



*Rainer Rummel*

## Operationelle Geodäsie, Rangdefekte und ein globales Höhensystem

### Zusammenfassung

Im Jahre 1878 veröffentlichte Heinrich Bruns hier in Berlin seine grundlegende Arbeit zur Bestimmung der Figur der Erde in Form eines die Erde umspannenden Polyeders und des Geoids. Hundert Jahre später folgte „Operational Geodesy“ von Erik W. Grafarend, eine zu diesem Thema ebenso grundlegende Arbeit. In ihr wird der Zusammenhang zwischen geodätischen Messgrößen und den Darstellungsparametern der Erdfigur und des Gravitationsfeldes der Erde, einschließlich des Schätzprozesses umfassend analysiert. Am Beispiel des Nivellements zur Bestimmung von Potentialwerten von Geländepunkten lassen sich die Rolle des Rangdefekts und die Prinzipien der Datumswahl und Datumsfestlegung einfach zeigen. Die Satellitengeodäsie schuf nun eine zum Nivellement alternative Methode der Bestimmung von physikalischen Höhen und Potentialwerten von Geländepunkten. Die Potentialwerte ergeben sich dabei an GPS-Punkten aus den Ergebnissen der modernen Satellitengravimetrie als Lösung der geodätischen Randwertaufgabe. Damit entsteht erstmals die Möglichkeit zur Planung eines global einheitlichen, genauen Höhenbezugssystems einschließlich seiner Realisierung.

### Abstract.

In 1878 Heinrich Bruns published here in Berlin his fundamental work on the determination of the figure of the Earth – expressed as a global polyhedron – together with the geoid. One hundred years later, Bruns' work was followed by a publication of comparable impact, "Operational Geodesy" by Erik W. Grafarend. In it the connection is established between the various geodetic observables and the parameters expressing the Earth's figure and gravitational field. It also includes an analysis of the estimation procedure. Geodetic levelling for the purpose of determining geopotential numbers of terrain points is an example, with which the role of rank deficiency and of the choice of datum parameters can be simply demonstrated. Satellite geodesy gave us an alternative method of determination of geopotential values of terrain points. At GPS-points the geopotential is derived from gravity models of modern satellite gravimetry as a solution of the geodetic boundary value problem. Thus, there is now for the first time the opportunity to start the planning and realization of a truly globally consistent height system.

Heinrich Bruns veröffentlichte 1878 in der Schriftenreihe des königlich-preußischen Geodätischen Instituts seine berühmte Schrift „Die Figur der Erde“ als Beitrag zur Europäischen Gradmessung, (Bruns, 1878). Er war damals gerade erst 30 Jahre alt. Diese nur 49 Seiten umfassende Arbeit ist ein bedeutender Beitrag zur Bestimmung der Figur der Erde und des Erdschwerefelds. Bruns unterteilt die damals verfügbaren geodätischen Messmethoden in fünf Klassen: die astronomische Ortsbestimmung (Polhöhe, Länge und Azimut), Triangulation (Basislinie und Horizontalwinkel), Trigonometrisches Nivellement (Zenitwinkel), Geometrisches Nivellement und die Messung der Intensität der Schwere. Er weist nach, dass auf der Grundlage dieser Verfahren theoretisch eine Bestimmung der Erdfigur in Form eines die ganze Erde umspannenden Polyeders möglich ist. Er zeigt auf, dass sich zusätzlich an allen Polyederecken Schwerepotential und -anziehung, d.h.  $W$  und  $g$  bestimmen lassen sowie die globale Geoidfigur einschließlich ihrer Orientierung bezüglich der Erdachsen. Er diskutiert auch die praktischen Beschränkungen: Die Ungenauigkeit der Zenitwinkel wegen atmosphärischer Refraktion und die Tatsache, dass zwei Drittel der Erdoberfläche von Ozeanen überdeckt ist, zu

Bruns' Zeiten aus geodätischer Sicht noch „terra incognita“. Von besonderer Aktualität ist seine Diskussion der Abweichung der Meeresoberfläche vom Geoid durch den Einfluss von Gezeiten, Windantrieb und Hoch- und Tiefdruckzonen.

Hundert Jahre später, 1978 publizierte Erik Grafarend eine Arbeit mit dem Titel „Operational Geodesy“, (Grafarend, 1978). Diese Arbeit ist in ihrem Ansatz vergleichbar mit Brunss' „Die Figur der Erde“ und ähnlich grundlegend. Sie wurde veröffentlicht in „Approximation Methods in Geodesy“ (1978), herausgegeben von Helmut Moritz und Hans Sünkel. Dieses Buch enthält alle Vorlesungsmanskripte der zweiten Internationalen Sommerschule über mathematische Methoden der Physikalischen Geodäsie, die 1977 in Ramsau/Österreich abgehalten wurde. Diese Schule war prägend für die Entwicklung der theoretischen Geodäsie in den Folgejahren. Zentrales Thema war die geodätische Kollokation. Dieses Verfahren wurde von Torben Krarup und Helmut Moritz entwickelt und von diesen auch auf der Sommerschule dargelegt. Es lieferte das theoretische Fundament für die Lösung der Geodätischen Randwertaufgabe auf der Grundlage von beliebig auf der Randfläche und im Außenraum verteilten gemessenen Schwerefunktionalen. Die Kollokation stellt gleichzeitig eine lineare Näherung zur Lösung des sogenannten Molodenskiiproblems dar, das Molodenskii 1945 (Molodensky et al., 1962) als hypothesenfreien Ansatz zur Bestimmung der Erdfigur und des Schwerefelds im Außenraum entwickelt hatte.

Worum geht es bei der operationellen Geodäsie von Erik Grafarend? Meine Antwort ist subjektiv und vom Urheber nicht autorisiert. Ich sehe diese Arbeit als Überbau eines eigenen wissenschaftlichen Programms und Grundlage vieler der darauffolgenden Arbeiten. Sie enthält auch eine Einordnung von sowohl Kollokation als auch der Theorie von Molodenskii in ein übergeordnetes Gesamtmodell. Erik Grafarend definiert seine operationelle Geodäsie so: „the branch of geodesy where coordinates of points on the earth surface and in its interior or exterior space are computed from geodetic observables“ (ibid, S.237). Koordinaten umfassen dabei neben rein geometrischen kartesischen oder krummlinigen Koordinaten auch so genannte Schwerefeldkoordinaten, d.h. das aus astronomischer Breite und Länge und Potentialdifferenzen bestehende Koordinatentripel. Die klassischen geodätischen Netze in 2D oder 3D werden von Grafarend – wie bei Heinrich Brunss – als finite Elemente, d.h. als diskrete Näherung der Erdfigur an ein Kontinuum aufgefasst; die Aufgabe schließt außerdem die Bestimmung des Schwerefelds an der Erdoberfläche und im Außenraum ein. Eine weitere wichtige Generalisierung ist die Erweiterung der Punktbestimmung auf die Inter- und Extrapolation in den Außen- und Innenraum der Erde. Kern seiner Arbeit ist die detaillierte Analyse aller geodätischer Beobachtungsgrößen und ihres Beitrags zur Lösung der geodätischen Aufgaben. Letzteres bedingt die Untersuchung des eigentlichen Schätzprozesses: die Frage des deterministischen oder stochastischen Charakters aller vorkommenden Größen, die Analyse des Abbildungsprozesses, befruchtet von den damals neu erschienenen Arbeiten von Rao, z.B. (Rao & Mitra 1971), oder im deutschsprachigen Raum von Toutenburg, etwa (Bibby & Toutenburg, 1977) und die Klassifizierung der dazugehörigen Schätzer, die Erik Grafarend in den Folgejahren gemeinsam mit Burkhard Schaffrin weiter ausbaute, z.B. (Grafarend & Schaffrin, 1993). Bausteine seines Ansatzes sind eine hierarchische Systematisierung der Bezugssysteme, der Linearisierungsprozess einschließlich der Wahl des Referenzsystems sowie die Analyse von Rangdefekten sowie ihre Beseitigung in Form einer Datumsfestlegung. Die Hierarchie der Bezugssysteme wird in einer darauffolgenden Arbeit noch umfassender dargestellt, (Grafarend, Mueller, Papo & Richter, 1978). Die Beobachtungsverfahren der damals aufkommenden Satellitengeodäsie werden noch nicht einbezogen. Grafarends „Operational Geodesy“ stellte einen fundamentalen Beitrag zur Strukturierung und Systematisierung der Geodäsie dar.

Die einfachste Form eines geodätischen Netzes ist das Nivellement. Dabei werden Potentialdifferenzen zwischen Geländepunkten entlang Nivellementlinien aus dem Produkt von nivelliertem Höhenunterschieden und gemessenen Schwerewerten abgeleitet. Absolute Potentialwerte, sogenannte Geopotentielle Knoten entstehen durch die Festlegung eines frei gewählten Ausgangswertes an einem frei gewählten Bezugspunkt. Üblicherweise ist dies der Wert Null auf dem Niveau des mittleren Wasserstands eines Meerespegels. Man spricht von Datumsfestlegung, Datum und Datumspunkt. Die Genauigkeit der Höhenwerte nimmt mit zunehmenden Abstand der Linienpunkte vom Datumspunkt

ab. Am Beispiel des Nivellements lassen sich die allgemein gültigen Eigenschaften der Datumsfestlegung demonstrieren:

- Mit der Datumsfestlegung wird die minimal notwendige Information eingeführt, um den Datumsdefekt eines geodätischen Netzes zu beseitigen. Im vorliegenden Fall ist dies der Schritt von Potentialdifferenzen zu Geopotentiellen Knoten. Mathematisch entspricht dies der Beseitigung des Nullraums bzw. des Rangdefekts des zu lösenden linearen Gleichungssystems.
- Die Datumparameter sind frei wählbar. In unserem Beispiel sind Bezugspunkt und Bezugswert frei wählbar. Natürlich entspricht es unserem natürlichen Empfinden besser, den Höhenwert an einem Pegel festzulegen und nicht irgendwo entlang der Linie und als Bezugshöhe auf Meeresniveau Null zu wählen. Über eine S-Transformation lässt sich eine Datumfestlegung in jede andere transformieren, (Baarda, 1967 oder Grafarend, Knickmeyer & Schaffrin, 1982).
- Die Datumparameter sind deterministische Größen, nicht stochastische. Dies bedeutet, dass zum Beispiel Fehlerellipsen am Datumspunkt zu null schrumpfen.
- Werden mehr Datumgrößen festgelegt als theoretisch notwendig, wird auf das geodätische Netz ein Zwang ausgeübt. Es könnte zum Beispiel eine Verbiegung eines Höhennetzes entstehen, wenn man in einem Nivellementsnetz statt einem Potentialwert zwei oder mehrere festlegt.

Mit den Möglichkeiten der Satellitengeodäsie entstand eine alternative Methode der Höhenbestimmung, das sogenannte „GNSS-Nivellement“, z. B. (Rummel, 1986 oder 2012). GNSS ist die Abkürzung für Global Navigation Satellite Systems und umfasst neben GPS das russische Glonass-System, das europäische Galileo und das chinesische Beidou. Mit GPS sind Positionen und Positionsdifferenzen zwischen Geländepunkten zentimetergenau bestimmbar. Die dreidimensionalen kartesischen Koordinatendifferenzen im erdfesten System lassen sich in ellipsoidische Koordinatendifferenzen transformieren, d.h. in ellipsoidische Breiten-, Längen und Höhendifferenzen. Die neuesten Modelle des Schwerefelds der Erde aus einer Kombination von GOCE und GRACE, (Pail u.a., 2010 oder Bruinsma u.a., 2014) ermöglichen die direkte Bestimmung des Schwerefeldpotentials an diesen Geländepunkten (ergänzt durch die Details aus regionalen Geoid- bzw. Schwerefeldmodellen). Dieses Verfahren liefert geopotentielle Knoten in einer Qualität, die einer Höhengenaugigkeit von wenigen Zentimetern entspricht. Damit können nun einerseits die Niveauunterschiede zwischen den unterschiedlichen nationalen oder kontinentalen Höhensysteme bestimmt und damit eine Vereinheitlichung der Höhensysteme erreicht werden, (Gruber u.a., 2012), es können aber auch existierende Verformungen der großen Höhennetze aufgedeckt werden. So konnte ein Jahrzehnte andauernder Disput über die Qualität des nordamerikanischen Höhensystems beigelegt werden, vgl. (Woodworth u.a., 2012, Higinson u.a., 2015, siehe auch Wang u.a., 2012).

Aus der Physik ist bekannt, dass nur Potentialdifferenzen messbar sind, nicht jedoch das „absolute“ Potential. Dennoch, aus der Lösung der geodätischen Randwertaufgabe (GRWA) folgt das Schwerepotential. Dies wurde schon von Bruns (1878) erwähnt. Es wurde in (Heiskanen & Moritz, 1967, S. 103) am Beispiel der Bestimmung des  $N_0$ -Terms erläutert und mit seinem theoretischen Bezug zur Lösung der Geodätischen Randwertaufgabe ausführlich in (Sacerdote und Sansò, 2001) diskutiert. Durch die Regularitätsbedingung bei der Lösung der GRWA – das Potential konvergiere nach null gegen unendlich – lässt sich das Schwerepotential auf der Erdoberfläche und im Außenraum bestimmen. Die Datumsfestlegung erfolgt durch die Einführung der Regularitätsbedingung, man berechnet demnach an der Erdoberfläche Potentialdifferenzen bezüglich null im Unendlichen. Man könnte aber auch einen beliebig anderen Randwert im Unendlichen einführen. Als Lösung der GRWA wird demnach auch der Potentialwert auf der Geoidfläche schätzbar, dieser wird in der Geodäsie als  $W_0$  bezeichnet. Pionierarbeit zu diesem Thema leisteten Burša und Kollegen (Burša u.a., 1997, Burša u.a., 1999 oder Bursa u.a., 2007) sowie Grafarend und Ardalan, siehe (Grafarend & Ardalan, 1997, Ardalan & Grafarend, 1999).

Wie entsteht jedoch auf dieser Grundlage ein globales Höhenbezugssystem? In Analogie zur Bestimmung eines erdfesten Koordinatensystems für die Beschreibung der Geometrie des Erdkörpers

und von Satellitenbahnen im Außenraum sollte man unterscheiden zwischen der Definition des Koordinatensystems und dessen Realisierung in der Natur, der sogenannte Koordinatenrahmen, siehe zum Beispiel (Petit & Luzum, 2010, Altamimi u.a., 2011). Bei der Geoiddefinition kann die Geodäsie zurückgreifen auf die historisch bedeutsamen Definitionen von Gauss, Bessel und Listing. Eine Definition des Gesamtsystems ist jedoch komplex. Es muss Sicherheit bestehen, dass die Potentialwerte unter Benutzung einheitlicher Standards zustande kommen. Dies betrifft die Wahl der Naturkonstanten, der Konstanten des Normalschwerefelds, des Modells der permanenten Gezeiten, der Behandlung der Atmosphärenmassen, des Schwerefeldmodells einschließlich seiner regionalen Verfeinerungen und des Rechenmodells. Es muss durch eine Vereinbarung gewährleistet werden, dass global einheitlich an jedem Ort die Potentialwerte berechnet werden. Es sei in diesem Zusammenhang auf die klassischen Arbeiten von Mather (1978) und Moritz (1980) hingewiesen. Auch die Realisierung des Geoids in der physikalischen Wirklichkeit bedarf einer internationalen Vereinbarung: Man könnte zum Beispiel als Geoid bezeichnen als eine Äquipotentialfläche des Erdschwerefelds, die festgelegt ist:

- durch den mittleren (18,6 Jahre) Wasserstand eines ausgewählten Meerespegels, zum Beispiel Amsterdam
- durch ein raum-zeitliches Mittel der Wasserstände eines global verteilten Ensembles von Meerespegeln oder
- durch die raumzeitliche mittlere Meereshöhe aus 20 Jahren erfolgreicher Satellitenaltimetrie.

Die Realisierung eines globalen Höhenbezugssystems und -rahmens scheint gut machbar auf einem Genauigkeitsniveau von ca.  $10^{-8}$  relativ zum Erdradius ( $\approx 10$  cm). Sie ist bereits sehr komplex, will man eine Relativgenauigkeit von  $10^{-9}$  erreichen und schließlich kaum realisierbar für noch höhere Genauigkeiten. Der Grund dafür liegt in der Dynamik des Erdsystems. Die feste Erde, auf der die geodätischen Bezugspunkte verankert sind, ist eben nicht fest, durch Massenverlagerungen im Erdsystem verändert sich zudem der Bezug zwischen Massenzentrum der Erde und Koordinatenursprung des Terrestrischen Referenzsystems und schließlich verändern Massenumverteilungsprozesse im Erdsystem (kontinentale Hydrologie, Eismassenverlust, Meeresspiegelschwankungen) unentwegt das Gravitationsfeld und seine Niveauflächen. Angesichts der enormen Fortschritte in Positionierung und Schwerefeldbestimmung ist es jedoch an der Zeit, die Weichen zu stellen für eine operationelle Realisierung eines globalen Höhenbezugssystems und -rahmens.

Erik W. Grafarend hat mit seinen Arbeiten die Entwicklung der theoretischen Grundlagen der Geodäsie maßgeblich beeinflusst. Grundlegende Gedanken zu Struktur und Inhalt der Geodäsie gehen auf seine Arbeiten zurück, wobei Grafarend sich immer inspirieren ließ durch die aktuellen Entwicklungen der Mathematik und theoretischen Physik. Eleganz und mathematische Exaktheit sind seine Markenzeichen. Sein aktives Interesse an den Arbeiten der jungen Generation, seine Ratschläge, die Betreuung sehr vieler junger Geodäten und sein unübertreffliches Netz von internationalen Kontakten in der Geodäsie und ihren Nachbardisziplinen war und ist eine unschätzbare Bereicherung für unsere Disziplin. Anlässlich seines 75. Geburtstags bedanken wir uns herzlich. Gleichzeitig erhoffen wir uns noch viele wissenschaftliche Beiträge, Ideen, Weihnachtsbriefe und persönliche Ratschläge von unserem Freund Erik W. Grafarend.

## Literatur:

Altamimi, Z. X. Collilieux, L. Métivier: *ITRF2008: an improved solution of the international terrestrial reference frame*, J Geod 85:457–473, DOI 10.1007/s00190-011-0444-4, 2011

Ardalan A.A., E.W. Grafarend: *A first test for  $W_0(\dot{t})$  the time variation of  $W_0$  based on three GPS campaigns of the Baltic Sea level project, Final results of the Baltic Sea Level 1997 GPS campaign*. Rep. Finnish Geod. Inst., 99, 4, 93-112, 1999

Baarda W.: *S-transformation and criterion matrices*, Netherlands Geodetic Commission, New Series 5, 1, Delft, 1967

Bibby J., H. Toutenburg: *Prediction and improved estimation in linear models*, John Wiley & Sons, 1977

Bruinsma, S.L., C. Förste, O. Abrikosov, J-M. Lemoine, J-C. Marty, S. Mulet, M-H. Rio, S. Bonvalot: *ESA's satellite-only gravity field model via the direct approach based on all GOCE data*, Geophys.Res.Let. 2045, 10.1002/2014

Bruns H.: *Die Figur der Erde*, Publication des Königlich Preussischen Geodätischen Institutes, Berlin, 1878

Burša M., K. Radej, Z. Šima, S.A. True, V. Vatr: *Determination of the geopotential scale factor from Topex/Poseidon satellite altimetry*. Studia Geoph. Geod. 41, 203-215, 1997

Burša M., J. Kouba, M. Kumar, A. Müller, K. Radej, S.A. True, V. Vatr, M. Vojtiskova: *Geoidal geopotential and world height system*, Studia Geoph. Geod. 43, 327-337 1999

Burša M., S. Kenyon, J. Kouba, Z. Šima, V. Vatr, V. Vitek, M. Vojtišková: *The geopotential value  $W_0$  for specifying the relativistic atomic time scale and a global vertical reference system*. J Geod 81, 103 – 110, 2007

Higginson S., K.R. Thompson, P.L. Woodworth, C.W. Hughes: *The tilt of mean sea level along the east coast of North America*, Geoph. Res. Let., 2015

Grafarend E. W.: *Operational geodesy*, in: Approximation methods in geodesy, Hrsg.: Moritz H., H. Sünkel, 235-284, Wichmann, Karlsruhe, 1978

Grafarend E.W., I.I. Mueller, H.B. Papo, B. Richter: *Concepts for reference frames in geodesy and geodynamics: the reference directions*, Bulletin Geodesique 53, 195-213, 1979

Grafarend E.W., E.H. Knickmeyer, B. Schaffrin: *Geodätische Datumtransformationen*, Zeitschrift für Vermessungswesen 107, 15-25, 1982

Grafarend E.W., B. Schaffrin: *Ausgleichsrechnung in linearen Modellen*, Brockhaus, Mannheim, 1993

Grafarend E.W., Ardalan A.A.: *World Geodetic Datum 2000*. J. Geod. 73, 611-623, 1997

Gruber T., C. Gerlach, R. Haagmans: *Intercontinental height datum connection with GOCE and GPS-levelling data*, J Geod. Sci., 2(4), 270-280, DOI: 10.2478/v10156-012-0001-y, 2012

Heiskanen W. A., H. Moritz: *Physical Geodesy*, Freeman and Co., San Francisco, 1967

Mather R.S.: *The role of the geoid in four-dimensional geodesy*, Marine Geodesy, 1:3, 217-252, 1978

Molodenskii, M. S., V. F. Eremeev, M. I. Yurkina: *Methods for the study of the external gravitational field and figure of the earth*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1962

Moritz H., H. Sünkel: *Approximation methods in geodesy*, Wichmann, Karlsruhe, 1978

Moritz H.: *Advanced physical geodesy*, Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980

Pail R., H. Goiginger, W-D. Schuh, E. Höck, J. M. Brockmann, T. Fecher, T. Gruber, T. Mayer-Gürr, J. Kusche, A. Jäggi, D. Rieser: *Combined satellite gravity field model GOCO01S derived from GOCE and GRACE*, Geoph. Res. Let. 37, L20314, doi: 10.1029/2010GL044906, 2010

Petit G., B. Luzum: *IERS Conventions (2010)*, IERS Technical Note 36, 179 Seiten, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt/M., 2010

Rao C.R., S.K. Mitra: *Generalized inverse of matrices and its applications*, John Wiley & Sons, New York, 1971

Rummel, R.: *De toekomst van het NAP*, in: Drie Eeuwen Normal Amsterdams peil, Hrsg.: A. Waalewijn, Rijkswaterstaat 48, 45-46, 1986

Rummel R.: *Height unification using GOCE*, J. Geod. Sci., 2(4) 355-362, DOI: 10.2478/v10156-011-0047-2, 2012

Wang Y.M., J. Saleh., D.R. Roman: *The US gravimetric geoid of 2009 (USGG2009): model development and evaluation*, J. Geod. 86:165–180, DOI 10.1007/s00190-011-0506-7, 2012

Woodworth P.L., C.W. Hughes R.J. Bingham, T. Gruber: *Towards worldwide height system unification using ocean information*, J. Geod. Sci., 2(4) 302-318, 2012 DOI: 10.2478/v10156-012-0004-8. 2012

*Adresse des Verfassers:*

Prof. Dr. Reiner Rummel, Institut für Astronomische und Physikalische Geodäsie Technische Universität München ; [rummel@bv.tum.de](mailto:rummel@bv.tum.de)