGruder III [19] erkennt eine abstossende Wirkung in der Nähe des Ereignishorizonts. Baierlein [20] widerspricht Jaffe und Shapiro und weist darauf hin, dass die inkorrekte Wahl der Koordinatenzeit an Stelle der physikalischen Zeit zu diesen Ergebnissen führt.

Tereno [21] integriert ebenfalls die radiale Bewegungsgleichung und kommt zum Schluss, dass radiale Geodäten beim Ereignishorizont keine Null-Linien werden. Womit gemeint ist, dass materielle Teilchen mit Unterlichtgeschwindigkeit in ein schwarzes Loch eindringen können. Mitra [21,22] führt

diese Sicht auf einen Fehler beim Grenzwertübergang in Terenos Rechnungen zurück. Tereno führt vergleichbare Rechnungen nochmals in Kruskal-Koordinaten durch, um seinen Standpunkt zu erhärten. Mitra antwortet mit einer ausführlichen Analyse in Kruskal-Koordinaten. Da Tereno nochmals widerspricht, zieht Mitra [23,24] die Shapiro-Teukolsky [25] [r,t]-Beziehung heran und gelangt mit Hilfe von zyklischen Koordinaten wieder zum Ergebnis $v = c$ am Ereignishorizont.

Unberührt von dieser Kritik kommen Crawford [26] und Tereno in einer späteren Arbeit auf die Problematik zurück. Nach einer ausführlichen Diskussion über Bezugssysteme im Schwarzschildfeld geben sie eine Formel an, aus der die Geschwindigkeit berechenbar ist, mit der ein frei fallender Körper in ein schwarzes Loch eintritt. Mit ähnlichen Problemen haben sich auch Krori und Paul [27], Lynden-Bell und Katz [28] und Salzmann und Salzmann [29] beschäftigt. Wir verweisen noch auf die Arbeiten von Logunov, Mestverishvili und Kiselev [30] und Loinger [31]. Dass die Rotverschiebung am Ereignishorizont unendlich wird, zeigen de Sabbata und Shah [32]. Einen weiteren Aspekt bringt Royzen [33].

Eine von Misner, Thorne und Wheeler [34] in ihrem Lehrbuch behandelte Methode scheint sich weitgehendst durchgesetzt zu haben. Sie wurde in einigen Lehrbüchern und in hunderten Arbeiten übernommen. Die Autoren befassen sich auf mehreren Seiten mit dem freien Fall eines Objekts, das von einer beliebigen Position zu einer Zentralmasse hin wegfällt. Sie stellen fest, dass von der Warte eines Beobachters im Unendlichen das Objekt sich asymptotisch dem Ereignishorizont nähert, während ein mitfallender Beobachter nach relativ kurzer Eigenzeit die Stelle $r = 0$ erreicht hat. Das ist schlimmer als bei Schrödingers Katze. Für den einen Beobachter lebt sie ewig, für den anderen ist sie schnell tot. Das Problem wurde von MTW in Fig. 7 dargestellt. Wir wollen das Verfahren kritisch beleuchten.

Die von MTW auf mehreren Seiten (Fig. 6) dargestellte Ableitung vereinfachen wir, indem wir Größen, die keine direkte Verwendung haben, entfernen und uns von dem von MTW eingeführten Begriff 'Energie im Unendlichen' trennen. Übrig bleibt ein Fünfzeiler, der zu den Ergebnissen von MTW führt. An dessen einfacher Struktur kann man erkennen, dass die Ableitung fehlerhaft ist.

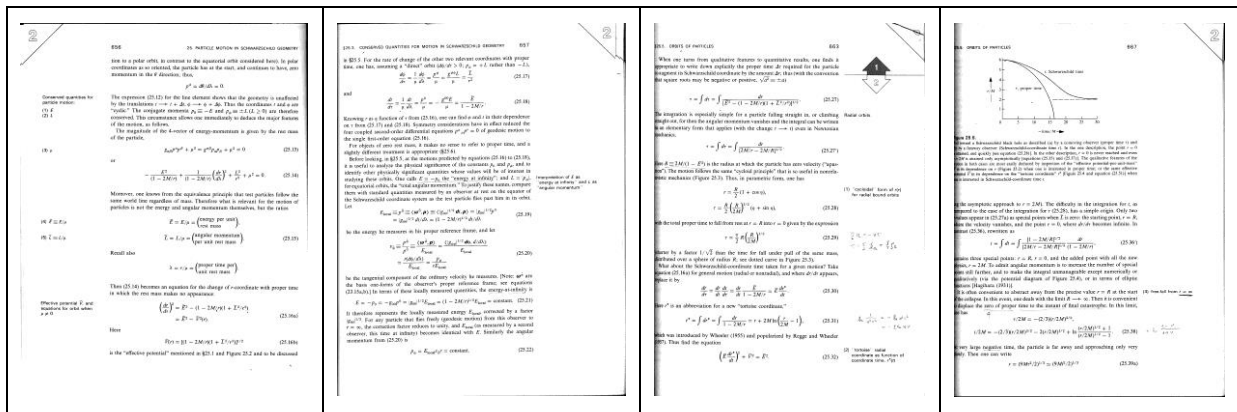


Fig. 6. Die Ableitung von Misner, Thorne und Wheeler

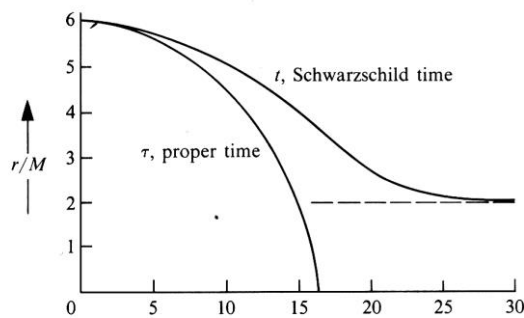


Fig. 7. Der freie Fall von einer beliebigen Position nach Misner, Thorne und Wheeler

Das 4-dimensionale Linienelement wird je nach Bewegungszustand eines Beobachters in einen Raum- und einen Zeitteil aufgespalten

$$(2.1) \quad ds^2 = dx^2 - dT^2 \qquad = dx'^2 - dT'^2 \qquad = dx''^2 - dT''^2$$

Ruhend
Fall von einer beliebigen Position
Fall aus dem Unendlichen

dx, dx', dx'' sind die von den Beobachtern gemessenen Eigenlängen, dT, dT', dT'' die Eigenzeiten. Der angesprochene Fehler besteht darin, dass von MTW die Eigenlänge, die ein Beobachter misst, der von einer endlichen Position wegfällt, mit der Eigenzeit eines Beobachters kombiniert wurde, der aus dem Unendlichen kommt, also

$$(2.2) \quad ds^2 = dx'^2 - dT''^2 .$$

korrigiert man diesen Ansatz, kommt man zu ganz anderen Ergebnissen.

v' ist die Geschwindigkeit eines Beobachters, der aus einer endlichen Position r_0 kommt, v'' die Geschwindigkeit eines Beobachters, der aus dem Unendlichen kommt. v_0 ist die Geschwindigkeit eines Beobachters aus dem Unendlichen und zwar in dem Moment, wo er die Position r_0 erreicht hat, von der der interessierende Beobachter wegfällt. Somit ist die zunächst unbekannte Größe v' bestimmbar. Man bildet die (relativistische) Differenz der aus der Schwarzschildtheorie bekannten Geschwindigkeit $v'' = -\sqrt{2M/r}$ und der Geschwindigkeit $v_0 = -\sqrt{2M/r_0}$ an der Position r_0 des Referenz-Beobachters, den wir ins Auge gefasst haben. Den Zusammenhang der Geschwindigkeiten zeigt Fig. 8.

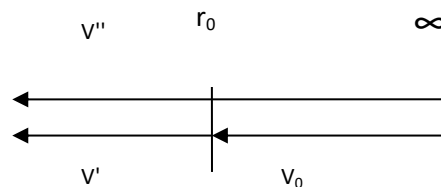
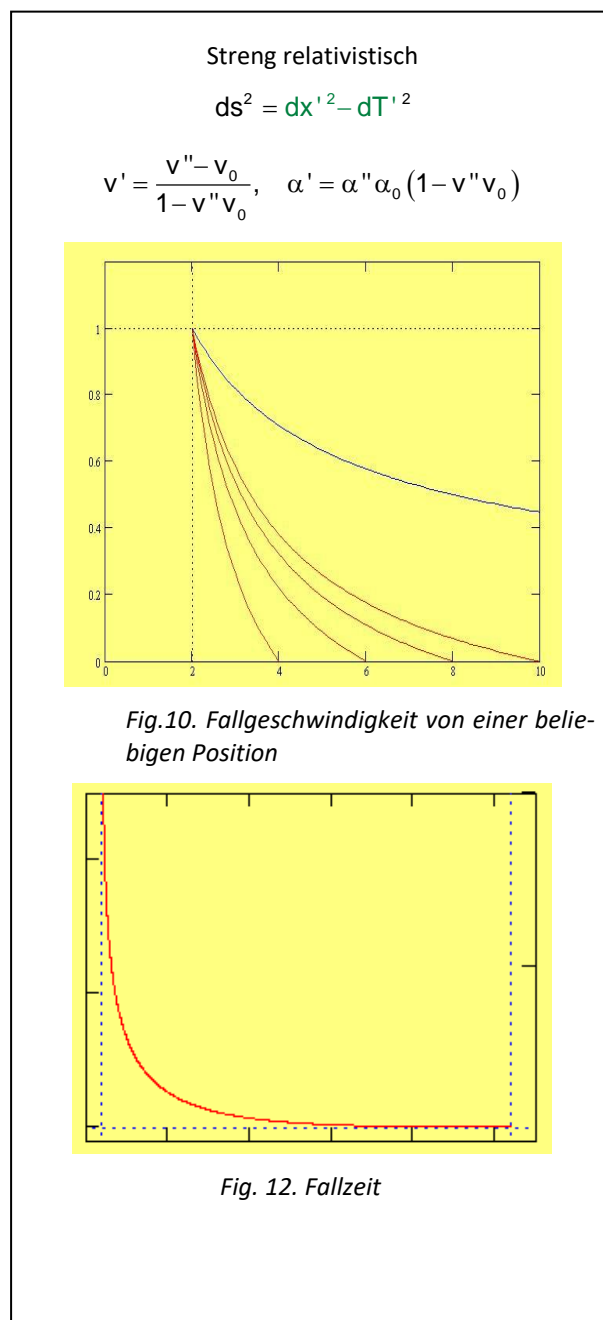
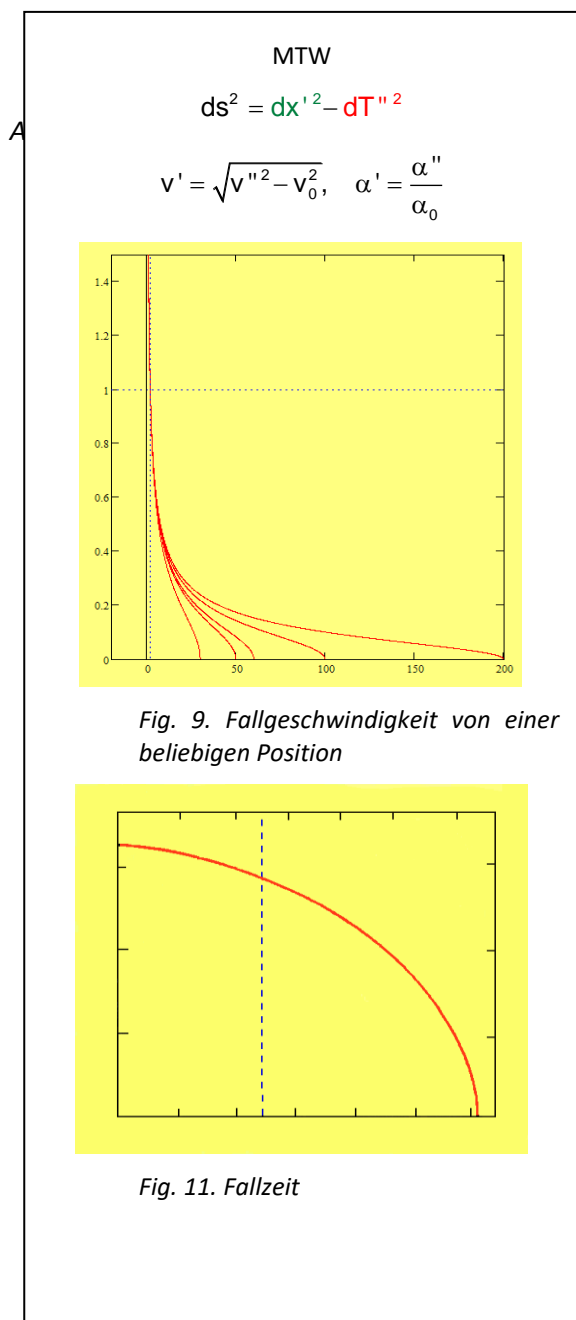


Fig. 8. Die Geschwindigkeiten



Man erkennt, dass die Fallgeschwindigkeit auch die Lichtgeschwindigkeit erreichen würde, wobei im MTW-Fall ein Überschreiten dieser zugelassen ist und der Ereignishorizont durchfallen werden kann. Der Verlauf der Geschwindigkeit im MTW-Fall ist etwas gewunden und physikalisch wenig überzeugend. Im streng relativistischen Fall liegen die Dinge anders: Die Geschwindigkeit des von r_0 wegfallenden Beobachters ist

$$(2.3) \quad v' = \frac{dx}{dT}, \quad \frac{dt}{dT'} = \alpha', \quad \frac{\alpha dr}{dT'} = \alpha' v'.$$

Die α sind die den Geschwindigkeiten zugeordneten Lorentzfaktoren. Integriert man

$$(2.4) \quad dT' = \frac{\alpha''}{\alpha' v'} dr = \frac{1}{\alpha_0 (v'' - v_0)} dr,$$

liest man aus dem Verlauf der Integralkurve ab, dass die Zeit, die zum Vorrücken des Objekts verbraucht wird, bei asymptotischer Annäherung an den Ereignishorizont $r = 2M$ unendlich wird. Kein Objekt kann den Ereignishorizont jemals erreichen oder gar durchdringen (Fig. 12). Man kann davon ausgehen, dass alle Versuche in den inneren Bereich der äusseren Schwarzschild-Lösung vorzudringen, fehlgeschlagen sind. Schwarzschild hat man posthum einiges angetan.

3. Gravitationskollaps

Eine bedeutsame Rolle spielt die Schwarzschildtheorie beim Versuch den Kollaps eines Sterns zu beschreiben. Ein kollabierender nichtrotierender Stern soll jedenfalls von einem Schwarzschildfeld umgeben sein. Die Annahme ist berechtigt, weil sich das Schwarzschild-Modell als einziges bewährt hat. Die Lichtablenkung und die gemessene Perihelbewegung des Merkurs stehen in gutem Einklang mit den theoretischen Vorhersagen.

Erstmals wurde ein Sternenkollaps von Oppenheimer und Snyder [35] beschrieben. Die Autoren greifen auf das mathematische Gerüst eines expandierenden Kosmos von Tolman zu und adaptieren es für den Kollaps. Die Arbeit wird als diejenige Arbeit bezeichnet, die die Theorie der schwarzen Löcher begründet hat, wenn auch der Begriff 'schwarzes Loch' erst später eingeführt wurde. Für den Wissenschaftshistoriker mag es interessant sein, dass sich niemand genauer mit dieser vielzitierten Arbeit beschäftigt hat.

Eine sorgfältige Analyse des OS-Modells zeigt jedoch einige Inkonsistenzen auf. Der kollabierende Stern besteht aus inkohärentem Staub ohne inneren Druck und kollabiert im freiem Fall. Vor dem Kollaps war er unendlich gross und füllte ein unendlich grosses Universum vollständig aus. Während des Kollapses wächst seine Massendichte. Er schrumpft aber nach endlicher Zeit zu einem singulären Punkt mit unendlich hoher Massendichte und unendlich hoher Raumkrümmung.

Wenn die Oberfläche des Sterns den Ereignishorizont passiert, kann gemäss OS kein Licht mehr von diesem Stern weg, er wird schwarz. Mitra [36] hat gezeigt, dass OS bei der Berechnung dieses Effekts sich nicht nur um den Faktor $1/4$ verrechnet haben, sondern auch die relevante Grösse das falsche Vorzeichen hat. Neben den eben beschriebenen Unzulänglichkeiten tritt jedoch noch ein weiteres Defizit zu Tage: An der Anschlussstelle stimmt die innere mit der äusseren Lösung nicht überein. Die innere Lösung der einsteinschen Feldgleichungen, die den Stern selbst beschreibt, muss an die äussere Lösung, die das umgebende Gravitationsfeld beschreibt, angepasst sein. Die Flächen der beiden Lösungen müssen sich berühren und gemeinsame Tangenten haben, d.h. die Metriken und deren erste Ableitungen müssen an der Grenzfläche der beiden Geometrien übereinstimmen. Die erste Bedingung ist bei OS erfüllt, die zweite nicht, wie schon Nariai [37-39] festgestellt hat. Der Sachverhalt ist in Fig. 13 illustriert.



Fig. 13. Die Anschlussstelle der Geometrien

Aus dem Vorhergesagten erhellt, dass das OS-Modell einen Kollaps nicht beschreiben kann und zur Erklärung eines schwarzen Loches nicht geeignet ist.

Ein weiteres Modell stammt von McVittie [40]. Es wurde später von Weinberg wiederentdeckt und in seinem Lehrbuch [41] beschrieben. Diesem Modell liegen zwei Geschwindigkeitsdefinitionen zu Grunde. Diese Geschwindigkeiten kombinieren nicht nach dem einsteinschen Additionsgesetz der Geschwindigkeiten. An der Oberfläche des Sterns gilt für die Kollapsgeschwindigkeit der Ausdruck

$$(2.5) \quad v_{\text{col}} = -\frac{\sqrt{\frac{2M}{r_g} - \frac{2M}{r'_g}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r'_g}}}.$$

Das gibt einen Geschwindigkeitsverlauf, wie wir ihn aus Fig. 9 kennen. Beide Autoren verlangen, dass sich ihre kollabierenden Lösungen an das äussere Schwarzschildfeld anschliessen, haben aber Schwierigkeiten das korrekt auszuführen. Wiederum kann die Oberfläche des Sterns den Ereignishorizont passieren und sein Schicksal endet in einer Singularität.

Neben diesen klassischen Modellen gibt es zahlreiche Ansätze für einen Kollaps, von denen die meisten keine strengen Lösungen der einsteinschen Feldgleichungen sind. Will man nämlich auch den Druck im Inneren des Sterns berücksichtigen, hat man eine Variable mehr, aber nicht genug Gleichungen um diese zu bestimmen. Wenn auch das Modell nicht voll bestimmbar ist, so ist man schon zufrieden, wenn man wenigstens über den Verlauf des Kollapses Aussagen machen kann. Auch hat man Anpassungen mit Computertechniken versucht.

Allen diesen Ansätzen ist gemein, dass durch Lösen der einsteinschen Feldgleichungen eine 'kollabierende Metrik' gefunden werden soll. Jedoch ist gerade diese Strategie schuld daran, dass kein befriedigendes Ergebnis erzielt werden konnte. Eine kollabierende Metrik zu suchen, heisst nach einer Linie auf einer Fläche zu suchen, dessen Element nicht nur die Eigenschaften der Fläche selbst, sondern auch deren Änderung beschreibt.

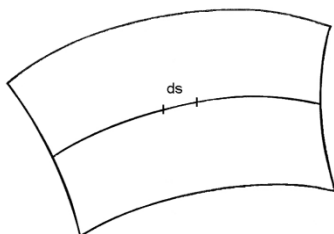


Fig. 14. Die 'kollabierende Fläche'

Der logische Gehalt dieses Vorhabens erinnert an die Erzählung von dem Baron Münchhausen, der sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zieht.

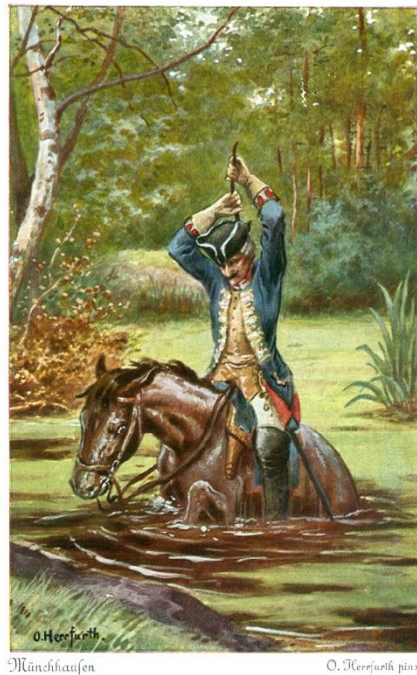


Fig. 15. Baron Münchhausen

Wenn man ein Modell für einen Sternenkollaps erfolgreich aufstellen will, wird man sich von dem Gedanken trennen müssen, als Lösung der einsteinschen Feldgleichungen eine Metrik zu erhalten, die alle geometrischen Eigenschaften beinhaltet, die diesen Kollaps beschreiben. Weiters taucht die Frage auf, warum versucht wurde, die äussere Schwarzschild-Lösung durch neue Modelle zu ergänzen und warum nie versucht wurde die innere Schwarzschild-Lösung so zu erweitern, dass sie einen Kollaps zulässt. Wir [42] haben letzteren Ansatz erfolgreich versucht.

4. Die innere Schwarzschild-Lösung und der Kollaps

Wir gehen vom Linienelement der statischen inneren Schwarzschild-Lösung

$$(3.1) \quad ds^2 = \mathcal{R}^2 d\eta^2 + \mathcal{R}^2 \sin^2 \eta d\vartheta^2 + \mathcal{R}^2 \sin^2 \eta \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + [3\mathcal{R} \cos \eta_g - \mathcal{R} \cos \eta]^2 d\psi^2$$

aus. Der Raumteil der Metrik beschreibt das Linienelement einer 3-dimensionalen Kugelhaube auf einer Hyperkugel mit dem Radius \mathcal{R} . Letzterer ist so gewählt, dass diese Fläche mit dem Flamm'schen Paraboloid gemeinsame Tangenten (Wendetangenten) hat. Im Zeitteil der Metrik ist $\mathcal{R} d\psi = idt$ der geometrische Ausdruck für die Zeit. Will man aus dem statischen Modell ein kollabierendes Modell herleiten, muss man den Radius der Hyperkugel zeitabhängig ansetzen

$$(3.2) \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}(t).$$

Kollabiert der Stern, schrumpft die Hyperkugel, d.h. sie gleitet das Flamm'sche Paraboloid herab und ihr Radius verringert sich.

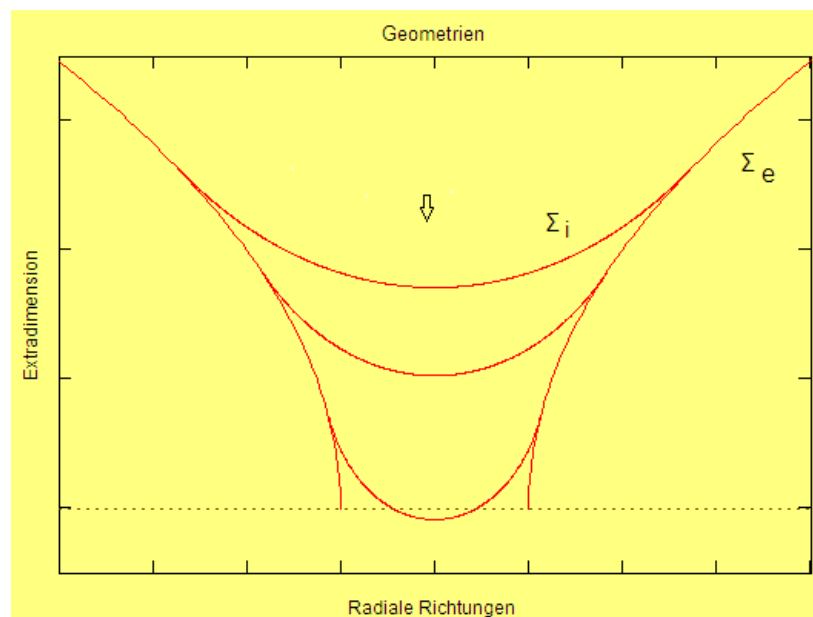


Fig. 16. Die kollabierende innere Lösung

Man erkennt aus der Zeichnung, dass keine kollabierende Fläche vorhanden ist, sondern ein Satz von Flächen, die jeweils Momentaufnahmen der statischen inneren Lösung sind, Momentaufnahmen, die den Kollaps nicht beschreiben können. Demnach gibt es auch kein Koordinatensystem, das eine kollabierende Fläche bedeckt und sich mit dieser mitbewegt. Der Stern ist von dem äusseren Schwarzschildfeld umgeben, das geometrisch mit dem Flamm'schen Paraboloid dargestellt wird. Letzteres bleibt während des Kollapses unverändert. Das entspricht dem Birkhoff'schen Satz: Der Kollaps hat keinen Einfluss auf das äussere Feld. Das Flamm'sche Paraboloid legt jedoch den Verlauf des Kollapses fest. Die Kugelhaube gleitet das Flamm'sche Paraboloid hinunter, ihr Krümmungsradius ist immer halb so lang wie der Krümmungsradius der Schwarzschildparabel an der Grenzfläche und so zu jedem Zeitpunkt bestimmt. Hier zeigt sich deutlich, dass die Art, wie sich die innere Geometrie zu verhalten hat, nicht eine Eigenschaft dieser ist, sondern ihr von der äusseren Geometrie mitgeteilt wird. Zu jeder Zeit des Kollapses legt die äussere Geometrie die Krümmung der inneren Geometrie fest. Modelle, die die Eigenschaften des Kollapses in ihrer eigenen Metrik implementieren wollen, werden wenig erfolgreich sein. Es erhebt sich auch die Frage, warum nach neuen Lösungen gesucht wird, wo doch innere und äussere Schwarzschildlösung eine Einheit bilden und auch durch einen gemeinsamen mathematischen Kalkül dargestellt werden können [43].

Der Spannungs-Energie-Impuls-Tensor der inneren Lösung ist einfach aufgebaut

$$(3.3) \quad T_{mn} = \begin{pmatrix} -p & & & \\ & -p & & \\ & & -p & \\ & & & \mu_0 \end{pmatrix}.$$

Das stellare Objekt wird näherungsweise durch eine homogene Flüssigkeitskugel dargestellt. Die Massendichte

$$(3.4) \quad \kappa\mu_0 = \frac{3}{R^2}$$

vergrössert sich, wenn der Radius der Kugelhaube und somit das Volumen des Sterns schrumpft. Der Druck

$$(3.5) \quad \kappa p = -\frac{3}{R^2} \frac{\cos \eta_g - \cos \eta}{3 \cos \eta_g - \cos \eta}$$

ist negativ. η ist der Polarwinkel zur Kugelhaube im Einbettungsraum. η' ist der Polarwinkel an der Grenzfläche, somit der Öffnungswinkel der Kugelhaube. Man erkennt sofort, dass der Druck an der Grenzfläche erwartungsgemäss null ist, nach innen aber ansteigt. Im Mittelpunkt des Sterns ($\eta = 0$) gilt

$$(3.6) \quad \kappa p_c = \frac{3}{R^2} \frac{1 - \cos \eta_g}{3 \cos \eta_g - 1}.$$

Für $3 \cos \eta_g = 1$ wird der Druck im Mittelpunkt des Sterns unendlich. Rechnet man den Grenzwinkel auf die Grenzposition r_g um, erhält man als Parameter für die Minimalgrösse eines Sterns mit der Masse M

$$(3.7) \quad r_H = 2.25M,$$

einen Wert, der über dem des Ereignishorizonts der äusseren Lösung ($r = 2M$) liegt. Im Rahmen der Schwarzschildtheorie kann ein Stern nicht beliebig klein sein. Sein Volumen überdeckt immer den hypothetischen Ereignishorizont. Alle Überlegungen, was an diesem geschehen könnte und was er mathematisch bedeutet, sind daher überflüssig. Wir nennen r_H den *Druckhorizont* des Sterns.

Wenn man weiters eine Röhre durch den Mittelpunkt des Sterns bohrt und einen Körper durch den Stern fallen lässt, so tritt dieser auf der gegenüberliegenden Seite wieder aus, fällt zurück und pendelt hin und her. Ist der Stern hinreichend klein, so erreicht der Körper beim Durchlaufen des Mittelpunktes die Lichtgeschwindigkeit [43]. Es gibt somit einen *Geschwindigkeitshorizont*, der mit dem Druckhorizont identisch ist. Damit ist auch festgestellt, dass in einer Theorie des Sternenkollapses, die auf der inneren Schwarzschild-Lösung aufbaut, stellare Objekte nur bis auf eine Minimalgrösse kollabieren können. Jene ist durch den *inneren Horizont* festgelegt. Dies hat zur Folge, dass im Rahmen der vollständigen Schwarzschildtheorie der Begriff 'schwarzes Loch' keine Existenzberechtigung hat. Dass dies auch so ist, wollen wir im Folgenden zeigen.

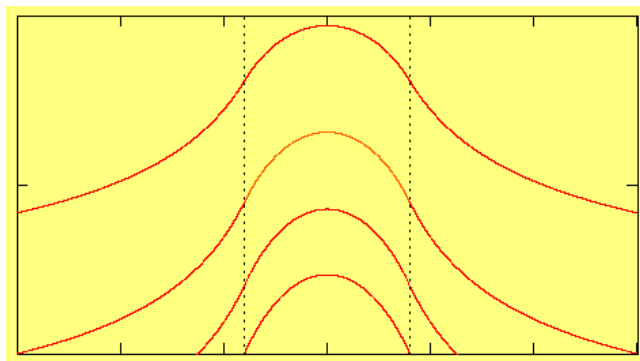


Fig. 17. Der Geschwindigkeitshorizont

Wir notieren eine vom statischen Modell bekannte Beziehung und ergänzen diese durch eine analoge für das mitbewegte System:

$$(3.8) \quad \frac{1}{r} r_{|1} = \frac{a_R}{r}, \quad r_{|4} = 0, \quad \frac{1}{r'} r'_{|1'} = \frac{a_I}{r}, \quad r'_{|4'} = 0.$$

Die Hilfsvariable r' mit dem Wertebereich $[0, \dots, r'_g]$ wird in der Literatur als mitbewegte radiale Koordinate bezeichnet. r'_g ist der Wert von r' an der Oberfläche des Sterns. Wir machen aber von dieser Interpretation keinen Gebrauch, da wir für das kollabierende Modell kein Koordinatensystem verwenden, bzw. verwenden können. Das haben wir weiter oben ausführlich begründet.

Es gelten noch folgende Relationen:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} a_R^2 &= 1 - \frac{r^2}{R^2}, & v_R &= -\frac{r}{R}, & R &= \sqrt{\frac{r_g^3}{2M}} \\ a_I^2 &= 1 - \frac{r'^2}{R_0^2}, & v_I &= -\frac{r'}{R_0}, & R_0 &= \sqrt{\frac{r_g'^3}{2M}} \end{aligned}$$

Zu Beginn des Kollapses ist $r_g = r_g'$ und $R = R_0$. Weiters verlangen wir, dass die beiden in (3.9) definierten Geschwindigkeiten nach dem einsteinschen Additionsgesetz der Geschwindigkeiten zur Kollapseschwindigkeit zusammengesetzt werden

$$(3.10) \quad v_C = \frac{v_R - v_I}{1 - v_R v_I}.$$

Damit haben wir zusammen mit (3.2) das kollabierende Schwarzschildmodell aufgestellt. Es muss nur gezeigt werden, dass mit diesem Ansatz die Feldgleichungen sowohl für das mitbewegte als auch für das nicht mitbewegte Beobachtersystem erfüllt sind. Des Weiteren soll der Erhaltungssatz mit den jetzt zeitabhängigen Grössen p und μ_0 erfüllt sein. Auf diese Details gehen wir hier nicht ein, sondern bemerken nur, dass die einsteinschen Feldgleichungen

$$\begin{aligned} R_{mn} &= - \left[U_{||s}^s + U^s U_s \right] h_{mn} \\ &\quad - \left[B_{n||m} + B_n B_m \right] - b_n b_m \left[B_{||s}^s + B^s B_s \right] \\ &\quad - \left[C_{n||m} + C_n C_m \right] - c_n c_m \left[C_{||s}^s + C^s C_s \right] \\ -\frac{1}{2}R &= \left[U_{||s}^s + U^s U_s \right] + \left[B_{||s}^s + B^s B_s \right] + \left[C_{||s}^s + C^s C_s \right] \end{aligned}$$

im mitbewegten System die selbe Form haben wie im statischen System, die Feldgrössen jedoch zeitabhängig sind und eine vierte zeitabhängige Komponente haben. Des Weiteren tritt gegenüber dem statischen Modell eine neue Grösse

$$(3.11) \quad F_m = \frac{1}{R} R_{|m} \rightarrow E_m^{\text{kol}}$$

auf, die den Verlauf des Kollapses beschreibt. Im nicht mitbewegten System ist die Auswirkung des Kollapses am einfachsten zu erkennen. Die gesamte Anziehungskraft setzt sich zusammen aus der Schwerebeschleunigung, die bereits im statischen Modell vorkommt, und einer zusätzlichen Beschleunigung, die dem Kollaps entspringt und die Grösse (3.11) beinhaltet

$$(3.12) \quad E_m^{\text{tot}} = E_m^{\text{grav}} + E_m^{\text{kol}}.$$

Trotz des komplizierten formalen Aufbaus sind die Ergebnisse recht einfach und gut verständlich.

Die wichtigste Eigenschaft des Modells gewinnt man aus der Integration der Kollapseschwindigkeit. Der Stern schrumpft in der radialen Richtung mit

$$v_C = \frac{dx^1}{dT}, \quad dx^1 = \alpha_R dr, \quad \frac{dT}{dT'} = \alpha_C.$$

Somit hat man unter Anwendung einer Lorentzbeziehung

$$\frac{\alpha_R dr}{dT'} = \alpha_C v_C = \alpha_R \alpha_I (v_R - v_I)$$

und

$$(3.13) \quad dT' = \frac{1}{\alpha_I (v_R - v_I)} dr.$$

Da die Größen α_I und v_I an der Oberfläche des Sterns ($r = r_g, r'_g = \text{const.}$) konstant sind, lässt sich der Ausdruck im Intervall $[r_H, r'_g]$ einfach integrieren. Das Ergebnis ist in Fig. 18 aufgetragen.

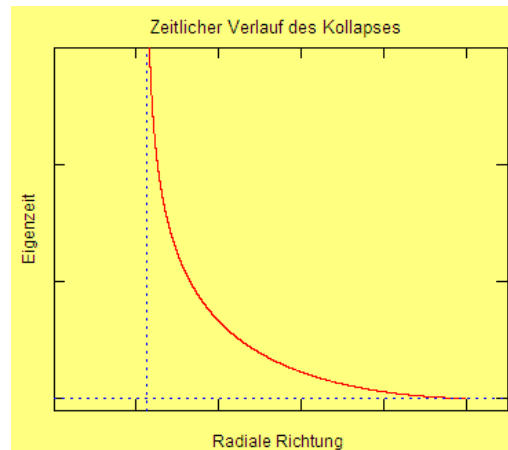


Fig.18. Der zeitliche Verlauf des Kollapses

Das Ergebnis bestätigt unsere Erwartungen. Die Oberfläche des Sterns schrumpft, kann aber den inneren Horizont (strichlierte Linie) nur asymptotisch, d.h. nur nach unendlich langer Zeit erreichen. Das vollständige Schwarzschildmodell lässt keine schwarzen Löcher zu. Beim Kollaps entsteht ein ECO (Eternally Collapsing Object). Die Existenz eines solchen stellaren Objekts wurde von dem indischen Physiker Mitra [44] auf Grund astrophysikalischer Überlegungen vorhergesagt. Ist der Stern einmal nahe an den inneren Horizont kollabiert, unterscheidet er sich in seinen äusseren Eigenschaften kaum von dem, was man einem hypothetischen schwarzen Loch zuschreibt. Das hätte man aber bereits beim Studium der Schwarzschild'schen Arbeiten 1916 erkennen können und nicht erst 100 Jahre später, im jetzigen Jahr 2016.

Wir fassen die Eigenschaften der *vollständigen Schwarzschildlösung* zusammen:

- Ein stellares Objekt mit den beiden Parametern p und μ_0 hat ein äusseres Feld, das durch die äussere Schwarzschild-Lösung beschrieben wird, sein Inneres durch die innere Schwarzschild-Lösung.
- Die Schwerkraft im Inneren ist überall regulär, im Zentrum des Sterns ist sie null.
- Die innere Lösung überdeckt immer den Ereignishorizont der äusseren Lösung, sodass der Ereignishorizont nie zutage tritt. Somit entfallen alle Überlegungen, die auf eine exotische Situation an dieser Stelle hinweisen.
- Im Besonderen werden alle Versuche, das Modell durch eine neue Koordinatenwahl unter den Ereignishorizont auszudehnen oder eine Bewegung in diesen Bereich zuzulassen, durch die Struktur des Modells ausgeschlossen.
- Sterne können zu einem ultraschweren Objekt kollabieren. Sie können nie zu einer Punkt singularität mit unendlich hoher Raumkrümmung und Massendichte schrumpfen.

Bei dem vollständigen Schwarzschildmodell treten keine unangenehmen Besonderheiten auf. Es erfüllt alle Voraussetzungen, die man sich von einer Feldtheorie wünscht.

Das ist eben Schwarzschild!

Literatur

- [1] Einstein A., Rosen N., *The particle problem in the general theory of relativity*. Phys. Rev. **48**, 73, 1935.
- [2] Finkelstein D., *Past future asymmetry of the gravitational field of a point particle*. Phys. Rev. **110**, 965, 1958.
- [3] Eddington A. S., *A comparison with Whitehead's and Einstein's formulas*. Nature **113**, 192, 1924.
- [4] Kruskal M. D., *Maximal extension of the Schwarzschild metric*. Phys. Rev. **119**, 1743, 1960.
- [5] Gautreau R., *Alternative views to black holes*. Report New Jersey Institute of Technology 1980.
- [6] Gautreau R., *On Kruskal-Novikov co-ordinate systems*. Nuov. Cim. 56 B, 49, 1980
- [7] Gautreau R., *On the light cone inside the Schwarzschild radius*. Report\: New Jersey Inst. Of Tech.
- [8] Gautreau R., Hoffmann R. B., *The Schwarzschild radial coordinate as a measure of proper distance*. Phys. Rev. D **17**, 2552, 1978".
- [9] De Sabbata V., Pavšič M., Recami E., *Black holes and tachyons*. Lett. Nuovo Cim. **19**, 441, 1977.
- [10] De Sabbata V., *Black holes and motion of test particles*. Tachyons, Monopoles and Rel. Topics 1978.
- [11] Janis A. I., *Note on motion in the Schwarzschild field*. Phys. Rev. **D 8**, 2366, 1973.
- [12] Cavalleri G., Spinelli G., *Note on the motion in Schwarzschild field*. Phys. Rev. **D 15**, 3065, 1977.
- [13] Cavalleri G., Spinelli G., *Motion of particles entering a Schwarzschild field*. Lett. Nuovo Cim. **6**, 5, 197.
- [14] Janis A. I., *Motion in the Schwarzschild field. A reply*. Phys. Rev. D **15**, 3068, 1977.
- [15] Jaffe J., Shapiro I. I., *Comment on the definition of particle velocity in a Schwarzschild field*. Phys. Rev. **D 8**, 4642, 1973.
- [16] Jaffe J., *The escape of light from within a massive object*. Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **149**, 395, 197.
- [17] Jaffe J., Shapiro I. I., *Lightlike behavior of particles in a Schwarzschild field*. Phys. Rev. **D 6**, 405, 1972.
- [18] Jaffe J., *Collapsing objects and the backward emission of the light*. Ann. Phys. **55**, 374, 1969.
- [19] McGruder III C. H., *Gravitational repulsion in the Schwarzschild field*. Phys. Rev. **D 25**, 3191, 1982.
- [20] Baierlein R., *Comment on the Jaffe-Shapiro definition of velocity*. Phys. Rev. **D 8**, 4639, 1973.
- [21] Tereno I., *Velocity at the Schwarzschild horizon revisited*. astro-ph/9905144.
- [21] Mitra A., *Comment on 'Velocity at the Schwarzschild horizon revisited' by I. Tereno*. Astro-ph/9905175.
- [22] Mitra A., *Kruskal coordinates and mass of Schwarzschild Black Holes*. astro-ph/9904162.

- [23] Tereno I., *Another view on the velocity at the Schwarzschild horizon*. astro-ph/9905298.
- [23] Mitra A., *Comments on 'Another view on the velocity at the Schwarzschild horizon'*, astro-ph/9905329.
- [24] Mitra A., *Kruskal dynamics for radial coordinates. I*. gr-qc/9909062.
- [25] Shapiro S. L., Teukolsky S. A., *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. Wiley, New York 1983.
- [26] Crawford P., Tereno I., *General observers and velocity measurements in General Relativity*. gr-qc/0111073.
- [27] Krori K. D., Paul, B. B., *Light-like motions of particles in gravitational fields*. J. Phys. **A 10**, 1887, 1977.
- [28] Lynden-Bell D., Katz J., *Geometric extension through Schwarzschild $r = 0$* . Mon. Not. Roy. Astr. Soc. **247**, 651, 1999.
- [29] Salzmänn F., Salzmänn G., *Acceleration of material particles to the speed of light in general relativity*. Lett. Nuovo Cim. **1**, 859, 1969.
- [30] Logunov A. A., Mestverishvili M. A., Kiselev V. V., *Black holes: a prediction of theory or phantasy?* Gr-qc/041205.
- [31] Loinger A., *The black holes are fictive objects*. Preprint 2004.
- [32] De Sabbata V., Shah K. T., *Is there any gravitational field outside a black hole?* Nuovo Cim. **23**, 409, 1978.
- [33] Royzen I. I., *QUC against black holes?* Gr-qc/0906.1929.
- [34] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., *Gravitation*. San Francisco 1973.
- [35] Oppenheimer J. R., Snyder H., *On continued gravitational contraction*. Phys. Rev. **56**, 455, 1939.
- [36] Mitra A., *The fallacy of Oppenheimer-Snyder collapse: No general relativistic collapse at all, no black hole, no physical singularity*. Astrophys. Sp. Sci. **332**, 432010,
- [37] Nariai H., *On the boundary conditions in general relativity*. Prog. Theor. Phys. **34**, 173, 1965
- [38] Nariai, H., Tomita, K., *On the problem of gravitational collapse*. (1965) Prog. Theor. Phys. **34**, 155-172.
- [39] Nariai H., Tomita K., *On the applicability of a dust-like model to a collapsing or anti-collapsing star at high temperature*. Prog. Theor. Phys. **35**, 777, 1966.
- [40] McVittie G. C., *Gravitational collapse to a small volume*. Astrophys. J. **140**, 401, 1964.
- [41] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology*. John Wiley & Sons, New York 1972.
- [42] Burghardt R., *Collapsing Schwarzschild Interior Solution*. Journal of Modern Physics, **06**, 1895-1907, 2015, <<http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2015.613195>>
- [43] Burghardt R., *Raumkrümmung*. <http://arg.bboxes.at/Mono/Mono.pdf>
Burghardt R., *Spacetime curvature*. <http://arg.bboxes.at/EMono/EMono.pdf>
- [44] Mitra A., *Black holes or eternally collapsing objects: A revue of 90 years of misconception*. Foc. of Black Hole research.

Adresse des Verfassers:

Prof.Dr. Rainer Burghardt: arg@aon.at