Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin *113(2012), 15–21*

Erik W. Grafarend

Von A. Einstein über H. Weyl und E. Cartan zur Quanten-Gravitation

Vortrag in der Klasse für Naturwissenschaften am 13. Oktober 2011

Meinen Beitrag widme ich dem am 12. April verstorbenen lieben Kollegen
WILFRIED SCHRÖDER „Pionier der Relativitätstheorie“

Wir beginnen mit Fragen:

? Worin besteht das Geheimnis von A. Einsteins Relativitätstheorie?
? Worin besteht die Erweiterung der Einsteinschen Theorie von E. Cartan: Spin, das äußere Differentialkalkül?
? Worin besteht der Anstoß von H. Weyl zur Einsteinschen Geometriedynamik: Eichtheorie, Gauge-Theorie?
? Was hat sich seit 1916 verändert: Quanten-Gravitation: Quanten-Physik?

Wir sind nicht in der Lage, in der vorgesehenen Redezeit die physikalischen Probleme zu vertiefen, wir können nur kurz die einzelnen Themen umreißen. Es gibt zu unserer Thematik 1000 Zeitschriften, Beiträge und ebenso viele Bücher.

Gibt es Vorläufer zur Einsteinschen Relativitätstheorie, auch Arbeiten, die auf seine Arbeiten aufbauen?

Wir nennen hier nur einige wenige Arbeiten, die über Google einfach zu finden sind. Sie sind beispielsweise zu finden in den großartigen Übersichtsbeiträgen „The Concepts of Space and Time“, *M. Capek*, D. Reidel Publ., Dordrecht-Boston 1976, oder „The Philosophical Problems of Space and Time“, *A. Grünbaum*, 2. Auflage, D. Reidel Publ., Dordrecht-Boston 1973:

- R. L. Boscovich: *Criticism of Newton's proof of absolute motion*,
- W. K. Clifford: *Bending of space, space-time matter*,
- E. Mach: *Criticism of Newton's concept of absolute space*,
- H. Poincare: *The measure of time*,
- A. Einstein: *Critic of classical models of aether*,

- H. Minkowski: *The union of space and time*,
- H. Reichenbach: *The principle of equivalence, the clock paradox*,
- K. Gödel: *Static interpretation of space-time*,
- A. Einstein: Comment to Gödel,
- A. S. Eddington: *The arrow of time, entropy and the expansion of the universe*,
- R. B. Linsay and H. Morgenau: *Time: continuous or discrete*,
- A. N. Whitehead: *The inapplicability of the concept of instant on the quantum level*,
- N. Wiener: *Spatio-temporal continuity, quantum theory and music*,
- D. Böhm: *The inadequacy of Laplacean determinism and the irreversibility of time*,
- H. Weyl: *The open world.*

Gibt es geodätische Beiträge zur Einsteinschen Relativitätstheorie? Ja, natürlich! Wir nennen nur außerordentlich wenige:

- H. Moritz und B. Hofmann-Wellenhof: *Geometrie, Relativität, Geodäsie*, Wichmann Verlag, Karlsruhe 1993
- M. H. Soffel: *Relativity in Astronomy, Celestial Mechanisms and Geodesy*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 1989
- S. Heitz und E. Stöcker: *Grundlagen der Physikalischen Geodäsie*, Dümmler Verlag, Bonn 1994

und Doktorarbeiten, zum Beispiel *J. Müller* (1991) und *V. Schwarze* (1998).

Meine eigenen Arbeiten zur Relativitätstheorie starteten im Jahre 1968 zum Thema „Nichtlokale Feldtheorie“ und zur „Kawaguchi-Differentialgeometrie“ und wurden in der Zeitschrift „Research Association for Applied Geometry“ (RAAG) in Tokyo veröffentlicht. Dieser Arbeit folgte im Jahre 1973 meine Arbeit „Le theorem de conservation de la courbure et de la torsion“ im Bulletin Geodesique 109(1973)237-260. Dem folgten „*E. Grafarend and P. Defrise*: Torsion and Anholonomity of Geodetic Reference Frames“ im Jahre 1976, “*E. Grafarend and M. Fujimoto*: Spacetime coordinates in the Geocentric Reference Frame” im Jahre 1986, “*E. Grafarend und V. Schwarze*: GPS: Relativistische Positionierung, Phys. J. 1(1991)39-45” und „*E. Grafarend and G. Joos*: Relativistic Computation of Geodetic Satellite Orbits“ im Jahre 1992.

Aktuelle Probleme sind stichwortartig:

- Topologie der Raum-Zeit
  - Kausale Theorie: Geschlossene oder offene Zeit?
  - Pfeil der Zeit: Von der Vergangenheit in die Zukunft

– Anisotropie der Zeit: Ist die Eigenzeit eine Geodätische?

- Krümmung gleich Gravitation
- Riemann-Geometrie
  - Einbettung: Riemann-Krümmung basiert relativistisch auf einer 3+1=4-dimensionalen Welt. Immersion in 6+4=10-dimensionale pseudo-Euklidische Differentialgeometrie abgesehen von Singularitäten, sog. „Black Holes".

Einstein's Theorie basiert auf einer metrischen Struktur der Raum-Zeit.

Beispiel

Holonome Koordinaten	⟷	Pseudo-orthonormale Koordinaten *oder* Differentialformen *oder* anholonome Koordinaten

$$ds^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^{4} g_{\alpha\beta}\, \mathrm{d}y^{\alpha}\, \mathrm{d}y^{\beta} \quad \leftrightarrow \quad (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 - (\omega^4)^2$$

GRAM-SCHMIDT Orthonormalisierung

- Das Zentrum der Erweiterung besteht in der Theorie der Konnektion, insbesondere der linearen Konnektion, Stichwort „Parallelverschiebung".

Kovariante Ableitung *versus* kovariantes Differential

Drei Komponenten der linearen Konnektion

Γ_1 *Christoffel Symbole* $\{\alpha\ \beta^{\gamma}\}$: symmetrisch, Einstein Theorie.

Γ_2 *Cartan Torsion*: antisymmetrisch, SPIN Freiheitsgrade. Siehe Springer Buch über den Schriftwechsel A. Einstein und E. Cartan.

Γ_3 *Weyl Eichung*: Semi-symmetrische Konnektion

Zitat von J. A. Schouten:

Ricci Calculus, Springer Verlag, 2. Auflage, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954
Seite 134:

"The Geometry of … is based on two different transformation groups, (i) the group coordinate transformations and (ii) the group of conformal transformations."

? Was ist Einstein-Eichung („GAUGE Theory“)?

Die Einstein-Eichung bestimmt nicht vollständig die komplette Eichung. Da Singularitäten in der Lösung der Einsteinschen Feldgleichung auftreten können, können Koordinaten-Transformationen keine Gruppe bilden.

Die Einstein-Eichung basiert auf „harmonischen Koordinaten“:
Kovariate Ableitung: $\mathrm{D}x^{\mu} = 0$: 4 Gleichungen

„Harmonische Koordinaten produzieren eine konforme Abbildung“: Bezug zu H. Weyl.

Einstein-Cartan-Theorie

Programm:

i. Führe eine lineare Konnektion ein,
ii. Formuliere eine invariante Optimierungsfunktion,
iii. Löse die zugehörige Euler-Lagrange Gleichung als Lösung der gesuchten kovarianten Differentialgleichug.
    a. Feldstärke ist eine 2-Differentialform mit Bezug zur Krümmung *R*
    b. Berücksichtige zwei Bianchi Identitäten
    c. Führe eine Metrik ein:
       kovariante Ableitung $\mathrm{D}g := \mathrm{d}g - \Gamma \wedge g - g\Gamma = 0$

Die Metrik-Bedingung führt auf ein System von $H \times 10 = 40$ reellwertigen Gleichungen; sie sind linear in 64 unbekannten Konnektionssymbolen $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

Einstein-Cartan-Theorie

Die Lorentz-Gruppe enthält die Metrik.

$\boxed{\text{Reduktion}}$

„GL_4^+ reduced to SO(3,1)“

Darstellung des Orthonormalisierungs-Prozesses à la Gram-Schmidt

(6-dimensionale LIE-Gruppe)

Produktion der Feldgleichungen

Hilbert-Einstein Variationsprinzip

Funktional:

$$S(g_{\alpha\beta}) := -\frac{c^2}{3L\pi G}\int_{M_4} \text{Ricci Krümmung}$$

A. Einstein arbeitete von 1907 bis 1915 an der korrekten Form der gravitativen Feldgleichungen. Am 20. November 1915, fünf Tage vor A. Einstein, präsentierte D. Hilbert seine Ableitung der gravitativen Feldgleichungen, basieren auf der Mie'schen Theorie des Elektromagnetismus der Materie und konnte die Versuche Einsteins, den Effekt der Gravitation in die Verallgemeinerung der Speziellen Relativitätstheorie einbeziehen.

Gravitative Kupplungskonstante

„Wirkungsprinzip"

Konkret ist das Wirkungsprinzip von D. Hilbert – A. Einstein definiert als Optimierung des Funktionals

$$S(\text{Ricci}\,[\mathrm{g}_{\alpha\beta}]) := -\frac{c^2}{2\pi G}\int \mathrm{d}x^4\,|-g_{\alpha\beta}|^{\frac{1}{2}} R^{\alpha\beta}$$

angereichert durch die Kopplung der Materie. Die Basisannahmen zur Relativitätstheorie sind: (i) $c = c'$ in verschiedenen Inertialsystemen, (ii) inertiale Gravitation ist balanciert durch die kinematische Beschleunigung, es gilt schwache Kopplung à la Newton: schwere ist gleich träge Masse, (iii) alle Bezugssysteme sind gleichwertig, (iv) es gilt die pseudo-Riemann Geometrie für die Raum-Zeit, (v) die Raum-Zeit ist pseudo-metrisch, (vi) es gelten die Hilbert-Einstein-Gleichungen der Gravitation.

Einstein-Gleichungen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} + (\Lambda\, g_{\mu\nu}) = \frac{1}{c^2}\, g\, \pi\, G\, T$$

G bezeichnet die Gravitationskonstante, die sog. Kopplungskonstante, *T* ist der berühmte Energie-Momenten-Tensor. $R_{\mu\nu} - R/2$ bezeichnet den Einstein Tensor, eine symmetrische Matrix, $R_{\mu\nu}$ steht für die Ricci-Krümmung, R für den Krümmungs-Skalar.

Cartan-Gleichungen

„Spin ist die Quelle der Cartan Torsion"

Der Spin wird balanciert durch die fundmentale Gleichung: Spin-Strom ist gleich $-\frac{g\pi}{c^2}G$ mal Torsion $S_{\mu\nu}$. Notizen (i) „Der Spin verschwindet außerhalb des Körpers": $S_{\mu\nu}$ ist antisymmetrisch, (ii) Spin wurde entdeckt von den holländischen Physikern *G. E. Uhlenbeck und S. A. Goudsmit* im Jahre 1925 an Experimenten mit Alkali und Wasserstoff, die später mit dem Nobel-Preis für Physik geehrt wurden, (iii) der Effekt bildet die Grundlage für Super-Gravitation und der Gravitationsstrahlung.

Seit 75 Jahren arbeiten Experimental-Physiker und Theoretische Physiker an der Quantisierung der Gravitation, der sog. „Quantum Gravitation" als Verallgemeinerung der Quanten-Mechanik und der Quanten-Elektrodynamik. Basis ist die Planck Länge ℓ_P, die Planck Zeit t_P, und die Planck Masse m_P, namentlich das Planck'sche Wirkungsquantum h, G die Kopplungskonstante der Gravitation und die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c. Es gelten die Abschätzungen

$$\ell_P = \sqrt{\frac{hG}{c^2}} = 1{,}42 \cdot 10^{-33} cm$$

$$t_P = \sqrt{\frac{hG}{c^5}} = \frac{\ell_P}{c} = 5{,}40 \cdot 10^{-11}$$

$$m_P = \sqrt{\frac{hc}{G}} = \frac{h}{\ell_P c} = 2{,}17 \cdot 10^{-5} g = 1{,}22 \cdot 10^{19} GeV$$

Es ist zu erwarten, dass jenseits der Planck'schen Länge und jenseits der Planck'schen Zeit andere physikalische Gesetzte gelten: Ein Beispiel ist das gesuchte *Higgs Teilchen*, welches gegenwärtig von CERN gesucht wird und das maßgebend für die gravitative Wechselwirkung (Graviton, Gravitino) sein könnte.

Doch die Quanten-Gravitation ist ein anderes Thema. Hier sind wir engagiert an der Einstein-Cartan Geometrodynamik, an den Feldgleichungen von A. Einstein und E. Cartan, nämlich an Gravitation, Spin, Materie, klassisch.

Doch zumindest nennen wir grundlegende Arbeiten zur Quanten-Gravitation: *C. Kiefer* (2007): Quantum Gravity, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford 2007; *D. Giulini, C. Kiefer und C. Lämmerzahl* (2003): Quantum Gravity: From Theory to Experiment Search, Springer Verlag, Berlin 2003. Zum Thema Einstein-Cartan Gravitation empfehle ich die Review-Beiträge von *F. Gronwald und F. Hehl* (1996): On the Gauge Aspects of Gravity, in: Proc, 14th Course of the School of Cosmology and Gravitation on Quantum Gravity, held at Erice/Italy/*P. G. Bergmann, V. de Sabbata und H. J. Treder*: World Scientific, Singapore 1996; *M. A. Kastrup* (2008): On the advancements of conformal transformations and their associated symmetries in geometry and theoretical physics, Ann. Phys. 17(2008)631-690; *S. Tomonaga* (1997): The Story of Spin, University of Chicago Press, Chicago 1997; *B. Mashoon, F. W. Hehl und D. S. Theiss* (1984): The Thirring-Lense Papers, General Relativity and Gravitation 16(1984)711-750; und *F. W. Hehl, P. v. d. Heide und G. D. Kerlick* (1978): General Relativity with Spin and Torsion: Foundations and Prospects, Rev. Modern Phys. 48(1978)393-416.

Meinerseits danke ich G. Knop (Bonn) zum Thema Spin and Quantum Gravitation (Nuclear Physicist), F. Hehl (Köln) zum Thema Spin und Eichtheorie sowie Cartan Torsion (Theoretische Physik) und W. Kühnel (Stuttgart) zum Thema Differentialgeometrie, Gruppentheorie und Einstein Räume (Differentialgeometer, Gruppentheoretiker) für viele Diskussionen und Anregungen.

Mein 20-minütiger Beitrag ist nur als Einstieg zu betrachten. Meiner Meinung nach ist in den Angewandten Wissenschaften die Einstein-Cartan Theorie und der Wert der von H. Weyl angestoßenen Eichtheorie zu unrecht stark vernachlässigt worden. MRT (Magnetic Resonance Tomography) ist nur ein großartiges Anwendungsgebiet zur Spin-Magnetismus Kopplung.