Leibniz Online, Nr. 25 (2017)
Zeitschrift der Leibniz-Sozietät e. V.
ISSN 1863-3285

Werner Krause (MLS)

Entropiereduktion im Denken[1]

Veröffentlicht: 05.01.2017

Niemand kann Forschung allein betreiben. Ich möchte zuerst an Bärbel Schack erinnern.

Bärbel Schack, 1950 - 2003

Ohne die von ihr entwickelte adaptive EEG-Kohärenzanalyse wäre die Entropieberechnung im Denken nicht möglich gewesen. Sie ist auf einer Dienstreise 2003 in den USA tödlich verunglückt. Dem Ruf auf einen Lehrstuhl für Medizinische Informatik an der TU Ilmenau konnte sie nicht mehr folgen.

Gundula Seidel (heute Moritzklinik in Bad Klosterlausnitz) hat ihre Dissertation auf diesem Gebiet angefertigt und ein Buch „Ordnung und Multimodalität im Denken mathematisch Hochbegabter: sequentielle und topologische Eigenschaften kognitiver Mikrozustände “ dazu publiziert. Frank Heinrich (heute Lehrstuhl für Mathematikdidaktik an der TU Braunschweig) hat die Mathematikaufgaben entwickelt und die Modalitätshypothese von mathematischer Seite mit unterstützt.

Zahlreiche Studenten haben mitgearbeitet. Stellvertretend möchte ich Nicole Kotkamp, Heiko Tietze und Sven Oelsner nennen.

In dem Bestreben um eine Quantifizierung menschlicher Informationsverarbeitung wussten wir uns einig mit Erdmute Sommerfeld (damals Universität Leipzig), Gert Lüer (Göttingen), Jürgen Bredenkamp (Bonn), Dietrich Dörner (Bamberg) und Rudolf Groner (Bern).

Es ist zu zeigen:
Durch Berechnung der Entropiereduktion lässt sich Ordnungsbildung im Denken quantifizieren.

[1] Erweiterte Fassung des Vortrages im Plenum der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin am 8.12.2016

Der Vortrag ist wie folgt gegliedert:

1. Denken, Entropie
2. Verkettung von Elementen
    2.1 Maß
    2.2 Elemente der Kette
3. Verkettung von Elementen in der neurowissenschaftlichen Ebene
    3.1 Beispiel: Entropiereduktion und „Verfügbarkeit“
    3.2 Beispiel: Entropiereduktion und „Überlagerung“
4. Zusammenfassung und Ausblick

1. Denken, Entropie

Die Messung einer Größe verlangt eine Definitionsgleichung und eine Einheitengleichung. Erst dann ist ein deduktives Vorgehen möglich. Eine solche Vorgehensweise verbietet sich mangels einer Theorie. Stattdessen müssen wir empirisch vorgehen. Dazu einige Sätze zu den Begriffen „Denken“ und „Entropie“.

D e n k e n : Dazu sei mir ein kurzer historischer Rückblick erlaubt. Wie Helga und Lothar Sprung (2010) in ihrem Buch „Eine kurze Geschichte der Psychologie und ihrer Methoden“ beleuchten, ist seit zweieinhalbtausend Jahren Denken mit der formalen Logik gleichgesetzt worden, aber in den vergangenen 100 Jahren mehrten sich die Arbeiten, die auswiesen, dass der Mensch beim Denken anders vorgeht als von der formalen Logik beschrieben (z.B. Revlin und Mayer, 1978). Erdmute Sommerfeld hat in unserem Vortrag vor der Klasse Sozial- und Geisteswissenschaften dies an Beispielen belegt. Bodo Krause hat es für Lern- und Denkprozesse gezeigt (Krause, 2004). Denken als Assoziation von Gedanken (Bühler, 1927) ist selbst erklärungsbedürftig. Daraus entstand die Forderung: Denken kann nur dann untersucht werden, wenn Denkprozesse in Handlungsabläufe (also extern beobachtbar) als Transformation von Zuständen abgebildet werden können (Mesarovic, 1964; Newell, Shaw und Simon, 1965; Sydow, 1970; u.v.a.). Der Gedanke, Denken als Abfolge kognitiver Operationen (also intern ablaufend) zu behandeln, wurde bereits von Selz (1911, 1912) geäußert und findet sich in der Idee einer mentalen Grammatik (Klix, 1992) wieder, durch die gleichsam die Abfolge kognitiver Operationen gesteuert wird. Hier lässt sich auch die Auffassung einordnen, Problemlösen könnte als Aktivation kognitiver Operationen (bzw. Strategien) und anschließende Inhibition aller bis auf eine kognitive Operation betrachtet werden. Denken als Beseitigung von Chaos aufzufassen, fand ich in dem Buch „Das Spiel“ von Manfred Eigen und Ruthild Winkler (1975).

Allen Auffassungen gemeinsam ist der Gedanke einer *Sequenz*. Wir betrachten hier *Denken als Ordnungsbildung*.

Auch lässt sich – mit der gleichen Unschärfe – diesem „Längsschnitt“ ein „Querschnitt“ beiordnen: welche Anforderungen lassen sich unter diesem Begriff „Denken“ subsumieren? Im allgemeinen gehören Klassifizierungsprozesse, Inferenzprozesse sowie Problemlösungsprozesse bei Problemen mit abgeschlossenem und nicht abgeschlossenem Problemraum dazu. (Ein Problemraum umfasst die Menge aller Zustände und die Menge aller Transformationen). Wir beschränken uns hier auf zwei Anforderungen: auf Klassifizierungsanforderungen und auf Problemlösungsprozesse mit abgeschlossenem Problemraum.

E n t r o p i e : Die Messung von Ordnung – bzw. Ordnungsbildung – ist außerhalb der menschlichen Informationsverarbeitung bereits seit mehr als 160 Jahren betrieben worden. In der Physik wird – wie Manfred Eigen ausführt – Ordnung als Gegensatz zu Unordnung betrachtet. Entropie ist ein Maß für Unordnung. In der Mathematik wird Ordnung als Anordnung betrachtet.

Werner Ebeling hat in seinem Vortrag im Herbst vergangenen Jahres gezeigt, dass „bei Austausch von Information Entropie ausgetauscht“ wird. Und weiter heißt es bei Werner Ebeling: „Ohne Übertreibung: Entropie ist ein Band, das die Physik mit den Technik- und Gesellschaftswissenschaften und

unserer INFO-Welt verbindet.“ (Ebeling, 2015; siehe auch Ebeling, 2016). Lothar Kolditz (Kolditz, 2016) hat in seinem Vortrag im Juni diesen Jahres die Nützlichkeit der Entropie für den Energieaustausch herausgearbeitet. Auf beiden Vorträgen baue ich bezüglich der Definition und Geschichte der Entropie auf und möchte prüfen, ob der Boltzmann-Ansatz und der Shannon-Ansatz zur Berechnung der Entropiereduktion im Denken geeignet sind.

Betrachten wir zunächst den Boltzmann-Ansatz: Boltzmann (1872) wies als erster darauf hin, dass die Entropie ein Maß für die molekulare Unordnung ist.

Boltzmann-Ansatz: molekulare Unordnung
Elemente in Klassen

Ludwig Boltzmann, 1844 - 1906

Abb. 1: Ludwig Boltzmann, Foto aus Rainer Feistel und Werner Ebeling: Physics of Selforganization and Evolution, Wiley-VCH, p.383, Foto von Rainer Feistel, mit freundlicher Genehmigung der Autoren.

Prigogine (1985) zeigt an einem Beispiel, wie Entropie berechnet werden kann (Abbildung 2). Werner Ebeling hat in seinem Vortrag dieses Beispiel gezeigt. Fasst man diesen Prozess als Zuordnung von Elementen zu Klassen auf, dann ergeben sich Analogien: Zur Reduzierung von Unordnung in der menschlichen Informationsverarbeitung spielen Klassifizierungsprozesse eine wesentliche Rolle. Wollte man mit einem solchen Ansatz Ordnungsbildung in der menschlichen Informationsverarbeitung quantifizieren, setzt das die Kenntnis der Klassen voraus. Diese Voraussetzung ist im Denkprozess nicht erfüllt. Zusammen mit Erdmute Sommerfeld, Günther Höhne und Horst Sperlich (1989) konnte gezeigt werden, dass gebildete Klassen flüchtig sein können. Für die kurzzeitige Transformation kognitiver Strukturen bei beliebigen Anforderungen gibt es derzeit noch keine Messmethode. Wenn die unmittelbar im Denkprozess benutzten Klassen nicht bekannt sind, ist dieser Ansatz zur Berechnung der Entropiereduktion in der menschlichen Informationsverarbeitung nicht anwendbar.

b.) a.)

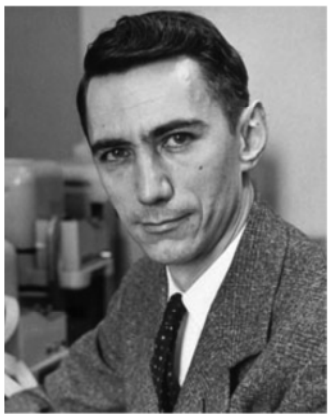
$N_1=N_2=\frac{N}{2}$ $N=N_1=12, \quad N_2=0$

$$W=\frac{N!}{N_1!\cdot N_2!} \qquad S=k\cdot \ln W$$

Abb. 2: Zwei verschiedene Verteilungen von Molekülen auf zwei Abteilungen (Klassen) nach Prigogine (1985). S ist die Entropie, k die Boltzmannkonstante, N die Anzahl von Molekülen und W die Komplexionenanzahl. Nachdem eine hinreichende Zeit vergangen ist, stellt die Verteilung b.) die wahrscheinlichste Verteilung dar, die dem thermodynamischen Gleichgewicht entspricht. (aus Prigogine, 1985, S. 34).

Vor dem Hintergrund, dass Denken als eine Sequenz von Elementen aufgefasst werden kann, betrachten wir nun den Shannon-Ansatz: Unordnung bzw. Ordnung von Elementen in einer Kette.

Shannon-Ansatz: informationelle Unordnung
Elemente in Ketten



Claude Shannon, 1916 – 2001.

Abb. 3: Claude Shannon, 1916 – 2001.

2. Verkettung von Elementen

Jeder beliebige Prozess kann durch Verkettung von Elementen dargestellt werden, wenn der Prozess diskret ist. Dabei wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die Elemente bestimmbar sind.

Die Abbildung 4 zeigt drei Buchstabenketten, die jeweils aus 6 Buchstaben A, B,..., F bestehen. Die obere Kette ist durch Würfeln (also zufällig) entstanden. Die mittlere Kette haben wir bei mathematisch Normalbegabten gemessen (Die Messung wird nachfolgend erläutert). Die untere Kette haben wir bei mathematisch Hochbegabten gemessen.

.... C F E D A E B C E F A C F D A E C F D B A E F D B C F .... gewürfelt
.... E D A B D A D E F A B D A E B E D A C A B D A D C A F C .... normalbegabt
.... B E B E B E C E B E B C B E B E B E D C D E F E B E B E .... hochbegabt

Abb. 4: Drei Buchstabenketten. Periodizitäten sind rot markiert. Erläuterungen im Text.

Unabhängig vom semantischen Hintergrund dieser Ketten gewinnt man den Eindruck, dass die untere Kette geordneter ist als die beiden oberen. Bekanntlich lässt sich Ordnung (respektive Unordnung) quantifizieren.

2.1 Das Maß

Mit dem Shannon-Ansatz lässt sich die Entropie bzw. die Entropiereduktion H_{red} wie folgt berechnen:

$$H_{red} = H - \sum_{i=1}^{N} P(i) \cdot H(i) \qquad \text{i = 1,..., N (Menge der Mikrozustände)} \qquad (1)$$

mit

$$H = -\sum_{j=1}^{N} P(j) \cdot Id(P(j)) \qquad \text{j = 1,..., N (Menge der Mikrozustände) ,} \qquad (2)$$

$$H(i) = -\sum_{j=1}^{N} P(j/i) \cdot Id(P(j/i)) \qquad \text{i = 1,...,N (Menge der Mikrozustände) .} \qquad (3)$$

H ist die Entropie, die allein durch die Auftrittswahrscheinlichkeiten p der Elemente bestimmt ist, und mit H(i) bezeichnen wir die Entropie, die durch die bedingten Wahrscheinlichkeiten p_i/p_j der Elemente bestimmt ist. Aus der Differenz ergibt sich die Entropiereduktion H_{red} (Schack, 1999; Klix, 1992) (siehe auch Ebeling, 2016).

Wie eingangs angedeutet, können Denkprozesse als Sequenz von Elementen abgebildet werden. Wenn die Annahme richtig ist, dass Ordnung respektive Unordnung, also Entropie, in der Anordnung oder besser Verkettung der Elemente zum Ausdruck kommt, dann müssen zwei Dinge genauer betrachtet werden: a) die Elemente und b) die Verkettung.

2.2 Elemente der Kette

Wir betrachten die Elemente in drei Ebenen:
- in der externen Repräsentationsebene
- in der internen Repräsentationsebene und
- in der neurowissenschaftlichen Repräsentationsebene.

Eine vierte Ebene, die Genetik bzw. Epigenetik, wird hier ausgeklammert.

Tabelle 1: Drei Ebenen mit den entsprechenden Elementen, den Eigenschaften der Elemente und den Eigenschaften der Sequenzen.

Ebene	Elemente	Eigenschaften der Elemente	Eigenschaften der Sequenzen
externe Repräsentationsebene	Teilziele	zu definierende externe Einheiten	~~messbar, wenn Einheiten definiert~~
interne Repräsentationsebene	kognitive Strukturen	zu definierende interne Einheiten	~~Sequenz z.Zt. nicht messbar~~
neurowissenschaftliche Ebene	Mikro-zustände	definierte interne Einheiten	Entropiereduktion H_{red} messbar

Zur externen Repräsentationsebene: Die Elemente können Worte (z.B. bei der Verbalisierung), Zustände (z.B. beim Turm von Hanoi), Operationen, Strategien (z.B. beim Schach) und vieles andere mehr sein, also alles das, was von außen beobachtbar ist. Übergreifend soll hier das Wort Teilziele verwendet werden. Für die Klasse der Probleme mit abgeschlossenem Problemraum wie z.B. Transportprobleme ist die Elementedefinition in Einzelfällen noch möglich, für Probleme mit nicht abgeschlossenem Problemraum, wie z.B. sogenannte Erfindungsprobleme, jedoch nicht. Ein Beispiel: Entwirf einen Betonmischer, der in zwei Sekunden Beton mischt! Was ist da ein Teilziel? Oder man denke an das Schreiben eines Gedichtes (z.B.: Hermann Hesse: „Jedem Anfang steckt ein Zauber inne...“) oder das Komponieren eines Musikstückes (z.B. an das Adagetto in Mahlers 5. Sinfonie). Die Frage nach Teilzielen erscheint uns hier fast suspekt.

Die Schwierigkeit: Für jede beliebige Anforderung müssen die Elemente in der externen Repräsentationsebene definiert werden. Wegen einer fehlenden verbindlichen Definition der Elemente für alle Anforderungen sind konsequenterweise auch die Eigenschaften einer Sequenz nicht oder nur schwierig vergleichbar. Damit sind die Entropiewerte bei unterschiedlichen Anforderungen nicht vergleichbar. Deshalb ist dieser Weg der Entropiemessung auf der externen Repräsentationsebene derzeit ausgeschlossen. Halten wir fest: die Elemente sind nicht definiert.

Zur internen Repräsentationsebene: Die Elemente könnten Begriffe, bildhaft-anschauliche Vorstellungen, kognitive Strukturen (man denke etwa an Begriffsnetze), kognitive Operationen (Aktivation, Inhibition, Verdichtung, Verkürzung usw.) sein. Wie bereits erwähnt, haben wir derzeit keine Methode, die Transformation kognitiver Strukturen während des Denkprozesses zu messen. Damit sind auch die Verkettungen nicht bestimmbar. Halten wir fest: die Elemente (kognitive Strukturen) sind in ihrer Sequenz während eines Denkprozesses nicht messbar.

Zur neurowissenschaftlichen Repräsentationsebene: Die Elemente sind die Mikrozustände, wie sie von Lehmann (1987) eingeführt und mittels EEG für jede beliebige Anforderung messbar sind. Die

Dietrich Lehmann, 1929 – 2014

Abb. 5: Dietrich Lehmann. Auf ihn gehen die Mikrozustände zurück. Mikrozustände sind zeitlich konstante Aktivationsmuster, mittels EEG für jede beliebige Anforderung messbar.

Mikrozustände sind zeitlich konstante Aktivationsmuster, hier gemessen als Kohärenz von EEG-Signalen über (hier benachbarten) Elektroden (Schack, 1997, 1999; Schack und Krause, 1995; Schack et al, 1995; Schack et al, 1999a, 1999b, 1999c). Damit eröffnet sich eine Möglichkeit, die Entropie bzw. Entropiereduktion im Denken zu messen. Mit diesem Vorteil ist aber auch ein Nachteil verbunden: Für diese neurowissenschaftliche Ebene ist das Kodierungsproblem (also die Zuordnung von Bedeutungen zu den Mikrozuständen) derzeit noch nicht gelöst.

3. Verkettung von Elementen in der neurowissenschaftlichen Ebene

Zunächst zur Erfassung der Mikrozustände: Informationsübertragung zwischen Neuronen oder neuronalen Zellverbänden im Nervennetz ist offenbar verbunden mit hoher synchroner Oszillation der elektrischen Signale, die über diesen kortikalen Arealen gemessen werden. Mit der von Grießbach eingeführten adaptiven Signalanalyse und der von Schack (Schack, 1997, 1999) eingeführten adaptiven EEG-Kohärenzanalyse konnten Schack et. al. (1999a, 1999b, 1999c) zeigen, dass zeitlich stabile Elemente auch dann in der EEG-Messung beobachtbar sind, wenn statt der Amplitude (Lehmann, 1987) die adaptive Kohärenz zur Grundlage der Signalanalyse gemacht wird. Die adaptive EEG-Kohärenzanalyse wird in unseren Untersuchungen verwendet. Aufgezeichnet wird das EEG über den klassischen (10-20 Elektrodenverteilung) Elektrodenplazierungen (Abb. 6). Daraus wird für jeweils benachbarte Elektrodenpaare die Kohärenz errechnet und ebenso als Zeitverlauf dargestellt. Zu jedem beliebigen Zeitpunkt (hier alle 4 ms) sind die Kohärenzwerte über den 30 Elektrodenpaaren abgreifbar und als Map über der Topographie des Kopfes farbig skaliert darstellbar. Aus dem Verlauf (hier nicht dargestellt, Verweis auf die unten aufgeführten Arbeiten) kann man erkennen, dass zeitlich stabile Abschnitte auftreten, wie sie Lehmann bereits durch Amplitudenmessung gefunden hat. Diese zeitlich stabilen Abschnitte nennen wir Kohärenzsegmente oder einfach nur Segmente und die Zeit Segmentdauer. Die sich nicht verändernde Kohärenz über der Topographie in bestimmten zeitlichen Abschnitten ist Ausdruck der Verarbeitung von Information, soweit Informationsverarbeitung auf die Oszillation von Signalen zurückgeführt werden kann (ausführlich in Schack (1999), Sommerfeld und Krause (2013), Krause (2016), Krause (2017)).

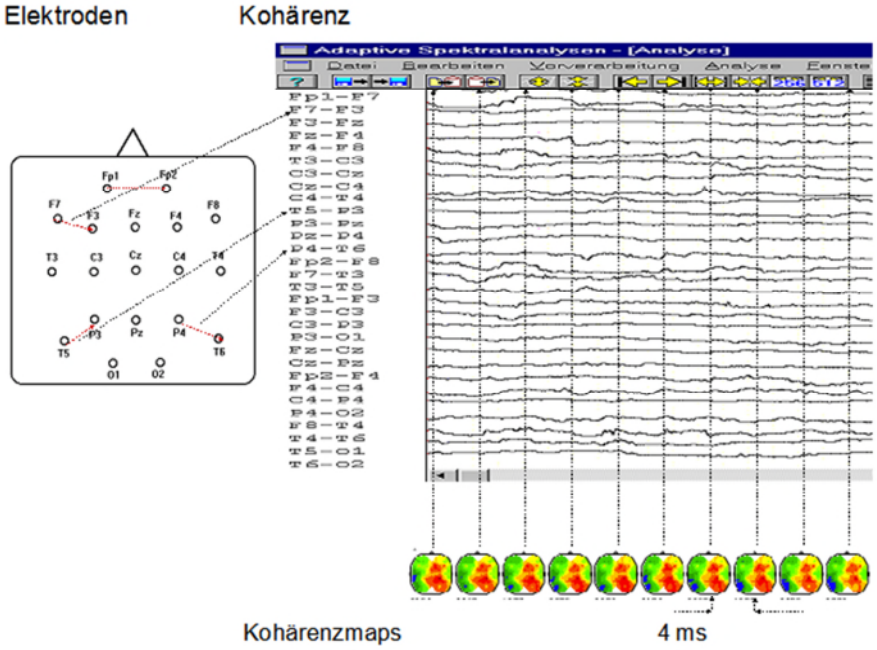


Abb. 6: EEG – Kohärenzmessung. Die Kohärenz (Synchronizität) zwischen jeweils benachbarten Elektroden ist dargestellt. Erläuterungen im Text.

Schack (1999) hat mittels Clusterung (Abb. 7) die Segmente nach ihrer topographischen Ähnlichkeit zusammengefasst und die so erhaltenen Kohärenzmaps – analog der Lehmannschen Betrachtung – als Mikrozustände bezeichnet. Die Anzahl der Mikrozustände wird während der Clusterung üblicherweise über eine „Straffunktion“ bestimmt, die möglichst geringe Werte annehmen soll. Die ausführliche Darstellung des Verfahrens findet sich in Schack (1999) sowie in Seidel (2004). Seidel (Seidel 2004, Krause, Seidel und Heinrich, 2003a,b)) hat mit dieser Auswertmethode Experimente zum mathematischen Problemlösen durchgeführt und die Anzahl notwendig zu unterscheidender Mikrozustände bestimmt. Ein Mikrozustand stellt – um das nochmals zu verdeutlichen – eine Aktivationsverteilung über dem Kopf dar, in diesem Fall gemessen mittels adaptiver EEG-Kohärenz. Nun sollte man meinen, dass die Anzahl zu unterscheidender Mikrozustände sehr groß ist, da die Komplexität des Gehirns groß ist, nicht nur wegen der Neuronenanzahl und der Anzahl seiner Verknüpfungen, sondern auch wegen seiner Architektur und Dynamik. Seidel konnte mit dieser Methode von Schack und der von Heinrich (1997) entwickelten mathematischen Problemanforderung zeigen, dass dies gerade nicht der Fall ist. Vielmehr sind es nur w e n i g e Mikrozustände, die im Experiment unterscheidbar sind. Je nach Wahl des Kriteriums der Straffunktion kann sie zwischen 6 und 10 Mikrozuständen individualspezifisch für eine Klasse von Anforderungen unterscheiden. Rein theoretisch lassen sich mit dieser Methode 300 Mikrozustände unterscheiden, wenn man von 30 Messpunkten ausgeht und jeder Messpunkt in 10 Ausprägungen variiert. *Offenbar schlägt sich die große Mannigfaltigkeit an zu verarbeitender Information nicht in einer großen Anzahl von Elementen (hier Mikrozuständen) nieder sondern in der Kombinatorik weniger Elemente. Das spricht dafür, dass sich Eigenschaften des menschlichen Informationsverarbeitungsprozesses auch in der Verkettung niederschlagen.* Die Analogie zur Sprache drängt sich auf: Es genügen 28 Buchstaben, um die große Menge an Bedeutungen in der Schriftsprache zu verarbeiten.

Durch zwei Eigenschaften sind die Mikrozustandssequenzen ausgezeichnet: durch ihre Topologie und durch ihre Verkettung.

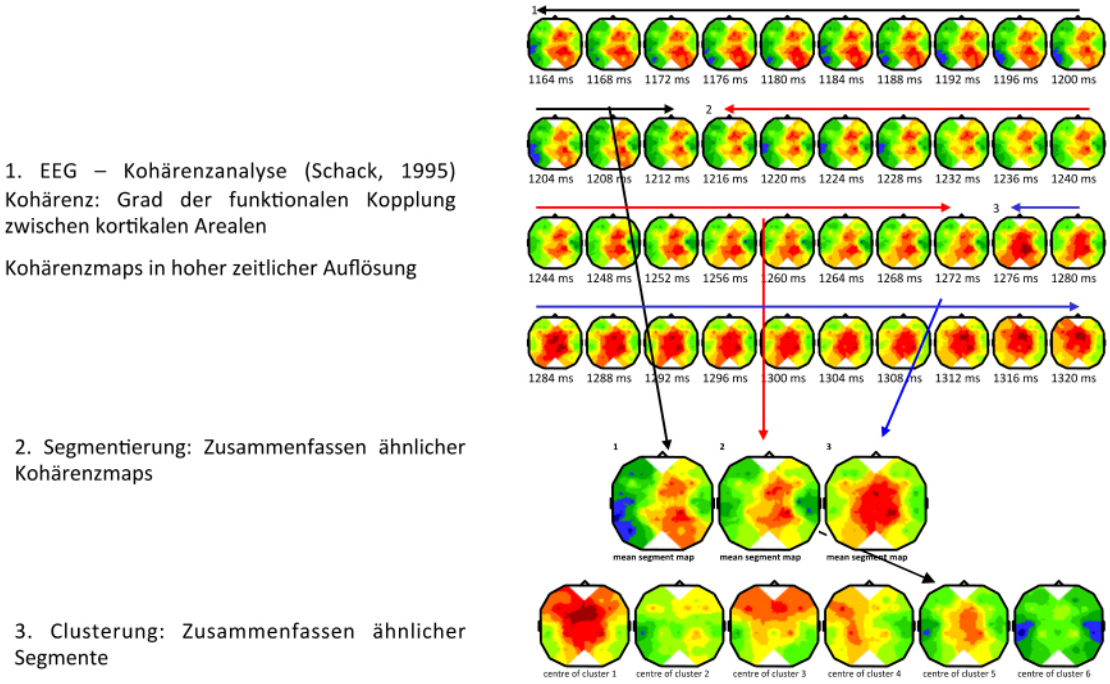


Abb. 7: Methode zur Bestimmung der Mikrozustände nach Schack (1999). Rot bedeutet hohe Kohärenz, blau niedrige Kohärenz. Die abschnittsweise zeitliche Konstanz der Kohärenzverteilung über der Topologie und eine sich anschließende plötzliche Veränderung (zwischen 1272 ms und 1276 ms) in den Kohärenzmaps ist deutlich zu erkennen.

Die Topologie (bzw. der Kodierung) haben wir hier ausgeklammert und die einzelnen Mikrozustände mit Buchstaben belegt, die nur zum Zweck der Unterscheidbarkeit eingeführt worden sind.

Wir betrachten zwei Beispiele: Entropiereduktion und „Verfügbarkeit“ sowie Entropiereduktion und „Überlagerung“.

3.1 Entropiereduktion und „Verfügbarkeit“

Klix (1992) zieht im Rahmen seiner von ihm angeleiteten Hochbegabungsuntersuchungen den Schluss: „Hochbegabte wissen, worauf es ankommt.“ Die kürzere Lösungszeit Hochbegabter gegenüber Normalbegabten beim Lösen mathematischer Probleme wird auf die Verfügbarkeit von Strategien zurückgeführt. In unseren Untersuchungen fanden wir, dass sich die Verfügbarkeit von Strategien auch in einer höheren Ordnung respektive Entropiereduktion in den Mikrozustandssequenzen niederschlägt. Wir geben hier nur eine Zusammenfassung wieder. Die Einzelheiten (Stichprobenauswahl, Schichtung der Stichproben, Versuchsdurchführung usw.) finden sich in Seidel (2004) sowie in Krause (2006). Beim Lösen mathematischer Probleme, die sowohl rechnerisch mittels Formeln als auch geometrisch durch bildhaft-anschauliche Transformationen lösbar sind, verbrauchten unsere mathematisch Hochbegabten die Hälfte der Lösungszeit (ca 1 min) der Normalbegabten (ca 2 min). Hier zwei Beispiele für solche Aufgaben (Heinrich, 1997):

- Gegeben ist ein Quadrat mit der Diagonalen d = 5 cm. Verdopple die Fläche des Quadrates. Wie lang ist die Seite des neuen Quadrates?
- Wieviele Diagonalen hat ein 23-Eck?

Einer unserer Hochbegabten z.B. löste die Aufgabe „ Wieviele Diagonalen hat ein 23-Eck ?“ in 6 Sekunden. Seine Antwort „230“ begründete er im Nachhinein mit dem Wegführen von Linien an einer Ecke, der Unterscheidung zwischen Diagonalen und Außenkanten und der Einbeziehung aller Ecken. Dieses bildhaft-anschauliche Vorgehen steht einem iterativen (rechnerischen) Vorgehen gegenüber. Man spricht deshalb auch von Zwei-Modalitätsstrategieaufgaben, weil diese Aufgaben sowohl bildhaft-anschaulich als auch rechnerisch lösbar sind. Sind beide Strategien verfügbar – und das konnte mittels topologischer EEG-Analysen bei Hochbegabten im Gegensatz zu Normalbegabten gezeigt werden (Krause, 2006) – , wird diejenige gewählt, die die kürzere Lösungszeit verspricht.

Betrachten wir zunächst im Sinn der Kasuistik Ausschnitte aus zwei Mikrozustandssequenzen von je einer mathematisch normalbegabten und einer mathematisch hochbegabten Versuchsperson beim Lösen eines mathematischen Problems innerhalb der ersten 10 Sekunden:

Mikrozustandssequenzen:

normalbegabt:

. . . . E D A B D A D E F A B D A E B E D A C A B D A D C A F C . . . .

hochbegabt:

. . . . B E B E B E C E B E B C B E B E B E D C D E F E B E B E . . . .

Die 6 Mikrozustände sind hier mit A bis F bezeichnet (Vergleiche auch Abb. 4). Nur aus Demonstrationsgründen sind für beide Personen die gleichen Bezeichnungen für die Mikrozustände gewählt worden. Wie oben beschrieben, sind die Mikrozustände individualspezifisch, wenngleich ähnlich. Phänomenologisch fallen längere Verkettungen (rot dargestellt) bei der hochbegabten Person und kürzere Verkettungen bei der normalbegabten Versuchsperson auf. Durch die Berechnung der Entropie bzw. Entropiereduktion lässt sich die Ordnungsbildung im Denken (Krause, 1991) quantifizieren.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die erhaltenen Ergebnisse bezüglich Lösungszeit und Entropiereduktion.

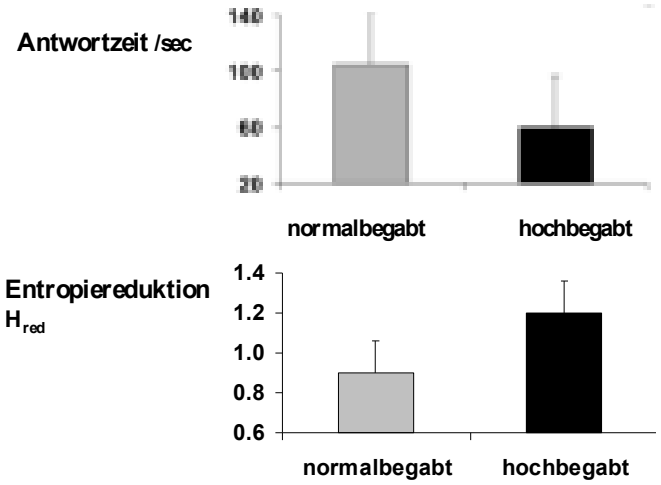


Abb. 8: Mittlere Lösungszeit und Entropiereduktion H_{red} (siehe Gleichung (1)) beim Lösen mathematischer Probleme innerhalb der ersten 10 Sekunden für mathematisch Hochbegabte und Normalbegabte nach Seidel (2004), bestimmt aus der EEG-Kohärenzanalyse nach Schack (1999). Der Unterschied ist signifikant. Das von Schack eingeführte Verfahren zur Erfassung der Mikrozustandssequenzen aus der EEG-Kohärenzanalyse findet sich in Abbildung 7 (ausführlich in Sommerfeld und Krause, 2013).

Seidel findet eine Entropiereduktion von 1,21 bei mathematisch Hochbegabten und von 0,9 bei Normalbegabten. (Die Endpunkte der Skala liegen zwischen 0 und 2,59 bei 6 Elementen.)

Offensichtlich geht die kürzere Lösungszeit Hochbegabter mit einer höheren Entropiereduktion einher. Die Verfügbarkeit von Strategien schlägt sich in einer höheren Ordnung der Mikrozustandssequenzen nieder. Beim Lösen einer einfachen Additionsaufgabe findet sich – wie erwartet – kein Unterschied zwischen den Extremgruppen.

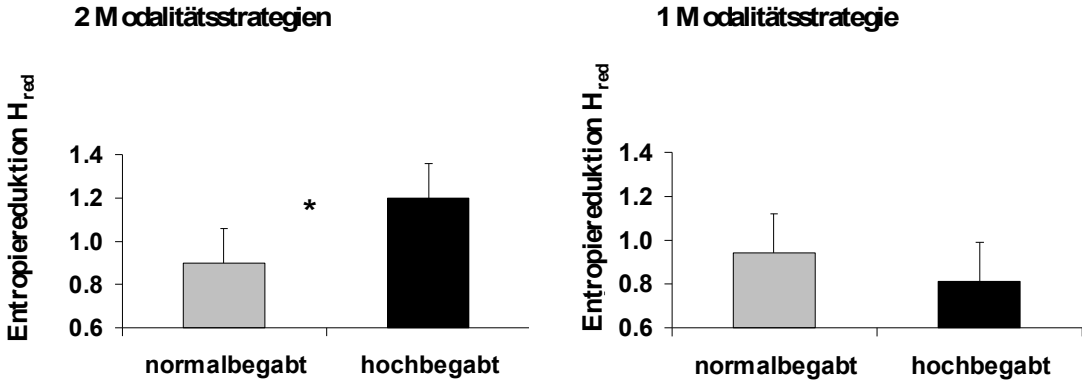


Abb. 9: Entropiereduktion H_{red} beim Lösen von Ein – und Zwei-Modalitätsstrategieaufgaben innerhalb der ersten 10 Sekunden für mathematisch Hochbegabte und Normalbegabte. Der Unterschied bei Zwei-Modalitätsstrategieaufgaben ist signifikant, bei Ein-Modalitätsstrategieaufgaben dagegen nicht. (Seidel, 2004).

Normal- und Hochbegabte haben die Strategie der Addition einstelliger Zahlen in gleicher Weise verfügbar.

Seidel (2004) hat den Prozess auch als Markoffdiagramm dargestellt.

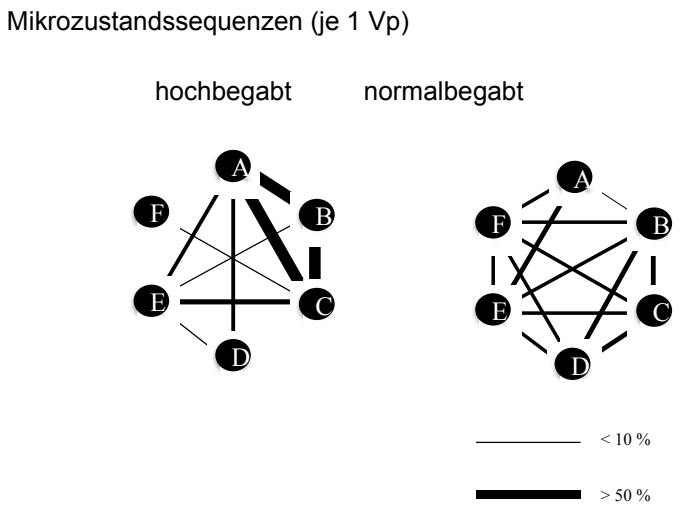


Abb. 10: Mikrozustandssequenzen (Markoffdiagramme) für einen mathematisch Normal- und einen mathematisch Hochbegabten beim Lösen mathematischer Probleme. A, B, ...,F Mikrozustände. Strichdicke Übergangshäufigkeiten. (Seidel, 2004; Krause, Seidel und Heinrich, 2003).

Das bevorzugte Auftreten von Untersequenzen bei Hochbegabten und das Vermeiden von anderen Sequenzen ist deutlich sichtbar. Wenige ausgezeichnete Mikrozustandssequenzen werden von den Hochbegabten bevorzugt, andere vernachlässigt.

Auch lässt sich für Einzelfälle eine durch Training bedingte Entropiereduktion (Oelsner, 2003) finden, wenngleich die Befunde bislang noch nicht statistisch gesichert sind.

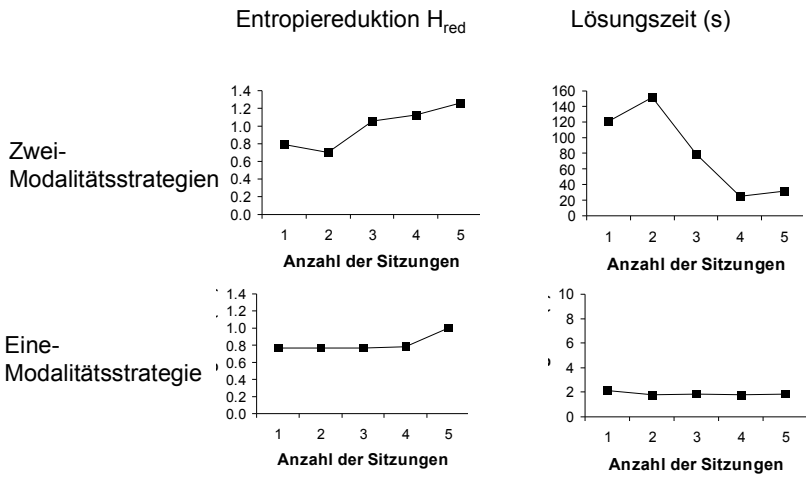


Abb. 11: Lösungszeiten und Entropiereduktion beim Training von Mathematikaufgaben. Oben: Zweimodalitätsstrategieaufgaben. Unten Einmodalitätsstrategieaufgaben. (Normalbegabte (zwei männliche und eine weibliche Versuchsperson, Alter 18,2 Jahre); 5 Trainingssitzungen a 3 Stunden in 3-Tagesabständen innerhalb von 2 Wochen.). (Oelsner, 2003).

Wie lässt sich dieser Befund der Entropiereduktion bei Verfügbarkeit von Strategien interpretieren? Sind Strategien verfügbar, müssen sie nicht erst aktiviert werden (z.B. durch Aktivation vieler und anschließende Inhibition aller bis auf eine Strategie.). Wenn kognitive Operationen in irgend einer Weise etwas mit den Mikrozuständen zu tun haben, die wir aber noch nicht kennen, dann sollte die Einsparung kognitiver Operationen auch mit einer Einsparung (oder weniger häufigeren „Anspielung“) von Mikrozuständen zu tun haben. Wenn ausgezeichnete Mikrozustände dann häufiger und andere Mikrozustände weniger häufig angespielt werden, würde sich das in einer Erhöhung der bedingten Wahrscheinlichkeiten für ausgezeichnete Zustände niederschlagen und damit zu einer höheren Ordnung respektive zu einer höheren Entropiereduktion führen. Die Einsparung kognitiver Operationen wäre dann mit einer höheren Ordnung, also einer Erhöhung der Entropiereduktion verbunden. Entsprechend müsste dann das zusätzliche Auftreten kognitiver Operationen mit einer Verringerung der Ordnung respektive der Entropiereduktion verbunden sein. Um dies genauer zu prüfen, betrachten wir ein einfacheres Beispiel.

3.2 Entropiereduktion und „Überlagerung“

Zunächst ist plausibel: Eine streng determinierte zeitliche Hintereinanderausführung von Operationen repräsentiert Ordnung. Eine Störung dieser streng determinierten Folge von Operationen führt zu Unordnung. Wenn es gelingt, eine determinierte Abfolge kognitiver Operationen zu stören, müsste sich die damit verbundene Unordnung vergrößern, also eine geringere Entropiereduktion nachweisen lassen. Wir betrachten dazu ein einfaches Klassifizierungsexperiment, bei dem die Versuchspersonen so schnell wie möglich entscheiden müssen, ob zwei Begriffe, die zeitlich nacheinander dargeboten werden, zur gleichen Kategorie gehören oder nicht. Eine eingelernte Abfolge:

Wahrnehmung des 1. Wortes,
Aktivierung eines Kategoriebegriffes,
Wahrnehmung des 2. Wortes,
Entscheidung

kann dadurch gestört werden, dass das 2. Wort bereits erscheint und perzipiert wird, obwohl die Aktivierung des Kategoriebegriffes noch nicht abgeschlossen ist. Die Zeit zwischen der Darbietung des 1. und des 2. Wortes, das Interstimulisintervall ISI wird variiert. Gemessen werden die Entschei-

dungszeit und die Entropiereduktion. Zunächst ist hinreichend untersucht, dass die Entscheidungszeit mit wachsendem ISI kleiner wird. Der Überlagerungsprozess ist beendet, wenn das Interstimulusintervall größer wird als der Zeitverbrauch für die Verarbeitung eines Operation (ca, 220 ms, hier die Aktivierung eines Kategoriebegriffes). Umgekehrt proportional zu diesem Prozess sollte die Entropiereduktion einher gehen: im Fall der Überlagerung (ISI klein) sollte die Unordnung hoch, also die Entropiereduktion klein sein. Ist dagegen die Überlagerung aufgehoben, besteht also genügend Zeit für die Ausführung der einzelnen Operationen, sollte die Unordnung klein, also die Entropiereduktion hoch sein. Wie die Abbildung 12 zeigt, ist das tatsächlich der Fall.

Es wäre schon bemerkenswert, wenn die Abfolge kognitiver Operationen mit der Abfolge der Mikrozustände in irgend einem Zusammenhang stünden. Aber bis dahin ist es noch ein weiter Weg.

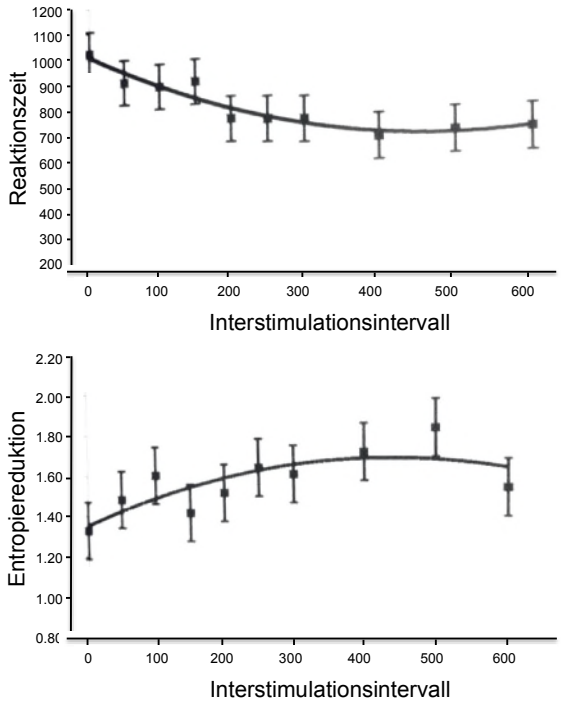


Abb. 12: Reaktionszeiten (ms) und Entropiereduktion als Funktion des Interstimulusintervalls (ms) bei Kategorisierungsanforderungen. (Daten von Kotkamp, 1998). Erläuterungen im Text.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Die Verarbeitung von Information beim Menschen wird als Markoffkette von Mikrozuständen dargestellt. Jeder kognitive Prozess ist als Mikrozustandssequenz abbildbar.
Aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten in den Mikrozustandssequenzen wird die Entropiereduktion berechnet.
Es erhärtet sich die Hypothese, dass sich mit der Entropiereduktion Ordnungsbildung im Denken quantifizieren lässt.

Soweit so gut. Aber:
Eigentlich benötigen wir das Entropiemaß nicht. Es genügt die Auflistung der bedingten Wahrscheinlichkeiten der Mikrozustände in einer Tabelle oder die Darstellung als Verteilung. Aber die Zusammenfassung in einer Zahl ist natürlich von Vorteil. Und dennoch kommen Zweifel auf, geistige Leistungen (allein) auf Änderungen von bedingten Wahrscheinlichkeiten in den Mikrozustandssequenzen

abbilden zu wollen. Der Rückgriff auf die „Urdaten“ macht deutlich, dass wir es hier mit einer Transformation der Mikrozustände M_i in M_j zu tun haben

$$M_i \rightarrow M_j \qquad (4)$$

und man könnte eine Größe R_{ij} postulieren, die diese Transformation bewirkt.

$$R_{ij}: M_i \rightarrow M_j \qquad (5)$$

Das Postulat einer solchen Größe macht aber erst dann Sinn, wenn die Mikrozustände kodierbar sind, d.h., wenn den Mikrozuständen auch beispielsweise kognitive Operationen zugeordnet werden könnten (etwa Aktivation M_i, Inhibition M_j). Ein solcher Transformationsprozess könnte zu einer mentalen Grammatik auf der neurowissenschaftlichen Ebene führen, wie sie von Friedhart Klix für die interne Repräsentationseben zur Beschreibung kognitiver Prozesse gefordert wurde. Die Lösung des Kodierungsproblems ist mit den Arbeiten von Kindler et al (2011), Gschwind et al (2016) sowie Zhang et al (2016a) wahrscheinlich geworden.

Kindler und Mitarbeiter bestimmen die Mikrozustände bei schizophrenen Patienten, die Stimmen hören, und denen, die keine Stimmen hören. Sie finden bei den Patienten, die Stimmen hören, einen Mikrozustand, der eine erhöhte Aktivation im Broca-Wernicke–Zentrum aufweist.

Gschwind und Mitarbeiter bestimmen die Mikrozustände bei MS-Patienten (MS: multiple Sklerose) versus Gesunden und finden zwei Mikrozustände, die sich in ihrer Topologie von denen Gesunder unterscheiden. Aus der Änderung der Topologie bei den Patienten können sie den Krankheitsverlauf prädiktieren.

Li Zhang und Mitarbeiter führen einen Vergleich zwischen mathematisch Hoch- und Normalbegabten bezüglich der Topologie der Mikrozustände durch. Von 4 Mikrozuständen finden sie einen (Mikrozustand C), der typische Aktivationsmuster aufweist, wie sie bei mathematisch Hochbegabten bekannt sind.

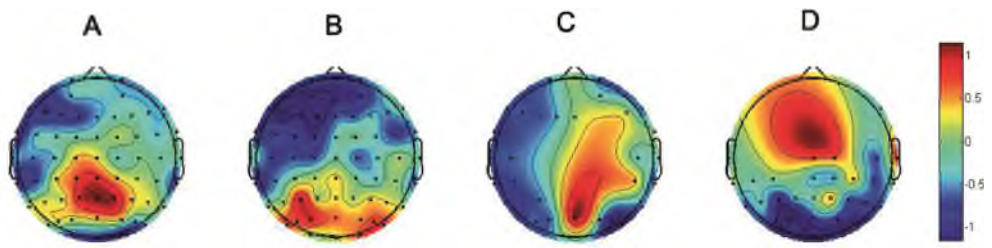


Abb. 13: Die Befunde von Li Zhang et al (2016): signifikante Mikrozustandsdifferenzen zwischen mathematisch Hoch- und Normalbegabten. Mikrozustand C weist Aktivationsmuster auf, wie sie von mathematisch Hochbegabten aus der Multimodalitätshypothese bekannt sind: Hochbegabte haben Lösungsstrategien für beide Modalitäten (rechnerisch und bildhaft-anschaulich) verfügbar. Dieser Mikrozustand tritt bei mathematisch Hochbegabten signifikant häufiger auf.

Eben dieser Mikrozustand tritt in den Mikrozustandssequenzen mathematisch Hochbegabter signifikant häufiger auf und hat eine längere Dauer.

Erst durch die Rücktransformation von der neurowissenschaftlichen Ebene auf die interne bzw. externe Repräsentationsebene lässt sich das Kodierungsprobleme der Mikrozustände lösen. Diese Beispiele machen wahrscheinlich, dass dies möglich ist.

Literatur:

Boltzmann, L. (1872). Wien. Ber. 66, S. 275. Zitiert nach Progogine, I. (1979). *Vom Sein zum Werden.* München: Piper.

Bühler, K.(1927/1965). *Die Krise der Psychologie*. Stuttgart: Fischer

Ebeling, W. (2015) Entropie – ein Begriff der Physik, der universelle Bedeutung gewinnt. Vortrag am 10.12. 2015 Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin.

Ebelin, W. (2016). Physical basis of information and the relation to entropy. The European Physical Journal Special Topics. P. 1 – 16.

Eigen, M. & Winkler, R. (1975). *Das Spiel.* München, Zürich: Piper.

Gschwind, M., Hardmeier, M., Van De Ville, D., Tomescu, M.I., Penner, I.K., Naegelin, Y., Fuhr, P., Michel, C.,M., Seek, M. (2016). Fluctuations of spontaneous EEG topographies predict disease state in relapsing-remitting multiple sclerosis. *NeuroImage: Clinical* 12, 406-477

Heinrich, F. (1997). Diskussionsmaterial zur Untersuchung der Doppelrepräsentationshypothese und einige Bemerkungen aus mathematikdidaktischer Sicht. (unveröffentlicht).

Heinrich, F. (2003a). Theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungsanläufen beim Lösen mathematischer Probleme. Habilitationsschrift, Friedrich-Schiller-Universität Jena.

Heinrich, F. (2003b). Zum Wechselspiel zwischen Geometrie und Arithmetik/Algebra als ein heuristisches Leitprinzip im (bzw. von) Mathematikunterricht. Vortrag zur Habilitationsverteidigung, Fakultät für Sozial – und Verhaltenswissenschaften, Friedrich-Schiller-Universität Jena.

Heinrich, F. (2003c). Zur Einführung. *Der Mathematikunterricht. Zum Wechselspiel zwischen Figuren und Zahlen*. 49, 6, 3 -5.

Kindler, J., Hubl, D., Strik, W.K., Dierks, T. & Koenig, T. (2011). Resting – state EEG in schizophrenia: Auditory verbal hallucinations are related to shortening of specific microstates. *Clinical Neurophysiology* 122, 1179 – 1182.

Klix, F. (1992). *Die Natur des Verstandes.* Göttingen: Hogrefe.

Kolditz, L. (2016). Entropie, Selbstorganisation und Evolution, der Energieaustausch. Leibniz-Online 23 (2016).

Kotkamp, N. (1998). *Zur mentalen Repräsentation von Bildern, Wörtern und Kategorien bei Vergleichsprozessen.* Diplomarbeit, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Institut für Psychologie, Lehrstuhl Allgemeine Psychologie II.

Krause, B. (2004). Schwierigkeit beim logischen Denken. In B.Krause & W. Krause (Eds.), *Psychologie im Kontext der Naturwissenschaften.* Berlin: Trafo-Verlag.

Krause, W. (1991). Ordnungsbildung im Denken und kognitiver Aufwand. *Zeitschrift für Psychologie (Suppl.), 11,* 404-421.

Krause, W. (2000). *Denken und Gedächtnis aus naturwissenschaftlicher Sicht.* Göttingen: Hogrefe.

Krause, W. (2006). Außergewöhnliche menschliche Informationsverarbeitung– Extremgruppenvergleiche. *Leibniz – Online 2 (2006).* http://leibnizsozietaet.de/wp-content/uploads/2012/11/02-2-Krause.pdf

Krause, W. (2016). Verarbeitung von Information in Mikrozuständen. *Leibniz-Online, 21 (2016).* http://leibnizsozietaet.de/wp-content/uploads/2015/12/WKrause.pdf

Krause, W. (2017). Processing of Information in Microstates. *Leibniz-Online, 25 (2017).(in press).*

Krause, W., Sommerfeld, E., Höhne, G., & Sperlich, H. (1989). Aufwandsminimierende Umstrukturierung von Wissensstrukturen der Konstruktion im menschlichen Gedächtnis. *Proceedings des 34.Internationalen Kolloquiums der Technischen Universität Ilmenau*, 51-54. (abstract). Siehe auch Krause, W. (2000). S. 169.

Krause, W.; Seidel, G. & Heinrich, F. (2003a) Über das Wechselspiel zwischen Rechnen und bildhafter Vorstellung beim Lösen mathematischer Probleme. Der Mathematikunterricht, 6, 50-62.

Krause, W.; Seidel, G. & Heinrich, F. (2003b) Entropy reduction in mathematical giftedness. In: Lindemann, U. (Ed.) Human Behaviour in Design. Berlin, Heidelberg, NewYork: Springer, 63-71.

Lehmann, D., Ozaki, H., & Pal, I. (1987). EEG alpha map series: brain microstates by space-oriented adaptive segmentation. *Electroencephalogr.Clin.Neurophysiol.*, *67,* 271-288.

Mesarovic, M.D. (1964). Toward a formal theory of problem solving. In V. Sass & W. Wilkinson (Eds.), *Computer augmentation of human reasoning.* Washington.

Newell, A., Shaw, J.C. & Simon, H.A. (1965). Reports on a general problem solving program. In *Readings in mathematical Psychology. Vol. II.* New York: Wiley.

Oelsner, S. (2003). Diplomarbeit. Institut für Psychologie. Lehrstuhl Allgemeine Psychologie II. Friedrich-Schiller-Universität Jena

Prigogine, I. (1985). *Vom Sein zum Werden.* München: Piper. 4. Auflage.

Revlin, R. & Mayer, R.,E. (1978). *Human Reasoning*.Washington D.C.: Winston & Sons.

Schack, B. (1997). Adaptive Verfahren zur Spektralanalyse Instationärer Mehrdimensionaler Biologischer Signale. Habilitationsschrift, Technische Universität Ilmenau.

Schack, B. (1999). Dynamic Topographic Spectral Analysis of Cognitive Processes. In Ch. Uhl (Ed.), *Analysis of Neurophsyiological Brain Functioning.* Berlin, Heidelberg, New York:

Schack, B., & Krause, W. (1995). Dynamic power and coherence analysis of ultra short-term cognitive processes--a methodical study. *Brain Topogr.*, *8,* 127-136.

Schack, B., Grieszbach, G., Arnold, M., & Bolten, J. (1995). Dynamic cross-spectral analysis of biological signals by means of bivariate ARMA processes with time-dependent coefficients. *Med.Biol.Eng.Comput.*, *33,* 605-610.

Schack, B., Bareshova, E., Grieszbach, G., & Witte, H. (1995). Methods of dynamic spectral analysis by self-exciting autoregressive moving average models and their application to analysing biosignals. *Med.Biol.Eng.Comput.*, *33,* 492-498.

Schack, B., Grieszbach, G., & Krause, W. (1999a). The sensitivity of instantaneous coherence for considering elementary comparison processing. Part I: the relationship between mental activities and instantaneous EEG coherence. *Int.J.Psychophysiol.*, *31,* 219-240.

Schack, B., Grieszbach, G., Nowak, H., & Krause, W. (1999b). The sensitivity of instantaneous coherence for considering elementary comparison processing. Part II: similarities and differences between EEG and MEG coherences. *Int.J.Psychophysiol.*, *31,* 241-259.

Schack, B., Chen, A.C.N., Mescha, S., & Witte, H. (1999c). Instantaneous EEG Coherence Analysis during the Stroop Task. *Electroencephalogr.Clin.Neurophysiol.*

Seidel, G. (2004). *Ordnung und Multimodalität im Denken mathematisch Hochbegabter: sequentielle und topologische Eigenschaften kognitiver Mikrozustände.* Berlin: WVB.

Selz, O. (1913). *Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufes.* Stuttgart: Spemann.

Selz, O. (1922). *Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums.* Bonn: Cohen.

Sommerfeld, E. & Krause, W. (2013). „Objektiv, aber speziell“: Psychologie als Naturwissenschaft. *Leibniz – Online* 15 (2013). http://leibnizsozietaet.de/wp-content/uploads/2013/11/sommerfeld_krause-3.pdf

Sprung, L. & Sprung, H.(2010). *Eine kurze Geschichte der Psychologie und ihrer Methoden*. München, Wien: Profil.

Sydow, H. (1970). Zur metrischen Erfassung von subjektiven Problemzuständen und zu deren Veränderung im Denkprozeß II. *Zeitschrift für Psychologie*, *178,* 1-50.

Völz, H. (2014). *Grundlagen und Inhalte der vier Varianten von Information*. Wiesbaden: Springer Vieweg.

Zhang, L., Cao, M. & Shi, B. (2016a). Identifying Gifted Thinking Activities Through EEG Microstate Topology Analysis. In A. Hirose et al. (Eds.): ICONIP 2016, Part I, LNCS 9947, pp. 123–130. : Springer.

Zhang, L., Gan, J.Q., Wang, H. (2016b): Neurocognitive mechanisms of mathematical giftedness: a literature review. *Appl. Neuropsychol. Child*. 1–16 .

Adresse des Verfassers: urwe.krause@t-online.de