Das duale wissenschaftliche Paar Moritz – Molodenskij:
Geodätische Höhen und Höhensysteme

Erik W. Grafarend

Fakultät Mathematik und Physik
Fakultät Luft- und Raumfahrttechnik und Geodäsie
Fakultät Bauingenieur- und Umweltschutztechnik
Geodätisches Institut der Universität Stuttgart

Helmut Moritz, unser aller großes Vorbild, hat in allen Gebieten der geodäsie und darüber hinaus in nahezu allen anderen Wissenschaftsgebieten gearbeitet. Hier nennen wir nur einige wenige: Satellitengeodäsie, Physikalische und Geometrische Geodäsie, GPS-LPS, Photogrammetrie, Kartographie, Informatik, Kollokation, Raum-Zeit Geodäsie, Kopplung von Gravitation und Rotation, Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie bis hin zur Philosophie. Zu allen Themen hat er richtungsweisende Beiträge geschrieben.

Grosse Wissenschaftler, so auch Geodäten und Geophysiker, arbeiten an der großen Themen ihrer Zeit, so auch Gauss-Listing („Geoid“), Helmert („Höhen-Systeme“), Somigliana-Pizzetti („Geodätisches Datum, Normales Schwerefeld, Referenzellipsoid, Rotation der Erde“), Marussi („Höhen-Systeme, Differentialformen, Integrabilität“), vor allem aber

H. Moritz und M.S. Molodenskij,

die sich in ihren Fragestellungen ergänzen. Es erklärt vielelicht das Thema meines Vortrages, vordergründig polare Persönlichkeiten, die *Dualität zwischen H. Moritz und M.S. Molodenskij*, dessen Themen Helmut Moritz sich zum Vorbild nahm und die damals im westlichen Ausland völlig unbekannt waren.

„Helmut kann Russisch lesen“!
Sprachen sind sein großes Hobby.

Lassen Sie mich heute mit einem kleinen Bericht unter dem generellen *Thema Dualität* beginnen, welches in allen Bereichen des menschlichen Daseins eine *zentrale Rolle spielt*.

Einstein Dualität

Mathematik - Realität

As far as the laws of **mathematics**,
they are not certain,
and as far they are certain
they do not refer to **reality**

1. Thema: Duale Beziehungen

Unser erstes Thema reflektiert die sogenannte *Einstein Dualität*, die Problematik zwischen *Realität*, zum Beispiel die Ergebnisse von Experimenten in allen Wissenschaftsbereichen und die *Mathematik* als Hüter von *Logik*, *Sätzen und Beweisen*, zum Beispiel die Axiomatik der Euklidischen Geometrie versus der *Riemannschen Geometrie gekrümmter Räume*.

Duale Begriffe oder Beziehungen strukturieren das *tägliche Leben*, wie wir *als erstes* in einer kleinen Tabelle auflisten. Aus Gründen der Kürze meines Berichtes nenne ich hier nur „arm- reich", ein immer aktuelles Thema nicht nur in der *Politik*, sondern auch in allen *Religionen*. Ein weiteres Beispiel ist „*gesund* - *krank*", ein aktuelles Thema in unserer *Wohlstandsgesellschaft*, u.a. ein Problem der *„Überfütterung" in unserer Gesellschaft*, die unter dem *Diktat der Informationsangebote* leidet: jeder hält ein sog. *Smart Phone* in der Hand, jeder hat irgendwelche *Stöpsel in den Ohren*!

1. THEMA
DUALE BEZIEHUNGEN

fest – flüssig	TOT – LEBEN
Freund- FEIND	FRUCHTBAR – UNFRUCHTBAR
gut – schlecht	BELEBT – UNBELEBT
SEIN – NICHT SEIN (HEIDEGGER, Martin)	TAG – NACHT
gerade Zahl – ungerade Zahl	BERG – TAL
rund – eckig	KRIEG – FRIEDEN
to be or not to be	VERGANGENHEIT – ZUKUNFT
traurig – fröhlich	GEFÜHL – RATIONAL
ALT – JUNG	TIER – MENSCH
alt – neu	NAHBEREICH – FERNBEREICH
KURZ – LANG	ZUFRIEDEN – UNZUFRIEDEN
Punkt – Strich	BERG – TAL
weiblich – männlich	ARM – REICH
endlich – unendlich	GESUND – KRANK
NORD – SÜD / OST-WEST	KLAR – UNKLAR
DIESSEITS – JENSEITS	SCHÖN – HÄSSLICH
	DICK - DÜNN

Duale Beziehungen prägen auch *Mathematik und Physik*. Wir nennen nur einige wenige wie „*Chaos - Ordnung*“, „*div - rot*“, „*kalt - warm*“ und viele andere mehr, die in unserer *zweiten Tabelle gesammelt* sind.

1. THEMA
DUALE BEZIEHUNGEN
Mathematik - Physik

plus – minus
positiv – negativ
elektron –positron
Mikrokosmos – Makrokosmos
+ - –
0 - ∞
Multiplikation – Division
endlich – unendlich
rationale Zahlen – irrationale Zahlen
DISKRET – KONTINUIERLICH
TEILCHEN – ANTITEILCHEN
organisch – anorganisch
TROCKEN – NASS
ORDNUNG – UNORDNUNG
KOMMUNISMUS – KAPITALISMUS
HIMMEL – ERDE
BEKANNT – UNBEKANNT
WELLE – TEILCHEN

MATERIE – ANTIMATERIE
THEORIE – PRAXIS
KONKRET – ABSTRAKT (HENRY CARTAN)
CHAOS – ORDNUNG
POLYCHROM – MONOCHROM
multiplikative – additive
KRUMM – GERADE
LINKS – RECHTS (nicht politisch)
THEORIE – ANTITHEORIE (SYNTHESE)
RAUM – ZEIT
GEOID – TELLUROID
aktiv - passiv
DIV – ROT
RAUMFEST – KÖRPERFEST
Helmholtz Decomposition
KALT – WARM
ROT – BLAU / GRÜN-ROT
SCHWARZ - WEISS

Eine *spezielle Dualität*, die heute *in allen Bereichen der Physik* Anwendung findet, ist der *HODGE star operator* *, nämlich in der *Dualität von antisymmetrischen multilinearen Funktionen*. Eine Referenz ist

HODGE, W.V.D. (1941):
Theory and applications of harmonic integrals, Cambridge University Press, Cambridge 1941

oder

HODGE, W.V.D. and PEDOE (1968):
Methods of algebraic geometry, Vol. 1, Cambridge University Press, London 1968

Die *Algebra* A_q^p von *antisymmetrischen multilinearen Funktionen* hat als Grundlage das *äußere Produkt* oder das *schiefe Produkt* symbolisiert durch „∧“.

Der *duale Operator* „*“ ist die *lineare Abbildung* $\mathrm{A}_n \to \mathrm{A}^{n-p}$ wobei $\dim \mathrm{X}$ die Dimension des *Basis-Raumes* bezeichnet. Die grundlegende Idee solch einer Abbildung ist die Abbildung von *antisymmetrischen multilinearen Funktionen* $f \in \mathrm{A}^n$ in *antisymmetrische lineare Funktionen* $* f \in \mathrm{A}^{n-p}$. Als *multilineare Basis* definieren wir

$$\boxed{\begin{array}{l} \left\{1, \mathbf{e}^{i_1}, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2}, \ldots, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_{p-1}} \wedge \mathbf{e}^{i_p} \right\} \\ \text{bei } p \in \{0,1,2,\ldots,n-2,n-1,n\} \\ \\ \textit{Beispiel}: n=1,\ p=0,1: \left[\begin{array}{l} \text{Basis}: \{1, \mathbf{e}^{i_1}\} \\ \text{Cobasis}: \{1, \mathbf{e}^{i_1}\} \end{array}\right. \\ \textit{Beispiel}: n=2,\ p=0,1,2: \left[\begin{array}{l} \text{Basis}: \{1, \mathbf{e}^{i_1}, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2}\} \\ \text{Cobasis}: \{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2}, \mathbf{e}^{i_1}, 1\} \end{array}\right. \\ \textit{Beispiel}: n=3,\ p=0,1,2,3: \left[\begin{array}{l} \text{Basis}: \{1, \mathbf{e}^{i_1}, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2}, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \mathbf{e}^{i_3}\} \\ \text{Cobasis}: \{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \mathbf{e}^{i_3}, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2}, \mathbf{e}^{i_1}, 1\}. \end{array}\right. \end{array}}$$

Im Allgemeinen gilt für beliebige $n \in \mathrm{N}$, $p \in \{0,1,2,\ldots n-2, n-1, n\}$

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{Basis} \\ \left\{1, \mathbf{e}^{i_1}, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2}, \ldots, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_{p-1}} \wedge \mathbf{e}^{i_p} \right\} \\ \textit{Cobasis} \\ \left\{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_{p-1}} \wedge \mathbf{e}^{i_p}, \ldots, \mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2}, \mathbf{e}^{i_1}, 1 \right\} \end{array}}$$

solange wir uns konzentrieren auf kontravariante A^p. Natürlich gibt es auch *ähnliche Darstellungen* für *q* – kovariante A_q oder gemischte A_q^p *HODGE star Operatoren*. Hier gilt

$$\boxed{* \left\{\mathbf{e}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_p}\right\} := \frac{1}{(n-p)!} \mathbf{e}^{\mathrm{i}_1 \ldots \mathrm{i}_p}_{\mathrm{i}_{p+1} \ldots \mathrm{i}_n} \mathbf{e}^{i_{p+1}} \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^{i_p}}$$

mittels des *Permutationsoperators*

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_p}_{i_{p+1} \ldots i_n} = \left[\begin{array}{l} +1 \text{ für eine gerade Permutation von } \{1,2,\ldots,n-1,n\} \\ -1 \text{ für eine ungerade Permutation von } \{1,2,\ldots,n-1,n\} \\ 0 \text{ sonst} \end{array}\right.$$

der auch als *Eddington-epsilon* bezeichnet wird.

Für asymmetrische multilineare Funktionen – auch als antisymmetrische tensorwertige Funktionen bezeichnet – welche bezüglich einer orthonormalen („unimodularen“) Basis dargestellt werden, ist der *HODGE star Operator* die folgende Abbildung:

$$T_0^p \supset A^p \ni f = \{\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n=\dim X^*} \mathbf{e}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_p} f_{i_1\ldots i_p}\}$$

$$T_0^p \supset A^{n-p} \ni * f = \{\frac{1}{(n-p)!}\sum_{i_{p+1},\ldots,i_n}^{n=\dim X^*} \sum_{i_1,\ldots,i_p}^{n=\dim X^*} \varepsilon^{i_1\ldots i_p}_{i_{p+1}\ldots i_n} \mathbf{e}^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{i_n} f_{i_1\ldots i_p}\}$$

Sobald der Basisraum $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega} \subset R^n$ durch *krummlinige Koordinaten* anstatt durch *Kartesische Koordinaten* abgedeckt ist, ist dessen Koordinatenbasis

$$\{b^1, b^2, b^3\} = \{dy^1, dy^2, dy^3\} \ \textit{versus} \ \{b^1, b^2, b^3\} = \left\{\frac{1}{dy^1}, \frac{1}{dy^2}, \frac{1}{dy^3}\right\}$$

vom Typ „*kontravariant vs. kovariant*“ *weder* orthogonal *noch* normalisiert. Aus diesem Grunde stellen wir **f* (*HODGE star Operator* einer antisymmetrischen multilinearen Funktion *f*, auch als *Dual* von *f* bezeichnet) in einer allgemeinen Koordinatenbasis dar.

Definition (**Hodge star Operator**, der Dual einer antisymmetrischen multilinearen Funktion)

Ist eine antisymmetrische (p,0) multilineare Funktion, die ein Element der schiefen Algebra A^p *bezüglich einer allgemeinen Basis* $\{\mathbf{b}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}^{i_p}\}$ *ist, gegeben als*

$$f = \{\frac{1}{p!}\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n=\dim X^*} \mathbf{b}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}^{i_p} f_{i_1\ldots i_p}\}$$

dann kann der *HODGE star Operator*, der *Dual* von *f*, eindeutig dargestellt werden durch

(i) $$f = \{\frac{1}{(n-p)!}\sum_{i_{p+1},\ldots,i_n}^{n=\dim X^*} \sum_{i_1,\ldots,i_p}^{n=\dim X^*} \sum_{j_1,\ldots,j_p}^{n=\dim X^*} \frac{1}{p!} \mathbf{b}^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}^{i_p} \sqrt{g}\, \varepsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\cdots i_n} g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_p j_p} f_{i_1\ldots i_p}\}$$

(ii) $$* f = \{\frac{1}{(n-p)!}\sum_{i_{p+1},\ldots,i_n}^{n=\dim X^*} \sum_{i_1,\ldots,i_p}^{n=\dim X^*} \frac{1}{p!} \mathbf{b}^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}^{i_n} \sqrt{g}\, \varepsilon_{i_1\ldots i_p i_{p+1}\cdots i_n} f^{i_1\ldots i_p}\}$$

(iii) $$(* f)_{k_1\ldots k_{n-p}} = \{\sum_{i_1,\ldots,i_p}^{n=\dim X^*} \sqrt{g}\, \varepsilon_{i_1\ldots i_p k_1\cdots k_{n-p}} f^{i_1\ldots i_p}\}$$

als ein Element der *schiefen Algebra* A^{n-p} in der allgemeinen zugeordneten Kobasis $\{\mathbf{b}^{p+1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{b}^{i_n}\}$ bezüglich des Basisraums $\mathbf{x} \in \mathbf{\Omega} \supset R^n$ mit Dimension $n = \dim X = \dim X^*$ und $[g^{kl}] = \mathbf{G}^{-1} = adj\,\mathbf{G} / \det \mathbf{G}, \sqrt{g} = \sqrt{|g_{kl}|}$

Wird die Algebra A^p der antisymmetrischen multilinearen Funktionen durch $*1 = \mathbf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^n \in \mathrm{A}^n$ und $*\mathbf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^n = 1 \in \mathrm{A}^0 = \mathrm{R}$ erweitert, so lassen sich folgende Eigenschaften von*f, dem Dual von f, zusammenstellen.

Theorem (**HODGE star operator**, der Dual einer antisymmetrischen multilinearen Funktion)

Sei die linear geordnete Basis $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$ orthonormal („unimodular“). Dann erfüllt der Hodge star Operator einer antisymmetrischen linearen Funktion f, dem Dual von f, bezüglich der Basis $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}$:

(i) $*$ bildet antisymmetrische p-kontravariante tensorwertige Funktionen auf antisymmetrische (n-p)-kontravariante tensorwertige Funktionen ab: $*: \mathrm{A}^p \to \mathrm{A}^{n-p}$

(ii) $\begin{cases} *1 = \mathbf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^n =: \mathbf{E} & \textit{für alle } 1 \in \mathrm{A}^0, \mathbf{E} \in \mathrm{A} \\ *\mathbf{E} = 1 & \textit{für alle } 1 \in \mathrm{A}^n, 1 \in \mathrm{A}^p \end{cases}$

(iii) $**f = (-1)^{p(n-p)} f \quad \textit{für alle } f \in \mathrm{A}^p$

(iv) $f \wedge *f = \|f\|^2 \mathbf{e}^1 \wedge \ldots \wedge \mathbf{e}^n$ *bezüglich der Norm* $\|f\|^2 = \dfrac{1}{p!}\{\sum_{i_1,\ldots,i_p=1}^{n=\dim \mathrm{X}^*} f_{i_1\ldots i_p} f^{i_1\ldots i_p}\}$

Beispiel: HODGE star operator $n = \dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{X}^* = 3$**,**
$\operatorname{span} \mathrm{X}^* = \{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3\}, \mathrm{A}^p \to \mathrm{A}^{n-p}$

$n = 3,\ p = 0: \quad *1 = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3$

$$n = 3,\ p = 1: \quad *\mathbf{e}^{i_1} = \frac{1}{2}\varepsilon^{i_1}_{i_1 i_3}\mathbf{e}^{i_2} \wedge \mathbf{e}^{i_3} \left[\begin{array}{l} *\mathbf{e}^1 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 - \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^2\right) = \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 \\ *\mathbf{e}^2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 - \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^3\right) = \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 \\ *\mathbf{e}^3 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 - \mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^1\right) = \mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 \end{array}\right.$$

$$n = 3,\ p = 2: \quad *\mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} = \mathbf{e}^{i_1 i_2}_{i_3} \left[\begin{array}{l} *\mathbf{e}^1 \wedge \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^3 \\ *\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \\ *\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^2 \end{array}\right.$$

$n = 3,\ p = 3: \quad *\mathbf{e}^{i_1} \wedge \mathbf{e}^{i_2} \wedge \mathbf{e}^{i3} = 1.$

Beispiel: **HODGE star operator einer antisymmetrischen tensor-wertigen Funktion,** $n = \dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{X}^* = 3$, $\mathrm{A}^p \to \mathrm{A}^{n-p}$

unter Anwendung der Summenkonvention

$$n=3,\ p=0: \quad \begin{cases} f & \text{"0 – Differentialform"} \\ * f = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 & \text{"3 – Differentialform"} \end{cases}$$

$$n=3,\ p=1: \quad \begin{cases} f = dx^{i_1} f_{i_1} & \text{"1 – Differentialform"} \\ * f = \frac{1}{2} \varepsilon^{i_1}_{i_2 i_3} dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} f_{i_1} = & \\ = f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 & \text{"2 – Differentialform"} \end{cases}$$

$$n=3,\ p=2: \quad \begin{cases} f = \frac{1}{2} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} f_{i_1 i_2} & \text{"2 – Differentialform"} \\ * f = \frac{1}{2} \varepsilon^{i_1 i_2}_{i_3} \wedge dx^{i_3} f_{i_1 i_2} = & \\ = f_{23} dx^1 + f_{31} dx^2 + f_{12} dx^3 & \text{"1 – Differentialform"} \end{cases}$$

$$n=3,\ p=3: \quad \begin{cases} f = \frac{1}{6} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge dx^{i_3} f_{i_1 i_2 i_3} & \text{"3 – Differentialform"} \\ * f = \frac{1}{6} \varepsilon^{i_1 i_2 i_3} f_{i_1 i_2 i_3} = f_{123} & \text{"0 – Differentialform"} \end{cases}$$

Beispiel: **HODGE star operator,** $n = \dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{X}^* = 3, "\times"$ **product (cross product)**

Mittels des *Hodge star Operators* kann das “×” Produkt (“Kreuzprodukt”) im *dreidimensionalen* Vektorraum interpretiert werden. Werden die Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{X}, \dim \mathrm{X} = 3$ in der orthonormalen („*unimodularen*“) Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dargestellt, dann gilt die folgende *Äquivalenz* zwischen $*\,\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ und $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{x} = \mathbf{e}_i x^i, \mathbf{y} = \mathbf{e}_i y^i \quad (\mathit{Summenkonvention}) \\ &\mathbf{x} \in \mathrm{X}, \mathbf{y} \in \mathrm{Y}, \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} &= \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j x^i y^i = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \left(x^1 y^2 - x^2 y^2\right) + \\ &\quad + \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \left(x^2 y^3 - x^3 y^2\right) + \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \left(x^3 y^1 - x^1 y^3\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow *(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) &= *(\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_i x^i y^i) = *(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2)(x^1 y^2 - x^2 y^2) + \\ &\quad + *(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)(x^2 y^3 - x^3 y^2) + *(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1)(x^3 y^1 - x^1 y^3) \\ &= \varepsilon_{ij}^k e_k x^i y^j \\ *(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) &= \mathbf{e}_3 \left(x^1 y^2 - x^2 y^2\right) + \mathbf{e}_1 \left(x^2 y^3 - x^3 y^2\right) + \mathbf{e}_2 \left(x^3 y^1 - x^1 y^3\right) = \\ &= \mathbf{e}_1 \left(x^2 y^3 - x^3 y^2\right) + \mathbf{e}_2 \left(x^3 y^1 - x^1 y^3\right) + \mathbf{e}_3 \left(x^1 y^2 - x^2 y^2\right) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j x^i y^j \\ &\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j := \varepsilon_{ij}^k \mathbf{e}_k \end{aligned}\right] \Rightarrow \mathbf{x} \times \mathbf{y} = *(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})$$

Die obigen Beispiele sollen dazu dienen, (i) mit dem *Hodge star Operator* einer antisymmetrischen tensorwertigen Funktion in R^3, (ii) seiner Äquivalenz zum „×“ Produkt („*Kreuzprodukt*“) und (iii) seiner *Dualität* im *vierdimensionalen Raum* vertraut zu werden. Diese Dualität spielt eine wichtige Rolle in der Differentialgeometrie und Physik, wie bereits von M.F. Atiyah, N.J. Hitchin und J.M. Singer betont wurde:

Beispiel: **HODGE star operator,** $n = \dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{X}^* = 4, \mathrm{X} \in \mathrm{R}^4$**,** **Minkowski-Raum, Dualität**

(Atiyah, M.F., Hitchin, N.J. und Singer, J.M.:
Self duality in four-dimensional Riemannian geometry.
Proc. Royal Soc. London *A362* (1978) 425-461)

Nähere Einzelheiten sind in meinem Beitrag *E. GRAFAREND (2004)*: Tensor Algebra, Linear Algebra, Multilinear Algebra, Technical Reports, Department of Geodesy and Geoinformatics, Report Nr. 2004.1, ISSN 0933.2839., enthalten.

Die *dritten dualen Beziehungen* berühren die Musik, die *Helmut Moritz liebt*, beispielsweise *Dur – Moll, Tonal – Atonal, und viele andere* in unserer *dritten Tabelle.*

1. THEMA
DUALE BEZIEHUNGEN
Musik

einstimmig – mehrstimmig
ANFANG – ENDE
KONTRAPUNKT – PUNKT (Kunst der Fuge)
makro – mikro
E-MUSIK – U-MUSIK
Polyphone – HOMOPHON
DUR – MOLL
schwarze Tasten – weiße Tasten
VOKAL – INSTRUMENTAL
TONAL – ATONAL
HERBST – FRÜHLING
SOMMER – WINTER
GEFÜHL – WACH DENKEN
SCHNELL – LANGSAM
“Minimal Music - ?Maximum Music?”
(PHIL GLASS)

Wir kommen am Ende meines Berichtes auf PHIL GLASS zurück.

2. Thema: div – rot
HELMOLTZSCHER ZERLEGUNGSSATZ

Für die Geodäsie – Geophysik, allgemein für Geowissenschaft ist die vielleicht wichtigste DUALITÄT die *div-rot Zerlegung*, bekannt unter dem Stichwort „*HELMHOLTZSCHER Zerlegungssatz*“. Worum geht es?

Wir *Geodäten* zerlegen das *nicht-relativistische Gravitationsfeld* in drei Anteile:

- die *Gravitationsstatik* von *I. Newton*
- die *Rotationseffekte* der Planeten a la *E. CARTAN*
- die *Gravitationsdynamik*, die *Rotationsdynamik*, die *EULER-LAGRANGE Deformation*

Die rotierende Erde, der Mond, die Planeten, alle sind *Deformationen des Gravitationsfeldes* und der *Geometrie unterworfen*. Eine natürliche Zerlegung dieses Feldes geschieht in *zwei Anteile*, genannt „*Quelle und Wirbel*“.

Der Quellenanteil lässt sich durch ein skalares Potential darstellen, genannt *Gravitationspotenzial* und *Zentrifugalpotential*. Im Sinne der *Gravitostatik* eines rotierenden Planeten bewirkt das *Zentrifugalpotential* die Abweichung von sphärischer Symmetrie, *zugunsten von ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren*. Die *anderen Effekte* eines *rotierenden deformierbaren Körpers* bewirken zeitlich variable Terme, genannt *EULER-DARWIN Term proportional* zur Zeitableitung des Rotationstermes, die *Polbewegung* und *Tageslängenänderung* („*POLAR MOTION*“ (POM) und „*Length-of-Day*“ (LOD)) durch die *Drehimpulsvariation* (kinematische EULER-Gleichungen/dynamische EULER-Gleichungen/Liouville Bilanzgleichungen). Der *andere maßgebliche Term*, genannt *CORIOLIS Term*, führt zu Strömungen innerhalb eines rotierenden Körpers und ist Grundlage der *Hydrodynamik*. Die zusätzlichen Terme, bezeichnet mit (i) *EULER-DARWIN* und (ii) *CORIOLIS* lassen sich *nicht* durch ein Potential vom skalaren Typ darstellen. Sie bilden den *Wirbel-Anteil*. Im Sinne von „*div - rot*“ oder des *HELMHOLTZSCHEN Zerlegungssatzes* gilt die orthogonale Zerlegung in einen *longitudinalen oder sphäroidalen Anteil* und in einen *transversalen oder toroidalen Anteil*. Kurz gesagt bilden die Anteile des *Quellen- und Wirbelfeldes* dargestellt summarisch zu

2. THEMA
div – rot Zerlegung
HELMHOLTZSCHER Zerlegungssatz

Kopplung von

Gravitation	-	Rotation	-	Deformation
|		|		|
Newton	-	CARTAN	-	EULER-LAGRANGE

Ansatz

$\mathbf{V}(x) = \mathbf{V}^L + \mathbf{V}^T$

orthogonale Zerlegung des Vektorfeldes der Klasse C^2

in: $\mathbf{V}^L - \mathbf{V}^T$: Quelle – Wirbel.

longitudinal oder spheroidal	versus Komponenten	**transversal oder toroidal**
$\text{div}\,\mathbf{V}^L \neq 0$		$\text{rot}\,\mathbf{V}^L \neq 0$
$\nabla \times \mathbf{V}^L = 0$		$\nabla \cdot \mathbf{V}^T = 0$

Wir setzen unsere „*div - rot*“ Zerlegung mit einem Beispiel aus der *Hydrodynamik* fort: laminare Strömung versus verwirbelte Strömung. Ein weiteres Beispiel der „*div - rot*“ Zerlegung haben wir in unserem Beitrag „*Differential Geometry of the Gravity Field*“ by *E. GRAFAREND*: *manuscripta geodaetica* **11** (1986) 29-37. Es ist die Zerlegung

(i) $\operatorname{grad} w,$

(ii) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{e}_\gamma v)$

(iii) $\operatorname{rot}(\mathbf{e}_\gamma u)$

Durch drei skalare Potentiale (u,v,w).

2. THEMA
div – rot

Beispiel:

laminare versus verwirbelte Strömung
(HYDRODYNAMIK)

ANSATZ: $V(x) = \text{grad } w + \text{rot rot}(e_r u) + \text{rot}(e_r u)$
skalare Potentiale $\{u,v,w\}$
BEISPIEL: manuscripta geodaetica **11**(1986) 29-37

„Differential Geometry of the Gravity field“
(E. GRAFAREND)

Zur Information über *planetare Effekte* eines deformierbaren rotierenden Körpers haben wir *im nächsten Bild* Daten zu den Planeten

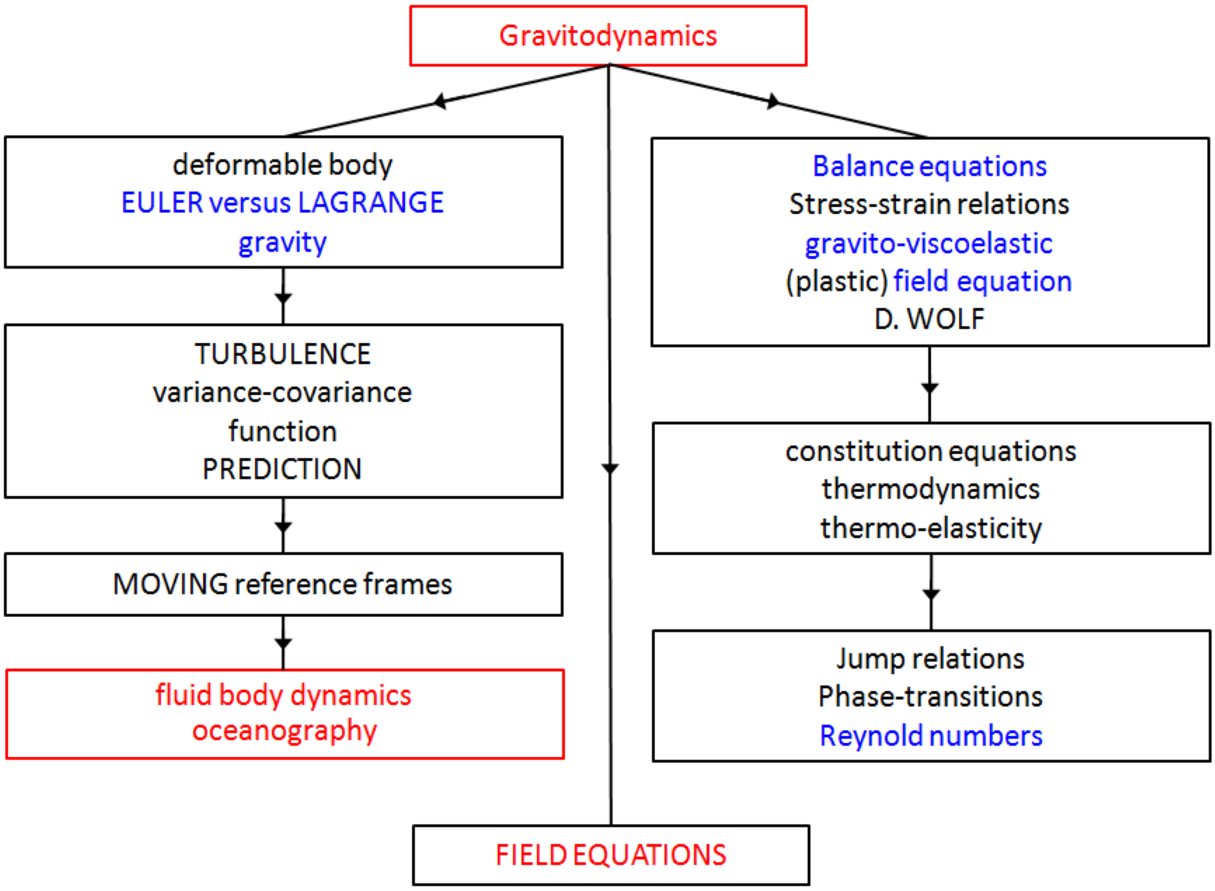
Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun

Gesammelt, und zwar

(i) Schiefe der Ekliptik
(ii) Rotationsperiode
(iii) Bahnbewegung
(iv) Äquatorradius
(v) Anzahl der Monde

Planet	Obliquity	Rotational Period	Orbital Revolution	Equatorial Radius [km]	Moons
MERKUR	0.1°	58.65 days	97.97 days	2439	0
VENUS	177.4°	243.0 days	224.7 days	607	0
EARTH	23.4°	0.99 days	365.26 days	6378	1
MARS	25.2°	1.03 days	681.9 days	3393	2
JUPITER	3.1°	0.41 days	11.86 days	71492	63
SATURN	20.7°	0.45 days	29.46 days	60268	60
URANUS	97.9°	0.72 days	83.75 days	25554	27
NEPTUN	29.6°	0.67 days	163.72 days	24769	13

Höhepunkt unserer kleinen Einführung über Bewegungsformen unserer Planeten sind gesammelt in den *Gleichungen zur Gravitodynamik* eines rotierenden, deformierbaren Körpers. Basis bilden die *Feldgleichungen*, die *Spannungs-Dehnungsbeziehungen*, die sog. *gravito-viskoelastischen Feldgleichungen* entwickelt von *D. Wolf in seiner Habilitationsschrift*. Ihnen stehen die *konstitutiven Gleichungen*, die *Thermodynamik*, *Thermoelastizität*, *Sprungrelationen*, *Phasenübergänge*, z.B. *REYNOLD Zahlen zur* *Seite*, *Turbulenz-Effekte* und die beweglichen *Bezugssysteme* („*Moving Reference Frames*“) gegenüber. Sie sind aus geodätischer *Sicht von zentraler Bedeutung*.



Als *konkretes Beispiel* für die „*div - rot*" Zerlegung beenden wir diesen kurzen Abschnitt mit der (rot,div) Bilanz eines rotierenden Körpers durch die Terme

(i) Massendichte ρ

(ii) $\operatorname{div} \mathbf{X}^{\bullet}$

(iii) „omega squared"

(iv) $\operatorname{grad}\langle \boldsymbol{\gamma}^{\bullet} | \boldsymbol{\omega} \rangle$

(v) $\langle \omega | \operatorname{rot} \mathbf{X}^{\bullet} \rangle$

Erweitert durch die *Bilanzgleichungen*

(I) fester Körper und (II) hydrostatisch vorgespannten elastischer Körper

FIELD EQUATIONS

curl equ.: $$\operatorname{rot}\boldsymbol{\Gamma} = -2\boldsymbol{\omega}\,\operatorname{div}\mathbf{x}^{\bullet} + \boldsymbol{\Omega}\,\operatorname{grad}\langle \mathbf{x}^{\bullet} \mid \boldsymbol{\omega} \rangle - $$
$$- 2\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{x}\,\operatorname{rot}\mathbf{x}^{\bullet} - 2\boldsymbol{\omega}^{\bullet}$$

divergence equ.: $$\operatorname{div}\boldsymbol{\Gamma} = 4\pi\rho + 2\omega^{2} + 2\langle \boldsymbol{\omega} \mid \operatorname{rot}\mathbf{x}^{\bullet} \rangle$$

VORTICITY $\operatorname{rot}\mathbf{x}^{\bullet}$

rigid body	hydrostatic prepressed elastic body
$\operatorname{rot}\Gamma = -2\omega^{\bullet}$	$\boldsymbol{\Sigma} = -p\,\mathbf{I} + c\,\mathbf{E}$
$\operatorname{div}\Gamma = 4\pi g\rho + 2\omega^{2}$	stress tensor

balance equations

$$d_{tt}(\rho(\mathbf{x},t)) = \rho\mathbf{I} - \operatorname{grad} p =$$
$$= \rho\,\operatorname{grad}\,(\mathrm{U} + \tfrac{1}{2}\,|\,\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{x}\,|^{2}) - \operatorname{grad} p$$

CHANDRASEKHAR'S VIRIAL METHOD

virial equations of order zero, one, two and higher order

EQUILIBRIUM figures of higher order

BIFURCATION

3. Thema

Dualität H. MORITZ – M.S. MOLODENSKIJ

Die *Grundlage der Geodäsie* bilden die *Deformationen der verschiedenen geometrischen Höhen* und der *diversen physikalischen Höhen und deren Systemtransformationen*, zu denen

H. MORITZ und M.S. MOLODENSKIJ

maßgeblich beigetragen haben. Sie sind polare Wissenschaftler: M.S. Molodenskij *scheu und zurückhaltend*, H. Moritz *überaus kontaktfreudig und gesprächsbereit*. *Helmut Moritz bezeichnet M.S. Molodenskij* aufgrund seiner *genialen Beiträge* von weitreichender Bedeutung als

verhinderten Nobel-Preisträger.

Leider habe ich nicht in den *20 Minuten meines Vortrages nicht genügend Zeit und Raum*, um die genialen Beiträge der *dualen Persönlichkeiten*

H. Moritz und M.S. Molodenskij

„*standesgemäß*“ zu würdigen. Lassen wir Ihre beiträge sprechen.

Wir starten mit den *geometrischen Höhensystemen*, begründet von *C.F. Gauss*:

Er schlug vor, daß ein Geodät einen *topographischen Punkt orthogonal auf das Referenzellipsoid projezieren sollte*. Dessen große Halbachse sollten die Mittel aus *experimentell* bestimmter großen und kleiner Halbachse eines Rotationsellipsoids zugrunde gelegt werden. Das Referenzellipsoid sollte gleichzeitig eine Äquipotentialfläche des Normal-Potentials sein, gebildet aus einer *Potential-Entwicklung zweiten Grades* unter *Einschluß der Rotation*. *Dieses Referenzsystem liegt dem Konzept* der *GPS-Koordinaten* zugrunde.

M.S. Molodenskij dachte lange nach und entwickelte in den 50er Jahren des vorigen Jahrhunderts eine *bessere Approximation der Topographie* mit dem Konzept des *TELLUROIDS* auf der *Basis der Außenraumdarstellung des Somigliana-Pizzetti Normalfeldes*, als gekrümmte Lotlinie und der *Eichung* W(P) = w(p), gegenwärtig diskutiert von *F. Sanso* und anderen. W(P) stellt das Schwerepotential eines *topographischen Punktes* dar, w(p) das *Normalpotential* des *topographischen Punktes* berechnet im Außenraum eines *SOMIGLIANA-PIZZETTI Normalfeldes*.

C.F. GAUSS hatte in den 40er Jahren des 19. Jahrhunderts einen sehr talentierten *Ph.D. Studenten* namens *Listing*. Er studierte Höhen und Höhensysteme und begründete das *GEOID* als Gleichgewichtsfigur im Niveau des *Mittleren Meeresspiegels* („*Mean Sea Level*“). Nachfolgend wurden *mindestens* 10^3 Beiträge dem *Gauss-Listing Geoid* gewidmet. Später wurde Listing erster Direktor des *physikalischen Instituts der Universität Göttingen*. Er schrieb die erste Monographie zur *Topologie* als *eine fundamentale Struktur in der Mathematik*.

C.F. Gauss zählt zu den *Begründern des Potential-Begriffes*. Später benutzte ein weiterer großer Geodät,

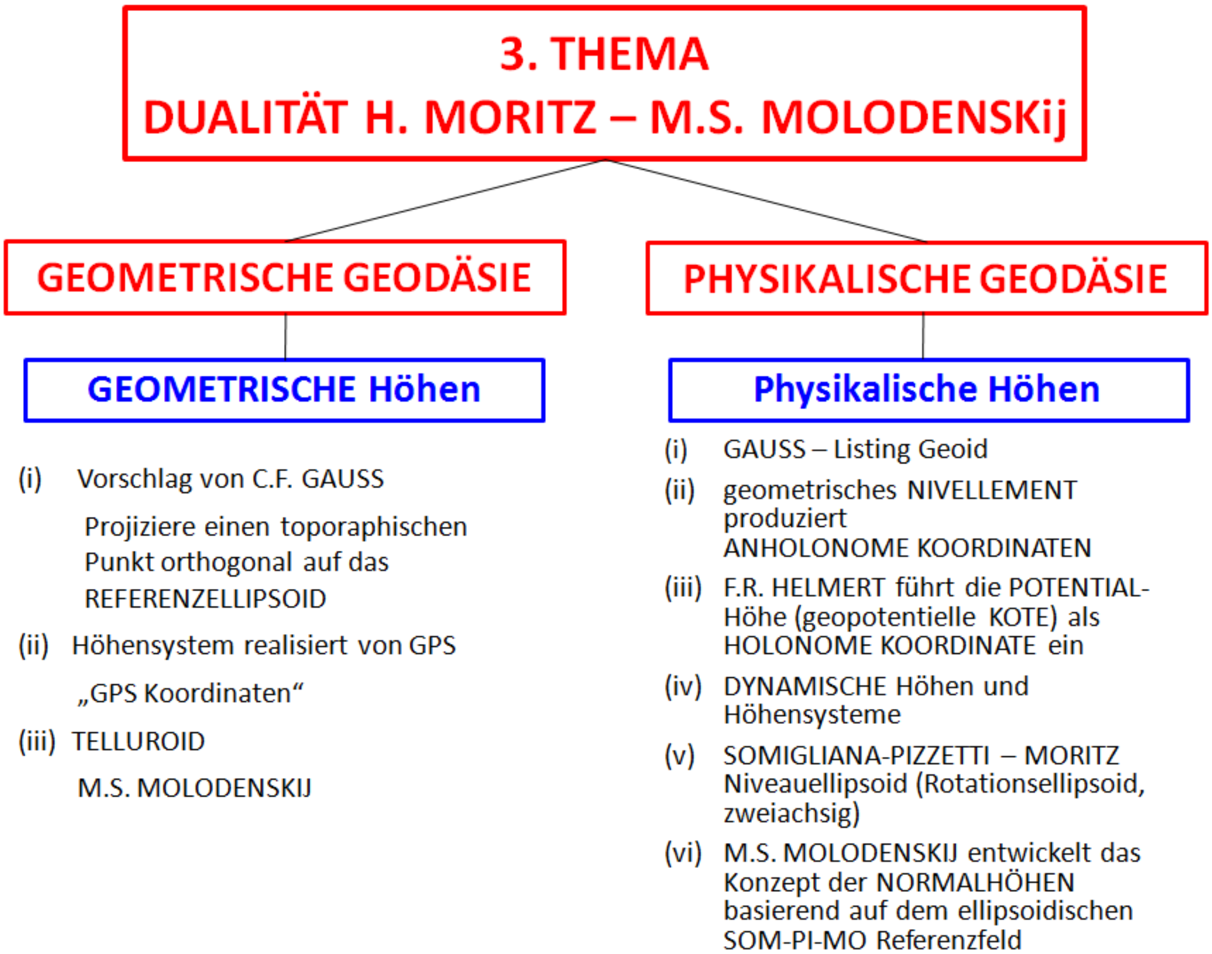
F.R. Helmert

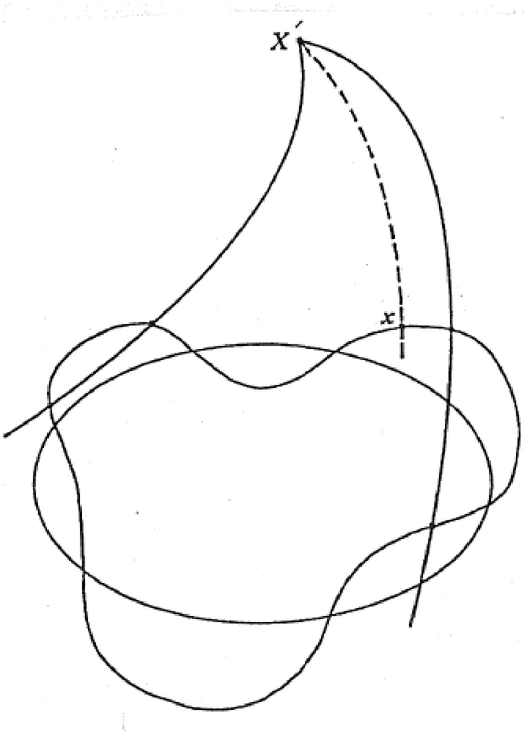
das *GAUSS Potential* für sein Konzept von *holonomen Höhen*. Er wies als erster nach, daß *geometrische Höhen* der geodätischen Praxis *anholonom* sind, d.h. nicht integrabel! Er ist der Begründer *von Differentialformen in der Geodäsie*.

Das physikalische Höhenkonzept, die sog. dynamischen Höhen basierend auf dem *GAUSS-LISTING Geoid* und seiner *ellipsoidischen Approximation der Niveau-Fläche* von

SOMIGLIANA-PIZZETTI-MORITZ

dominierte in Folge die reichhaltige Welt der verschiedenen Höhensysteme, die wir leider nicht schildern können. Bemerkenswert ist das Konzept der und des *Quasi-Geoids*, welches wir nicht näher darstellen können. Stattdessen empfehlen wir einen kurzen Blick auf unser *drittes Thema* in den nachfolgenden Abbildungen zu werfen, insbesondere um ein Gefühl für *projektive Höhen* zu entwickeln.





Projektive Höhen im Schwereraum, minimale-Distanz-Abbildung bezüglich einer Referenz-Äquipotentialfläche, das *Geoid* w_0 = 62 636 856, 5 m^2/s^2, zu einer *Referenzepoche* t_0, *orthometrische Höhe* h_G (Länge der Lotlinie/orthogonale Trajektorie von $X \in T^2$ nach $x \in \text{GEOID}$), Darstellung des Geoids bezüglich eines Rotationsellipsoids $\mathbf{E}^2_{a,b}$ nach J. ENGELS und E. GRAFAREND (1992a,b).

Den Höhepunkt meines Berichtes bilden 4 Darstellungen aus unserem Beitrag „*Molodenskij potential telluroid based on a minimum-distance map, case study: the quasi-geoid of East Germany in the World Geodetic Datum 2000*“ veröffentlicht von

A.A. Ardalan, E.W. Grafarend, J. Ihde
Journal of Geodesy **76** (2002) 127-138

The telluroid as introduced by M.S. Molodensky (1945, 1948, 1960) may be considered the best analytical representation of the irregular surface of the Earth. Given the placement vector of a point in geometry space, for instance by GPS (global problem solver), and reference gravity potential in gravity space, the telluroid can be uniquely defined by a properly chosen projection. For instance, astronomical longitude/astronomical latitude (spherical coordinates in gravity space) at a topographic point could be defined to coincide with reference longitude/reference latitude (spherical coordinates in reference gravity space) at a telluroid point in order to establish an isoparametric mapping of the

telluroid. Bode and Grafarend (1982) extensively studied such an isoparametric telluroid mapping with respect to a reference gravity potential which is additively decomposed into (1) the zero-order coefficient of a spherical harmonic expansion of the gravitational potential and (2) the centrifugal potential. In particular, they succeeded in identifying the singular points of such a telluroid map. Here we aim at an ellipsoidal telluroid mapping, which is set up as follows.

Best Fit, Som – Pi Field

Analytically we can formulate the above-stated optimisation problem by minimising the constraint Lagrangean

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}(x_1,x_2,x_3,x_4) :&= \|\mathbf{x}-\mathbf{X}\|^2 + x_4(W_P - w_p) \\
&= [x - X(x_1,x_2,x_3)]^2 + [y - Y(x_1,x_2,x_3)]^2 \\
&\quad + [z - Z(x_1,x_2,x_3)]^2 \\
&\quad + x_4[W(x_1,x_2,x_3) - w_p] \\
&= \min_{x_1,x_2,x_3,x_4}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3,\hat{x}_4) = \min_{x_1,x_2,x_3,x_4} \mathbf{L}(x_1,x_2,x_3,x_4) \tag{2}
$$

Definition 1. *Somigliana–Pizzetti field as the gravity field of a rotational ellipsoid.*

Explicit form in terms of fundamental geodetic parameters $\{a, b, W_0, \Omega\}$ (according to Grafarend and Ardalan 1999)

$$
\begin{aligned}
W(\phi,u) &= \left(W_0 - \frac{1}{3}\Omega^2 a^2\right)\frac{\cot^{-1}(\frac{u}{\varepsilon})}{\cot^{-1}(\frac{b}{\varepsilon})} + \frac{1}{3}\Omega^2(u^2+\varepsilon^2) \\
&\quad + \left\{\frac{1}{3\sqrt{5}}\Omega^2 a^2 \frac{(3\frac{u^2}{\varepsilon^2}+1)\cot^{-1}(\frac{u}{\varepsilon}) - 3\frac{u}{\varepsilon}}{(3\frac{b^2}{\varepsilon^2}+1)\cot^{-1}(\frac{b}{\varepsilon}) - 3\frac{b}{\varepsilon}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3\sqrt{5}}\Omega^2(u^2+\varepsilon^2)\right\}\frac{\sqrt{5}}{2}(3\sin^2\phi - 1)
\end{aligned}
$$

Case study:
potential quasi-geoid of East Germany

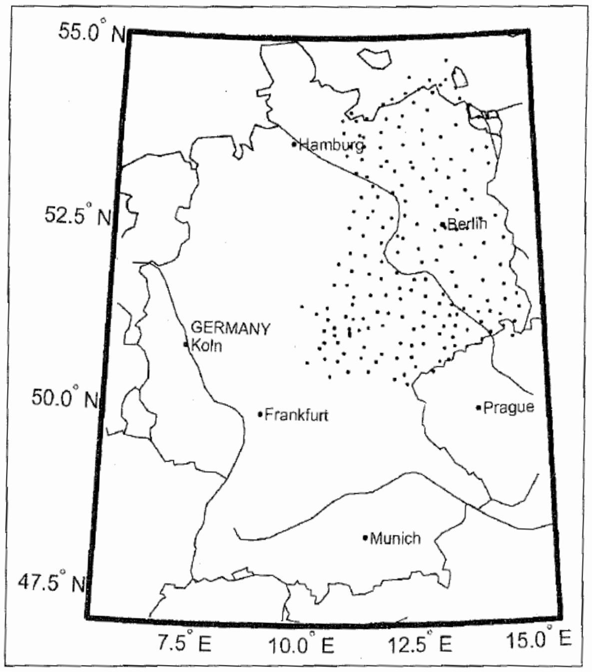


Figure: The 196 GPS stations in the eastern part of Germany. Equidistant conic projection; standard parallels: 50°N and 52.5°N; reference ellipsoid: WGD2000

Case study:
potential quasi-geoid of East Germany

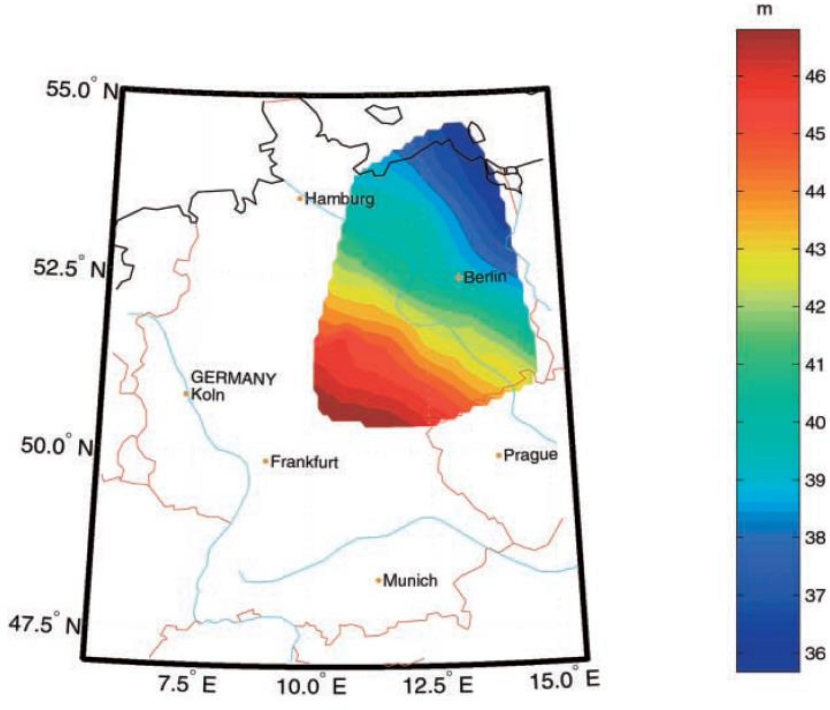


Figure: Quasi-geoid map of East Germany, based on the minimum-distance mapping of the physical surface of the Earth to the Somigliana Pizzetti telluroid. The quasi-geoid undulations are in the interval 35.609 to 47.501 m. Equidistant conic projection; standard parallels: 50°N and 52.5°N; reference ellipsoid: WGD2000

Lieber Helmut,

kommen wir zum Schluß meines "*kurzen Beitrages*". In diesem Jahr ging der *Physik-Nobel-Preis* an

Peter HIGGS und Francoise ENGLERTS

Sie gaben eine Antwort auf folgende Fragen:

? *Woher kommt die Masse von Elementarteilchen*?

?*Was ist der Ursprung der Gravitation*?

Du nanntest in einer posthum veröffentlichten Arbeit *S.M. Molodenskij* als seinen Nobelpreisträger!

DAGEGEN sage ich HEUTE: *Helmut, DU BIST MEIN NOBEL-Preisträger*!

Wir haben lange nachgedacht zu Hause. WAS KANN ICH HELMUT als Geschenk machen? Da kam mir eine Idee: wir hörten vor einiger Zeit eine OPER des zeitgenössischen KOMPONISTEN *PHIL GLASS*, den wir in diesem Jahr „life" in HELSINKI erlebt haben. Seine berühmte Oper trägt den zu *Helmut passenden Titel*

EINSTEIN ON THE BEACH!

Mein Vortrag zum Ehren-Kolloquium von *Helmut Moritz* hielt ich am 15. November 2013 AD bei der *Leibniz-Societät der Wissenschaften zu Berlin*. *Ich danke Helmut für die jahrelange Unterstützung und Förderung*. Besonderen Dank schulde ich *Dr. T. Reubelt* für all seine Mühe bei der Reinschrift dieses Manuskripts.