Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin *120(2014), 43–51*

Helmut Moritz

Einige grundlegende mathematische Ideen und Zusammenhänge in der theoretischen Geodäsie

Zusammenfassung und Einführung

Einen markanten Einschnitt in der Geschichte der Geodäsie bildet der Start von Sputnik 1957. Im nächsten Jahr, 1958, erschien das fundamentale Werk von M.S. Molodensky (Molodenski 1958) in der deutschen Herausgabe von Horst Peschel (das im russischen Original bereits 1945 veröffentlicht worden war). Beide Ereignisse zusammen genommen stellten, zumindest aus der Sicht des Verfassers, den Beginn der Geodäsie im heutigen globalen Sinne dar. Real gesehen, ist das Ereignis „Sputnik" natürlich fundamentaler, aber eine optimale Nutzung von Satelliten- und anderen Daten verlangt nach der Entwicklung neuer und diffiziler mathematischer Methoden, die, abgesehen von der Theorie von Molodensky, damals noch nicht vorlagen und die eine faszinierende Herausforderung an die Theoretiker darstellten. Die meisten damaligen Geodäten werden im Buch von Molodensky zum ersten Mal von einer Integro-Differentialgleichung gehört haben. Molodensky hat das Problem formuliert, aber es galt, praktisch optimale Lösungsformen zu finden, und das hat noch viele Theoretiker in Ost und West, darunter auch Kurt Arnold im Potsdamer Geodätischen Institut, beschäftigt. Einen mathematischen Existenzbeweis hat erst der bekannte Mathematiker Lars Hörmander (1976) geliefert, streng, aber nur für ein etwas vereinfachtes mathematisches Modell. Für die Verwendung von Satellitendaten ist die räumliche Kugelfunktionsentwicklung des Gravitationspotentials grundlegend (Erik Grafarend verwendet die Entwicklung nach Ellipsoidfunktionen, und das ist noch schwieriger). Vor allem das Konvergenzproblem wurde viel diskutiert; es wurde aber von Torben Krarup durch eine geniale Lösung durch Verwendung des von ihm so genannten Theorems von Runge praktisch ad absurdum geführt (später stellte es sich heraus, dass dieses Theorem den Mathematikern schon um 1930 bekannt war).

Eine für die Praxis fundamental wichtige Frage war folgende. Das Problem von Molodensky erfordert die Kenntnis der Schwere g in allen Punkten der Erdoberfläche; gemessen kann g nur in diskreten Punkten werden; dazwischen muss man interpolieren. Dass man dafür statistische Methoden braucht, war bereits Molodensky bekannt. An der Ohio State University arbeiteten Reino Hirvonen und William Kaula schon vor 1960 an der Statistik von Schwereanomalien, und der Verfasser schlug dort 1962 die Verwendung der von Kolmogorov und Wiener für einen anderen Zweck ausgearbeiteten Prädiktion nach kleinsten Quadraten vor, die von Richard Rapp für die Schwereinterpolation praktisch verwendet wurde. Eine fundamentale Verallgemeinerung war die vom Kreis um Torben Krarup entwickelte Methode der Kollokation nach kleinsten Quadraten, die heute, modifiziert und verallgemeinert, von grundlegender praktischer Bedeutung ist (Christian Tscherning und viele andere). Eine vom Mathematischen her äußerst schwierige, aber vielseitig verwendbare Methode sind die so genannten „hard implicit function problems" einschließlich der „hard inverse function problems" (diese Probleme sind wirklich „hart"), denen der Verfasser zum ersten Mal um 1969 beim KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser)-Theorem (Vladimir I. Arnold!) begegnete und die bei Existenz- und Konvergenzproblemen für den professionellen Mathematiker (der der Verfasser nicht ist) vorzüglich zu verwenden sind (zum Beispiel im oben erwähnten Existenzbeweis von Hörmander). Vorgänger sind Henri Poincaré für die Konvergenz astronomischer Reihen, die eine gewisse Ähnlichkeit mit der Konvergenz von Kugelfunktionsreihen hat, und hier bezieht sich Poincaré wieder auf den auch im nahen Geodätischen Institut tätigen Heinrich Bruns.

Um dem „genius loci" abschließend zu huldigen, führen wir noch Albert Einstein an: zur Berechnung hochgenauer Satellitenbahnen braucht man die Relativitätstheorie.

Im Folgenden sollen diese Ideen und Zusammenhänge knapp skizziert werden, wobei ein ausführliches Literaturverzeichnis weiterhelfen kann.

1. Formulierung des Problems von Molodensky als inverses Problem

Im Raum ist der Schwerevektor g mit dem Schwerepotential W durch die bekannte Beziehung verbunden:

$$g = \text{grad}\, W = (W_x \, , W_y \, , W_z) \, , \tag{1}$$

wobei der Gradient *grad* ein Vektor ist, der aus den drei partiellen Ableitungen besteht. *Auf der physischen Erdoberfläche S,* auf der wir nach Molodensky sowohl den Schwerevektor g als auch das Potential W messen, ist die Oberfläche S zunächst unbekannt, aber es besteht eine *bekannte* Relation

$$g = f(S, W)\ . \qquad (2)$$

Hier ist die unbekannte Erdoberfläche S nur *implizit* enthalten. Die Auflösung dieser Gleichung nach S ist also ein *implizites Funktionsproblem*. Da ja W ohnehin bekannt ist, kann man es sogar gewissermaßen als gegeben betrachten und weglassen und schreiben

$$g = F(S) \qquad (3)$$

als *inverses Funktionsproblem* mit der Lösung in der Form

$$S = F^{-1}(g) \qquad (4)$$

Das Prinzip ist also sehr einfach und einsichtig (z. B. Hofmann-Wellenhof und Moritz 2005, S. 294 ff.) Leider sind die auftretenden Variablen keine einfachen Zahlen, sondern selbst Funktionen, und unser unschuldig aussehendes f ist ein „nicht-linearer Operator". Man spricht dann von einem *„harten impliziten Funktionsproblem"* bzw. einem *„harten inversen Funktionsproblem"*. Und solche Probleme sind wirklich unglaublich hart!

Das Molodensky-Problem wurde erst 1976 von dem berühmten Mathematiker Lars Hörmander (Hörmander 1976) gelöst, und zwar, wie es die Mathematiker verlangen, hinsichtlich Existenz und Eindeutigkeit der Lösung (*praktisch* hinreichende Lösungen gibt es schon seit Molodensky).

2. Harte implizite und inverse Funktionsprobleme in Himmelsmechanik und Chaostheorie

Solche Probleme in der Himmelsmechanik gehen wohl auf Henri Poincaré (1854-1912) zurück (Poincaré 1890). Sein dreibändiges Werk über „Neue Methoden der Himmelsmechanik (1892, 1893, 1899) wurde 1987 nachgedruckt (Poincaré1987). Poincaré schreibt sehr zukunftsweisend, aber ein umfassendes Buch, das den heutigen mathematischen Ansprüchen entspricht, ist erst Sternberg (1969), eine umfangreiche Darstellung harter impliziter Probleme mit verschiedenen Anwendungen. Fast gleichzeitig erschien die etwas weniger abstrakte Darstellung (Arnold und Avez 1968).

Das wohl bekannteste Theorem dieser Art ist das KAM-Theorem, benannt nach A. N. Kolmogorov, V. I. Arnold und J. Moser. Es kann sowohl auf Probleme der Himmelsmechanik als auch der Chaostheorie angewendet werden. Wir haben das KAM-Theorem in (Moritz 2003) angedeutet; eine relativ zugängliche Ableitung findet man in (Schuster 1988, S. 191). Es übersteigt den Rahmen dieses kurzen Vortrags.

3. Das Paradox der asymptotische Reihen

Die für die theoretische Geodäsie wohl wichtigste Erkenntnis von Poincaré (1987, 2. Bd., S. 1 ff.) ist der Umstand, dass die Reihenlösungen der Himmelsmechanik asymptotisch (semikonvergent) sind, also nicht konvergent im streng mathematischen Sinn sein müssen. Solche mathematisch divergente Reihen können sehr wohl „praktisch konvergent" sein. Das heißt, wenn man nur wenige Terme nimmt, kann man praktisch sehr gute Ergebnisse erhalten; erhöht man die Zahl der Terme, kann sich die Konvergenz verschlechtern, und bei unendlich vielen Termen ist die Reihe divergent. Umgekehrt können konvergente Reihen so schlecht konvergieren, dass sie praktisch unbrauchbar sind, wie z.B.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ \cdots$$

Diesem schlichten Beispiel steht eine divergente, aber „praktisch konvergente" Reihe gegenüber:

$$\frac{e^{x}}{x\left(1+\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^{2}}+\frac{3!}{x^{3}}+\cdots\right)}$$

Sein Buch (1987, Band 2) beginnt Poincaré also mit dem Kapitel „Divers sens du mot convergence" (Verschiedene Bedeutungen des Wortes „Konvergenz"). Er unterscheidet zwischen *mathematischer Konvergenz* und *numerischer Konvergenz.* Mathematische Konvergenz oder Divergenz können gegenseitig ganz irrelevant sein. Eine ausführliche numerische Berechnung mit überraschenden, fast absurden Resultaten ist in (Moritz 2003) zu finden.

Divergente aber numerisch hervorragend brauchbare Reihen wurden von Poincaré *asymptotische Reihen* genannt; siehe auch (Erdelyi 1956).

Was Poincaré zeigte, war, dass viele (oder vielleicht sogar die meisten) Reihen der Himmelsmechanik solche asymptotische (praktisch konvergente) Reihen von trigonometrischen Funktionen sind. Übrigens hatte schon Bruns (1884) („unser" Bruns) Vorarbeit auf diesem Gebiet geleistet.

4. Das Paradox der Kugelfunktionsreihen

Harmonische Funktionen, d.h. solche räumliche Funktionen, welche die Laplace-Gleichung $\Delta V = Vxx + Vyy + Vzz$ erfüllen, können in eine Reihe von Kugelfunktionen entwickelt werden. In der Geodäsie ist das Potential des Gravitationsfeldes im Außenraum der Erde, zusammen mit dessen analytischer Fortsetzung ins Erdinnere, eine harmonische Funktion. *Solche Reihen spielen eine grundlegende Rolle für die Berechnung von Satellitenbahnen und für die Bestimmung des Erdschwerefeldes aus Beobachtungen von Satelliten.*

Außerhalb der kleinsten Kugel *K* um den Erdschwerpunkt, welche die Erde ganz in ihrem Inneren enthält, ist die Reihe stets konvergent. Das Problem ist, ob diese Reihe *an der Erdoberfläche* konvergiert, da die analytische Fortsetzung harmonischer Funktionen ins Innere der Kugel *K* singuläre Stellen enthalten kann, welche eine Konvergenz verhindern. Die mathematische Konvergenz von Kugelfunktionsreihen an der Erdoberfläche ist also nicht gesichert.

Nun kommt die im vorigen Abschnitt erwähnte Instabilität gewisser Reihen, wozu auch die Kugelfunktionsreihen gehören, ins Spiel (Moritz 1997). Nehmen wir an, an einem Punkt *P* der Erdoberfläche innerhalb der Kugel *K* sei die Reihe konvergent. Eine Veränderung des Potentials dadurch, dass man einen *beliebig kleinen* Massenpunkt („sandgrain“) in *P* hinzufügt, macht die Reihe divergent. Das Wesentliche ist, dass der Massenpunkt sehr klein sein kann, von der Masse von 1 Gramm, oder aber auch nur von 10^{-10} Gramm, was bestimmt unmessbar ist (es könnten auch $^{10\text{-}1000}$ Gramm sein....). Aber die konvergente Reihe wird divergent, was die Instabilität zeigt.

Es geht aber umgekehrt, und das ist nicht trivial, dass man eine solche divergente Reihe durch eine beliebig kleine Veränderung des Gravitationsfeldes (kurz der Schwere) an der Erdoberfläche in eine konvergente Reihe überführen kann, eine Veränderung der Schwere etwa um 1/000 Milligal, oder um 10^{-10} Milligal, was bestimmt unmessbar ist. Das ist ein Theorem von Krarup (1969): die Frage nach der *mathematischen* Konvergenz einer Kugelfunktionsreihe ist *numerisch unlösbar*, aber auch praktisch bedeutungslos. *Man kann die Kugelfunktionsreihe, mit der man praktisch arbeitet, stets als konvergent betrachten!* Krarup bezeichnet es mit seiner charakteristischen Bescheidenheit als *Theorem von Runge.* Ich zitiere Krarup (1969, S. 54):

„*Runge's Theorem*. Given any potential regular outside the surface of the earth and any sphere in the interior of the earth. For every closed surface surrounding the earth (which surface may be arbitrarily near to the surface of the earth) there exists a sequence of potentials regular in the whole space outside the given sphere and uniformly converging to the given potential on and outside the given surface.”

Dieses Theorem müsste zumindest als Theorem von Krarup-Runge bezeichnet werden, denn Runge hatte es für analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen, also im Zweidimensionalen, bewiesen. Das geniale Verdienst von Krarup war, es für die Geodäsie entdeckt und ins Dreidimensionale übersetzt zu haben. (Allerdings stellte sich später heraus, dass sogar der dreidimensionale Fall der Kugelfunktionsreihen den Mathematikern bereits bekannt war; siehe Moritz (1980), S. 74, wo auf (Frank und Mises 1930) verwiesen wurde; ein detaillierter Beweis findet sich in Frank-Mises auf S. 760 ff.) Auch divergente Kugelfunktionsreihen können praktisch durch endliche harmonische Polynome („abgebrochene“, engl. “truncated“, Kugelfunktionsreihen) beliebig genau angenähert werden; die Mathematiker sagen: *die harmonischen Polynome liegen „dicht“ im Funktionenraum der Kugelfunktionen.*

Rationale und irrationale Zahlen

Ein sehr einfaches und anschauliches Beispiel für ein solches Verhalten, den Unterschied zwischen mathematischer Strenge und numerischer Näherung, sind die rationalen und irrationalen Zahlen. Betrachten wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 1. Die Länge der Diagonale ist $\sqrt{2} = 1.414...$, eine *irrrationale Zahl*, deren exakte Darstellung unendlich viele verschiedene Dezimalstellen erfordert. Die Seitenlänge ist exakt 1, also eine *rationale Zahl,* die nur endlich viele, in unserem Fall nur *eine* Dezimalstelle, erfordert. Stellen wir uns die Frage: ist eine praktisch gemessene Zahl, etwa die Diagonale unseres Quadrats, eine rationale oder eine irrationale Zahl? Mit welcher Genauigkeit man auch misst, man erhält immer nur eine Zahl mit endlich vielen Dezimalstellen. Man könnte natürlich noch beliebige weitere Dezimalzahlen hinzufügen, aber das wäre reine Phantasie. Auch jede numerische Rechnung, auch mit einem hochpräzisen Computer, erfolgt nur mit endlich vielen Dezimalstellen, also letztlich nur *mit rationalen Zahlen.* Kurz gesagt, man kann jede irrationale Zahl mit beliebiger Genauigkeit durch eine rationale Zahl approximieren. Wie die Mathematiker sagen: die rationalen Zahlen *liegen dicht* in der Menge der reellen Zahlen (s.o.).

Dieses fast kindlich einfache Beispiel wirft aber ein helles Licht auf das Problem von Konvergenz und Divergenz, das in den letzten beiden Abschnitten nur wie eine müßige mathematische Spekulation erschienen ist. *Wir können bei Reihen immer nur mit endlich vielen Reihengliedern rechnen.* Die

Summe der verbleibenden restlichen Reihenglieder muss vernachlässigbar klein sein, ansonsten sind die restlichen Reihenglieder beliebig. Es kommt auf die Summe an.

Bei den Kugelfunktionen haben wir den Satz von Krarup-Runge über die endliche Approximierbarkeit einer unendlichen Kugelfunktionsreihe einer harmonischen Funktion durch eine endliche Summe („harmonisches Polynom"). Das ist also ein Analogon für die beliebig genaue Approximierbarkeit einer irrationalen Zahl durch eine rationale. In der Tat: Die endlichen Polynome von Kugelfunktionen *liegen dicht* in der Menge der unendlichen Reihen von Kugelfunktionsreihen, wie wir schon ober bemerkt kaben. Konvergenz oder Divergenz von Kugelfunktionsreihen ist also in solchen Fällen für praktische Anwendungen ein Scheinproblem, ähnlich wie die Frage, ob eine gemessene oder aus Messungen berechnete Zahl rational oder irrational ist. Für Einzelheiten verweisen wir nochmals auf (Moritz 1980, 1997 und 2003).

5. Schwereinterpolation und Kollokation

Eine für die Praxis grundsätzlich wichtige Frage ist folgende. Das Problem von Molodensky erfordert die Kenntnis der Schwere g in allen Punkten der Erdoberfläche; gemessen kann g nur in diskreten Punkten werden, dazwischen muss man interpolieren. Dass man dafür statistische Methoden braucht, war bereits Molodensky bekannt. An der Ohio State University arbeiteten Reino Hirvonen und William Kaula schon vor 1960 an der Statistik von Schwereanomalien, und der Verfasser schlug dort 1962 die Verwendung der von Kolmogorov und Wiener für einen anderen Zweck ausgearbeiteten Prädiktion nach kleinsten Quadraten vor, die dann von Richard Rapp (1964) für die Schwereinterpolation praktisch umgesetzt wurde: siehe auch (Heiskanen und Moritz 1967).

Im Gegensatz zu den bisher behandelten Fragen ist das Prinzip der Interpolation nach kleinsten Quadraten von großer Schlichtheit.

Die grundlegende Formel ist

$$y = Cyx\ Cxx^{-1}\ x\ , \tag{5}$$

die Prädiktionsformel von Kolmogorov-Wiener (glücklicherweise hat sie mit dem oben erwähnten KAM-Theorem nicht das geringste zu tun). Es handelt sich um eine einfache Matrizengleichung.

Auf die Interpolation der Schwereanomalien ist x der Vektor der n gemessenen Schwereanomalien, y der Vektor der m interpolierten Schwereanomalien, Cxx ist die quadratische invertierbare Kovarianzmatrix von x, und Cyx die *m x n* rechteckige „Kreuzkovarianzmatrix“ (cross-covariance matrix) zwischen *y* und *x.*

Trotz ihrer überaus einfachen Form ist die Formel (5) unerhört universell praktisch anwendbar. Die Messgrößen *x* und die Rechengrößen *y* brauchen keinesfalls Größen gleicher Art zu sein. Die Prädiktionsformel (5) kann auch auf beliebige heterogene Größe des anomalen Schwerefeldes angewendet werden, z.B. kann die gesuchte Größe *y* die Geoidhöhe oder die Höhenanomalie im Sinne von Molodensky (seine Verallgemeinerung der Geoidhöhe) sein und der gemessene Vektor *x* kann aus Schwereanomalien und Lotabweichungen bestehen (*nur müssen die Kovarianzen stimmen*, s. Tscherning und Rapp 1974).

Das ist die heute allgemein bekannte Kollokation nach kleinsten Quadraten, eine andere geniale Entdeckung von Torben Krarup (1969). Sie wird in der numerischen Geodäsie allgemein angewandt. Ein Pionier ist Christian Tscherning (1974 und zahllose Publikationen bis heute). Man kann auch das Problem von Molodensky mittels Kollokation lösen, und das ist nicht die schlechteste Lösung.

So ist Kollokation ein „household word“ in der numerischen Geodäsie geworden.

6. Relativistische Effekte

Unseren bisherigen Ausführungen haben wir die klassische Mechanik zugrunde gelegt. Das reicht für die meisten terrestrischen Anwendungen aus. Nur bei der Berechnung hochgenauer Satellitenbahnen werden Korrektionen aus der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins benötigt. Da dies etwas aus dem bisherigen Rahmen herausfällt, verweisen wir den Leser für die Grundlagen auf (Moritz und Hofmann-Wellenhof 1993) und für Anwendungsformeln auf (Beutler 2005).

Literatur

Arnold V I und Avez A (1968). Ergodic Problems of Classical Mechanics, Benjamin: New York.

Beutler G (2005). Methods of Celestial Mechanics, 2 Bde., Springer: Berlin Heidelberg.

Bruns H (1884). Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Störungen, Astron. Nachr.,109, 216 - 222.

Erdélyi (1956). Asymptotic Expansions, Dover: New York.

Frank P und Mises R (1930). Die Differentialgleichungen der Mathematik und Physik, 2.Aufl., Bd.1 (Nachdruck Dover: New York 1961).
Grafarend E W, Krumm F W und Schwarze V S (Hrsg.) (2003). Geodesy: The Challenge of the Third Millennium, Springer: Berlin Heidelberg.
Heiskanen W A und Moritz H (1967). Physical Geodesy, Freeman: San Francisco.
Hofmann-Wellenhof B und Moritz H (2005). Physical Geodesy, 2.Aufl., Springer: Wien New York.
Hörmander L (1976). The Boundary Problems of Physical Geodesy, Arch. Rat. Mech. Anal., 62, 1-52.
Krarup T (1969). A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy, Publ. 44, Danish Geod. Inst., Kopenhagen.
Molodenski, M S (1958). Grundbegriffe der geodätischen Gravimetrie (Übers. aus dem Russ. hrsg. von H. Peschel), VEB Technik: Berlin.
Moritz H (1980). Advanced Physical Geodesy, Wichmann: Karlsruhe.
Moritz H (1997). The Sandgrain and the Butterfly: Instability in Geodesy and Geophysics, Annali di Geofisica, XL(5), 1359-1364.
Moritz H (2003). The Strange Behavior of Asymptotic Series in Mathematics, Celestial Mechanics and Physical Geodesy, in Grafarend et al. 2003, 371-377 (s.o.).
Moritz H und Hofmann-Wellenhof B (1993). Geometry, Relativity, Geodesy, Wichmann: Karlsruhe.
Poincaré H (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, Acta Mathematica, 13, 1-270.
Poincaré H (1987). Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, 3 Bde., Albert Blanchard: Paris (Nachdruck der Originalausgabe von 1892-1899).
Rapp R (1964). The Prediction of Point and Mean Gravity Anomalies Through the Use of a Digital Computer, Report No. 43, Inst. Geod, Phot. Cart., Ohio State Univ.
Schuster H G (1988). Deterministic Chaos, 2.Aufl., VCH: Weinheim.
Siegel C L (1956). Vorlesungen über Himmelsmechanik, Springer: Berlin Göttingen Heidelberg.
Sternberg S (1969). Celestial Mechanics, 2 Bd., Benjamin: New York.
Tscherning C C (1974). A Fortran IV Program for the Determination of the Anomalous Potential Using Stepwise Least-Squares-Collocation, Report No. 212, Dept. of Geod. Sci., Ohio State Univ.
Tscherning C C and Rapp R H (1974). Closed Covariance Expressions for Gravity Anomalies, Geoid Undulations, and Deflections of the Vertical