Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin *118(2014), 195–202*

Helmut Moritz

Helmert, Bruns, Einstein

Vortrag auf dem Kolloquium **„**Wissenschaftliche Geodäsie und ihre Geschichte" am 14. September 2012 in Berlin

Dem Andenken von H.-J. Treder gewidmet

Zusammenfassung

Friedrich Robert Helmert (1843-1917) war zweifellos einer der größten Geodäten unserer letzten Jahrhunderte.

Sein Buch „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie", insbesondere Band 2 (1884), ist noch immer ein Standardwerk, das umfassend wie kein anderes ist und daher auch 1962 nachgedruckt wurde. Es hat einige Generationen von Geodäten geprägt.

Natürlich hat sich die Erdmessung („Höhere Geodäsie" nach Helmert) seither ganz wesentlich weiter entwickelt, insbesondere in den letzten 50 Jahren durch die Verwendung der künstlichen Satelliten. Helmerts Nachwirken sei an Hand von zwei Beispielen kurz erläutert.

Helmert war der Erste, der die Abplattung des Erdellipsoids aus einem Satelliten bestimmte, nämlich aus unserem natürlichen Satelliten, dem Mond. Der von ihm erhaltene Wert 1/297.8 war schon wesentlich besser als der damals (und noch später) viel verwendete Wert von Bessel (1841).

Aus dem Umkreis von Helmert stammt auch die grundlegende Arbeit von Heinrich Bruns „Die Figur der Erde", Veröffentlichung des Geodätischen Instituts Berlin, 1878. Bruns' Idee eines weltumspannenden räumlichen Polyeders von Messpunkten auf der Erdoberfläche wurde in der Satellitentriangulation verwirklicht, die schließlich zu GPS und ähnlichen Verfahren führte. Bruns machte auch fundamentale Untersuchungen über die Konvergenz von Reihen, die für die Astronomie und die Geodäsie relevant sind.

Schließlich wird auf unerwartete Weise noch Einstein eingeführt, nicht nur als *genius loci*.

Vorbemerkung

In diesem Kurzvortrag möchte ich einige wenig systematische Bemerkungen über Helmert und das Berliner bzw. Potsdamer Geodätische Institut machen, die mir im Zuge meiner wissenschaftlichen Arbeit aufgefallen sind. Eine ausführliche Würdigung mögen Berufenere leisten.

1. Helmert

Friedrich Robert Helmert (1843-1917) war zweifellos einer der größten Geodäten unserer letzten Jahrhunderte.

Sein Buch „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie“, insbesondere Band 2 (1884), ist noch immer ein Standardwerk, das umfassend und interessant wie kein anderes ist und daher auch 1962 nachgedruckt wurde. Es hat einige Generationen von Geodäten geprägt.

Natürlich hat sich die Erdmessung („Höhere Geodäsie“ nach Helmert) seither ganz wesentlich weiter entwickelt, insbesondere in den letzten 50 Jahren durch die Verwendung der künstlichen Satelliten.

Helmert (1884, S. 473) war aber der Erste, der die Abplattung des Erdellipsoids aus einem Satelliten bestimmte, nämlich aus unserem natürlichen Satelliten, dem Mond. Der von ihm erhaltene Wert 1/297.8 war schon wesentlich besser als der damals (und noch später) viel verwendete Wert von Bessel aus dem Jahre 1841.

Wir wollen uns also vor allem beschäftigen mit

Helmerts „physikalischen Theorien“

Dieses Buch kann auch noch heute mit großem Gewinn gelesen werden. Es gibt keine umfassendere Einführung in die Gedankenwelt der physikalischen Geodäsie.

Manches mag heute (seit 1884!) überholt wirken, aber die grundlegenden Gedanken stimmen. Manches, wie die soeben erwähnte Bestimmung der Erdabplattung aus Mondbeobachtungen, wirkt heute noch bestürzend neu. Helmerts Werk ist das erste Buch, das die von Gauß und Listing begründete „kopernikanische Revolution“ ernst nahm. Er betrachtete als Erdfigur nicht eine bestimmte mathematische Fläche, nämlich die Kugel oder ein Rotationsellipsoid, und versuchte, aus Messungen ihre Größe und Gestalt zu bestimmen, wie man das von Eratosthenes bis zu den Gradmessungen der französischen Akademie in Peru und Lappland für selbstverständlich angesehen hatte. Dass die Messungen von der Lotrichtung, also letztlich *physikalisch* bestimmt waren, wurde als selbstverständlich ignoriert.

Carl Friedrich Gauß war der Erste, der diese Tatsache ernst nahm und der die „mathematische Erdfigur“ als jene Fläche *definierte*, die überall zur Lotrichtung senkrecht steht und deren Teil die (idealisierte) Oberfläche der Ozeane bildet.

Gauß fragte nicht, ob diese Fläche ein Ellipsoid sei. In der Tat, sie ist kein Ellipsoid und keine andere regelmäßige geometrische Fläche. Sie ist eine unregelmäßig wellenförmig „eingebeulte“ Fläche, die Listing später *Geoid* nannte (die „Beulen“ sind nicht sehr groß, maximal 100 m, recht wenig im Vergleich zu einem Erddurchmesser von etwa 12000 km, aber doch vorhanden und bei der heutigen Messgenauigkeit durchaus beachtlich.

Wichtig ist aber die Gaußsche Entdeckung, dass die Geodäsie nicht eine rein *geometrische*, sondern in gleichem Maße eine *physikalische* Wissenschaft ist, und das wurde von Helmert zum ersten Mal konsequent und umfassend realisiert, wie auch im Titel seines 2. Bandes klar, fast provokant zum Ausdruck gebracht ist.

Dieses Helmertsche Prinzip hat sich voll durchgesetzt, wie mehr als ein halbes Jahrhundert später erschienene Standardwerke wie die Bücher von Baeschlin (1948) oder Heiskanen und Vening Meinesz (1958) zeigen, die im Wesentlichen kaum über Helmert hinausgehen (Ausnahmen sind etwa Isostasie und die Formel von Vening Meinesz für die Lotabweichungen).

Wesentliche Fortschritte gab es erst in der revolutionären Theorie von Molodensky (seit 1945) und in der Praxis, durch die Satellitengeodäsie seit dem ersten Sputnik 1957.

2. Bruns

Mit seiner kleinen aber viel zitierten Schrift „Die Figur der Erde“, Veröffentlichung des Preußischen Geodätischen Instituts 1878, hat sich der bekannte Mathematiker Heinrich Bruns (1848-1919) würdig in den Kreis um Helmert eingefügt. Im Vorwort seines Buchs sprach Helmert (1884) von einem „überaus lichtvollen Grundriss“. Mit unerhörter mathematischer Prägnanz stellte Bruns die theoretischen Grundlagen der Geodäsie dar. Bekannt geworden sind zum Beispiel das „Brunssche Polygon“, der Gedanke einer weltumspannenden räumlichen Triangulation, die erst nach 1957 durch die Satellitentriangulation verwirklicht werden konnte.

Auch das von Helmert so genannte „Theorem von Bruns“, ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Störpotential T und der Geoidundulation N, ist sehr einflussreich geworden, besonders in der Verallgemeinerung von Molodensky auf die physische Erdoberfläche. Dieser wichtige Gedanke wurde von Bruns ganz klar herausgestellt, obwohl schon Stokes 1849 ihn implizit für seine Formel zur gravimetrischen Geoidbestimmung verwendet hatte.

Besonders berühmt geworden ist Bruns‘ provokante Definition der Geodäsie:

die Aufgabe der Geodäsie sei die Bestimmung des Schwerepotentials W der Erde. Nun ist klar: nach Gauß (bereits 1828) ist die Aufgabe die Bestimmung des Geoids als einer Niveaufläche $W = W_0 = \text{const}$. Wenn man nun die *räumliche* Funktion $W(x,y,z)$ kennt, so braucht man W nur einer Konstanten gleich zu setzen, um nicht nur das Geoid, sondern alle Niveauflächen als Flächen konstanten Potentials zu erhalten. Das ist eine gedanklich einfache „operationelle“ Definition der Niveauflächen: sie stehen in jedem Punkt senkrecht auf dem grundsätzlich messbaren Schwerevektor.

Diese Brunssche Definition ist komplementär zur bekannten Definition Helmerts: die Geodäsie sei *die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche.*

Diese beiden Definitionen zeigen klar den Unterschied der Denkweise zwischen Helmert und Bruns. Helmert ist der theoretisch und praktisch orientierte Universalgeodät, Bruns ist der scharfe mathematische Denker.

Konvergenzprobleme

Hier möge man mir gestatten, persönlicher zu werden. Seit 1970 beschäftigte ich mich mit dem *Konvergenzverhalten* geodätischer Reihen wie der Kugelfunktions-Entwicklung des äußeren Gravitationspotentials und der Reihenlösung des Problems von Molodensky. Dabei fand ich eine Ähnlichkeit mit der Konvergenz astronomischer Reihen, die Poincaré (1893) unter dem Begriff „asymptotische Reihen“ eingehend untersuchte, sich dabei auch auf Bruns beziehend; siehe auch Wintner (1941, S. 407-409). Hier erkannte ich wieder Bruns‘ klares Denken, von dem Wintner schreibt:

„It is interesting that the astronomer Bruns was led to the series […] and to a quite precise study of its pathological behavior, much earlier (1884) than the general theory of Borel series was developed by the mathematicians”.

Verschiedene Bedeutungen des Begriffs „Konvergenz“

Bruns war Vorläufer von Poincaré, der schreibt (1893, S.1):

„Zwischen den Mathematikern und Astronomen gibt es ein merkwürdiges Missverständnis hinsichtlich der Bedeutung des Begriffs „*Konvergenz*“. Die Mathematiker, ausschließlich bestrebt um vollkommene Strenge und ohne Rücksicht auf die oft unverhältnismäßige Länge der dabei notwendigen Berechnungen, die sie sich nur vorstellen, ohne sie wirklich durchzuführen, sagen, eine Reihe sei konvergent, wenn die Summe der Terme einem wohldefinierten Grenzwert zustrebt, auch wenn die Terme anfänglich nur sehr langsam abnehmen. Im Gegensatz dazu pflegen die Astronomen zu sagen, die Reihe sei konvergent, wenn z. B. die ersten 20 Terme sehr rasch abnehmen, selbst wenn die folgenden Terme schließlich wieder zunehmen.“ (Übersetzung H.M.)

Solche letzteren „pathologischen“ Reihen nennt man *asymptotische Reihen.* Charakteristisch für sie ist also praktische Konvergenz mit wenigen Gliedern bei mathematischer Divergenz.

Beispiele

Die Reihe

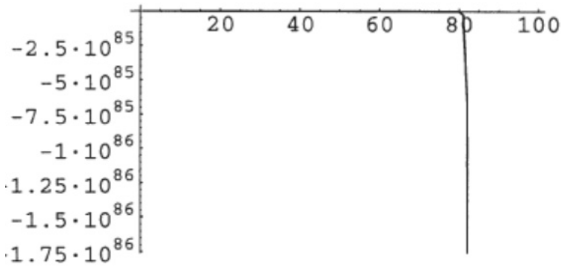
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

konvergiert *mathematisch,* aber viel zu langsam für *numerische* Verwendung, während die Reihe

$$\frac{e^x}{x}\left(1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \dots\right)$$

mathematisch *divergiert*, aber für nicht zu kleine x (> 16.6) schon mit wenigen Gliedern *numerisch* höchst genaue Ergebnisse liefert. Solche mathematisch divergenten, aber numerisch sehr zweckmäßigen Reihen nennt man also *asymptotische Reihen.*

Das wird durch folgende Darstellung des Approximationsfehlers klar. Schon mit wenigen Gliedern (etwa n = 3) ist der Approximationsfehler sehr klein, aber bei Verwendung mit sehr vielen Gliedern (ungefähr n = 80) beginnt er plötzlich rasant zu steigen, was die schließliche Divergenz sehr drastisch zeigt:



Es zeigt sich, dass viele numerische Reihen in der Astronomie, aber auch in der Geodäsie (Reihen von Molodensky, Kugelfunktionsentwicklungen für das äußere Gravitationspotential), solche asymptotischen Reihen sind.

Für Einzelheiten darf auf die Überblicksartikel (Moritz 1997) und (Moritz 2003) verwiesen werden.

Noch etwas zum großen Mathematiker Henri Poincaré: er interessiert sich auch für Geodäsie und war französischer Vertreter in der Internationalen Erdmessung, deren Zentralbüro Helmert leitete. Damit schließt sich der Kreis meines etwas fragmentarischen Vortrags ein erstes Mal.

3. Einstein

Dialektik der begrifflichen Definitionen der Geodäsie (Erdmessung)

Wir können die historischen begrifflichen Definitionen der Geodäsie als Erdmessung zwanglos in ein dialektisches Schema von These – Antithese – Synthese bringen, in dem Helmert, Bruns und Einstein eine Schlüsselrolle spielen.

3.1 These: Geodäsie ist Geometrie

Für die alten ägyptischen Feldmesser war die Erde eine *Ebene*, für Eratosthenes (um 200 v. Chr.) war sie eine *Kugel*, deren Radius er zu bestimmen versuchte, und im 18. Jahrhundert wurde sie als *Rotationsellipsoid* betrachtet, dessen Parameter eine Expedition der Französischen Akademie der Wissenschaften nach Peru (Bouguer) und Lappland (Maupertuis) zu bestimmen trachtete.

Das Ellipsoid spielt bis heute eine grundlegende Rolle als Bezugsfläche. Es ist mit den Namen von Bessel und Helmert (Band 1,1880) verbunden.

3.2 Antithese: Geodäsie ist Geometrie + Gravitation

Gauss hat die grundlegende Bedeutung einer *physikalischen* Definition der „mathematischen Erdfigur" als Niveaufläche des Schwerepotentials erkannt: Seine Ideen wurden durch Bruns und Helmert (Band 2, 1884) weitergeführt, wie wir gesehen haben. Diese Definition der „Physikalischen Geodäsie" gilt bis heute.

3.3 Synthese: Geodäsie ist Geometrie (in 4D)

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie *Albert Einsteins* (1879-1955) ist Gravitation die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit, die durch den Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl} ausgedrückt werden kann.

Dieser Gedanke wurde in geodätisch relevanter Weise von J. L. Synge (1966) aufgegriffen: er sagt auf S.109:

R_{ijkl} = gravitational field

und spricht auf S. 157 von einem „relativistically valid geodetic survey".

So wird aus der dreidimensionalen Dynamik (mit Gravitationskraft) eine vierdimensionale Kinematik (reine Geometrie ohne Kraft); man spricht auch von „kinematischer Geodäsie" (Moritz 1967).

Die Relativitätstheorie ist eine neue methodische Grundlage der physikalischen Geodäsie. Im Allgemeinen kommt man mit der klassischen Physik aus. Für höchste Genauigkeit aber braucht man „relativistische Korrekturen" für Satellitenbahnen, deren Kenntnis aber wohl den Spezialisten vorbehalten werden kann (Beutler 2005, Kap.3.5), während die Grundlagen (Moritz, Hofmann-Wellenhof 1993) von allgemeinerem Interesse sein dürften.

Immerhin ist diese Dialektik der Definitionen insofern gerechtfertigt, als die Synthese wirklich eine Betrachtung der These auf höherem Niveau ist. Die These (Geometrie 2D, 3D) wird in der Synthese auf höherer Ebene (Geometrie 4D) bestätigt.

Dieser Abschluss besiegelt endgültig den fragmentarischen Charakter des Vortrags.

Literatur

Baeschlin C F (1948): Lehrbuch der Geodäsie, Orell Füssli Verlag Zürich.

Beutler G (2005): Methods of Celestial Mechanics, Band 1, Springer, Berlin.

BrunsH (1878): Die Figur der Erde, Publikation des Königl. Preuss. Geodätischen Instituts, Berlin.

Bruns H (1884): Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Störungen, Astron. Nachr., 109 (14), 216-222.

Heiskanen W A, Vening Meinesz F A (1958): The Earth and its Gravity Field, McGraw-Hill, New York.

Helmert F R (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Band 1: Die mathematischen Theorien, Teubner, Leipzig (Nachdruck 1962).

Helmert F R (1884): Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Band 2: Die physikalischen Theorien, Teubner, Leipzig (Nachdruck 1962).

Moritz H (1967): Kinematical Geodesy, Report No. 92, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.

Moritz H (1997): The sand grain and the butterfly: instability in geodesy and geophysics, Annali di geofisica XL (5), 1359-1364.

Moritz H (2003): The strange behavior of asymptotic series in mathematics, celestial mechanics and physical geodesy, in: E W Grafarend, F W Krumm, V S Schwarze (Hrsg.) Geodesy: The Challenge of the Third Millennium, Springer, Berlin, S. 371-377. (Im Internet: Google-Suche nach “asymptotic series”.)

Moritz H, Hofmann-Wellenhof B (1993): Geometry,Relativity, Geodesy, Wichmann, Karlsruhe.

Poincaré H (1893): Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Band 2, Gauthier-Villars, Paris (Nachdruck 1987).

Synge J L (1960): Relativity: The General Theory, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

Wintner A (1941): The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton Univ. Press.