Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät *78/79(2005), 277–290*

Horst Montag

Zu relativistischen Effekten in der Satelliten- bzw. Raumgeodäsie

1. Einleitung

Die bahnbrechenden Erkenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie – von Albert Einstein vor hundert Jahren, im Jahre 1905, veröffentlicht – und deren Erweiterung durch die Allgemeine Relativitätstheorie aus dem Jahre 1916 haben die klassische Physik von Galileo und Newton grundlegend weiterentwickelt. Die ursprünglich reine wissenschaftliche Theorie kann heute bei vielen physikalisch- technischen Prozessen und Vorgängen bis in den ingenieurtechnischen Bereich hinein nicht vernachlässigt werden. Dabei sind aber meist die Näherungen durch die Parametrisierte Post Newton'sche Theorie (PPN) ausreichend.

Auch in der Satellitengeodäsie spielen relativistische Effekte mehr und mehr eine wichtige Rolle. Das betrifft sowohl die Spezielle Relativitätstheorie (Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, Zeitdilatation) als auch die Allgemeine Relativitätstheorie (Einfluss des Gravitationsfeldes auf Raum und Zeit).

Eine wesentliche Voraussetzung für die relativistische Behandlung der Satellitengeodäsie ist die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems sowie der dazugehörigen Metrik für die Modellierung und Analyse. Dazu gehören auch relativistische Transformationen aller Messungen und anderer Parameter in dieses System und gegebenenfalls Transformation der Ergebnisse nach der Analyse.

Speziell wirken sich in der Satellitengeodäsie relativistische Effekte auf drei Bereiche aus, und zwar auf die Bewegungsgleichungen der Satelliten, auf die Signalausbreitung und auf die bewegten Uhren, insbesondere die Uhren im Satelliten.

Die Zahl der einzubeziehenden Effekte steigt natürlich mit der Steigerung der Genauigkeit von Bahnbestimmung und Messung. Die heute in der Satelliten- oder Raumgeodäsie erreichbaren relativen Genauigkeiten für die Koordinatenbestimmung liegen bei 10^{-9}. Um das zu erreichen, sind für die Zeit bzw. Frequenz der Mikrowellenmessverfahren Genauigkeiten im Bereich von 10^{-13} oder 10^{-14} erforderlich. Mindestens in diesem Umfang müssen relativistische Einflüsse beachtet werden. Vielfach werden relativistische Effekte auch durch die Messverfahren kompensiert oder bei der Bahnanalyse durch andere Parameter aufgefangen.

Andererseits ermöglichen die heute erreichbaren hohen Genauigkeiten auch, relativistische Effekte experimentell zu bestätigen bzw. erstmalig nachzuweisen und damit einen Beitrag zur weiteren Verfeinerung der Relativitätstheorie zu liefern.

Bei den nachfolgenden Betrachtungen werden nur Effekte erörtert, deren Einflüsse für die Satelliten- bzw. Raumgeodäsie im erwähnten Sinne bereits heute relevant sind bzw. schon sehr bald von Belang sein können. Dabei wird auf Ableitungen verzichtet. Die angegebenen Formeln stellen teilweise Näherungen dar, berücksichtigen dabei aber die heute und in naher Zukunft zu erwartenden Genauigkeiten in der Satelliten- bzw. Raumgeodäsie.

2. Raum-Zeit-Koordinatensysteme und Bewegungsgleichungen

Für globale Anwendungen, wie sie in der Satelliten- bzw. Raumgeodäsie vorherrschen, sind äquatorial ausgerichtete kartesische Koordinatensysteme zweckmäßig. Dabei ist grundsätzlich zwischen einem raumfesten System für die Bahnmodellierung und einem erdfesten mitrotierenden System für terrestrische Objekte (Stationskoordinaten und andere Parameter) zu unterscheiden.

In Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie haben die IAU (International Astronomical Union) und IUGG (International Union of Geodesy and Geophysics) ab 1991 (insbesondere 2000) in mehreren Resolutionen von Generalversammlungen zwei äquatorial ausgerichtete Raum-Zeit-Koordinatensysteme und die Transformationen zwischen ihnen auf PPN-Niveau definiert (McCarthy und Petit (Eds.), 2004). Es handelt sich dabei um das BCRS (Barycentric Celestial Reference System) mit dem Ursprung im Baryzentrum des Sonnensystems und das GCRS (Geocentric Celestial Reference System) mit dem Ursprung im Massenschwerpunkt der Erde. Beide sind Äquatorsysteme, haben die gleiche Orientierung und weisen keinerlei Rotationen auf. Die Realisierung (jeweils als Frame statt System bezeichnet) und Überwachung erfolgt durch den International Earth Rotation Service (IERS) durch Bezug auf die Quasare, heute mit einer Genauigkeit von 20 Mikro-Bogensekunden (VLBI-Messungen). Damit ist das BCRS für das Sonnensystem als Inertialsystem auch konform mit der Newton'schen Mechanik und entsprechend der Speziellen Relativitätstheorie ist hier wie in jedem Inertialsystem die Lichtgeschwindigkeit c konstant. Dennoch ist ein geozentrisches System für die Bahnbeschreibung von Erdsatelliten besser geeignet, zumal nennenswerte relativistische Effekte – beschrieben durch die Schwarzschild-Metrik – nur vom Gravitationsfeld der Erde herrühren. Gravitative Variationen durch Sonne, Mond und Planeten wirken sowohl auf die Erde als auch auf die Erdsatelliten und sind so reduziert auf ihren Gezeiteneinfluss mit äußerst geringen relativistischen Effekten. Das genannte geozentrische GCRS bewegt sich auf der Ekliptik um die Sonne, und es treten, obwohl inertial orientiert, zusätzliche Beschleunigungen auf (Quasi-Inertialsystem). Bei der Transformation zwischen diesen Systemen müssen Einflüsse der Relativitätstheorie berücksichtigt werden. Das betrifft die Koordinatenzeit und die Bahnbeschleunigung von Satelliten.

Für die Darstellung terrestrischer Objekte ist wie erwähnt ein erdfestes mitrotierendes geozentrisches Koordinatensystem erforderlich. Der Bezug zum ebenfalls geozentrischen GCRS erfolgt über Polbewegung und Erdrotation. Ein solches mitrotierendes erdfestes System wird jährlich durch den IERS (Gambis, 2000) in internationaler Kooperation auf der Basis mehrerer präziser Raummessverfahren realisiert und als ITRF (International Terrestrial Reference Frame) bezeichnet. Zurzeit dient für diese Georeferenzierung das ITRF2000 als Standard.

2.1 Eigenzeit, Koordinatenzeiten und Koordinatentransformationen

Entsprechend der Allgemeinen Relativitätstheorie sind in den Raum-Zeit-Referenzsystemen BCRS und GCRS die Zeiten und Positionen keine absoluten Größen, sondern von Bezugspunkt, Schwerepotential und Bewegung abhängig. Diese relativistischen Effekte können in Anbetracht der heutigen Genauigkeiten nicht mehr vernachlässigt werden. Die Relativistik unterscheidet zwischen Eigenzeit und Koordinatenzeit. Die Eigenzeit wird durch eine ideale Uhr geliefert. Sie ist abhängig vom Bewegungszustand der Uhr und dem umgebenden Gravitationsfeld. Die Koordinatenzeit entspricht der Zeitkoordinate in einem Raum-Zeit-Koordinatensystem und hat für das gleiche Ereignis überall in dem System denselben Wert.

Zwischen einer Koordinatenzeit t in einem ruhenden System und der Eigenzeit τ in einem bewegten System ergibt sich nach der Speziellen Relativitätstheorie infolge der Lorentz-Transformation eine Zeitdilatation. Für Zeitintervalle Δ erhält man bei konstanter Geschwindigkeit v

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad oder \qquad \Delta \tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t \tag{2.1}$$

Da v < c, hat man im bewegten System immer eine Zeitdilatation, d.h. Uhren gehen langsamer.

Für Aufgaben der Raumgeodäsie sind die Realisierung der baryzentrischen und geozentrischen Koordinatenzeit sowie die relativistischen Transformationen zwischen ihnen von besonderer Wichtigkeit. Zwischen der Koordinatenzeit des baryzentrischen Systems TCB (Barycentric Coordinate Time) und derjenigen des geozentrischen Systems TCG (Geocentric Coordinate Time) besteht nach der Relativitätstheorie folgende 4-dimensionale Transformation (McCarthy und Petit (Eds.), 2004; Petit in Johnston et al., 2000):

$$TCB - TCG = c^{-2}\left\{\int_{t_0}^{t}\left[\frac{\vec{v}_e^{\,2}}{2} + V_{ext}(t,\vec{x}_e(t))\right]dt + \vec{v}_e\cdot(\vec{x}-\vec{x}_e)\right\} + O(c^{-4}) \tag{2.2}$$

mit

c – Lichtgeschwindigkeit, t – Zeit,

, – baryzentrischer Positions- bzw. Geschwindigkeitsvektor des Geozentrums,

– baryzentrischer Positionsvektor des Beobachters und

– Newton-Potential aller Körper des Sonnensystems (außer Erde), gemessen im Geozentrum und damit variable auf der Erdbahn.

Die Integrationsgrenzen werden so gewählt, dass sie mit der Epoche der terrestrischen Zeit TT (Terrestrial Time) übereinstimmen. Der Beginn der Zeitskala ist JD = 2443144,5 IAT = 1977 Jan. 1, $0^h0^m0^s$ IAT. Als Näherung für diese recht komplizierte Transformation ergibt sich folgender Ausdruck, der auch den Bezug zur SI-Sekunde berücksichtigt (Petit, 1999; McCarthy und Petit (Eds.), 2004; Capitaine et al., 2002):

(2.3)

mit

$L_C = 1{,}48082686741\cdot 10^{-8}$ sowie

JD – Julianisches Datum und P – periodische Terme.

Der Einfluss des linearen Terms liegt also im Bereich von 10^{-8}; L_C ist mit einer Genauigkeit von $2 \cdot 10^{-17}$ bestimmt. Der zweite Term ist für einen Beobachter auf der Erdoberfläche nur von den terrestrischen Koordinaten abhängig und variiert mit Tagesperiode bei Amplituden bis 2,1 µs. Die periodischen Terme P haben wegen der jährlichen Bewegung der Erde im Gravitationsfeld der Sonne Amplituden von etwa 1,6 ms. Da sich die Erdsatelliten mit der Erde um die Sonne bewegen, kann dieser Effekt in der Satellitengeodäsie vernachlässigt werden.

Die geozentrische Koordinatenzeit TCG unterscheidet sich weiterhin wegen des Gravitationspotentials der Erde von der terrestrischen Zeit TT, die an der Erdoberfläche, genauer auf dem Geoid, definiert ist und deren Einheit der SI-Sekunde auf dem Geoid entspricht. Die Beziehung für die Differenz TCG – TT ergibt sich aus dem Verhältnis des Potentials auf dem Geoid zur Lichtgeschwindigkeit und lautet (McCarthy und Petit (Eds.), 2004; Capitaine et al., 2002):

$$\mathrm{TCG} - \mathrm{TT} = L_G\,(\mathrm{JD} - 24443144{,}5) \cdot 86400 \qquad (2.4)$$

mit $L_G = W_0 / c^2 = 6{,}969290134 \cdot 10^{-10}$.

L_G wurde anhand des Potentials am Geoid W_0 definiert und ist somit unabhängig von zukünftigen weiter verbesserten Geoidbestimmungen. Bei einer Unsicherheit des Potentials von 0,5 m^2s^{-2} (McCarthy und Petit (Eds.), 2004) ergibt sich für die Größe L_G eine Genauigkeit von besser als 10^{-17}.

Realisiert wird terrestrische Zeit TT durch die Atomzeit IAT (International Atomic Time) auf dem Geoid, abgesehen von einem konstanten Offset:

$$\mathrm{TT} = \mathrm{IAT} + 32{,}184\ \mathrm{s}. \qquad (2.5)$$

Der Maßstab des terrestrischen Referenzsystems bzw. -rahmens ITRF2000 wird durch den IERS aus Interferometermessungen zu Quasaren (VLBI) und Lasermessungen zu Satelliten (SLR) konsistent mit der an der Erdoberfläche (Geoid) definierten TT abgeleitet. Das ist nicht konform mit neueren Resolutionen von IAU und IUGG (soll aber trotzdem wegen der Kontinuität mit früheren Lösungen vorläufig nicht geändert werden). Eine Reduktion auf die geozentrische Raum-Zeit TCG (Geocentric Coordinate Time) erfordert den Faktor $(1 + L_G)$, also ebenfalls nahezu 10^{-9} und ist damit quasi im Bereich der heutigen Messgenauigkeit:

$$(x, y, z)^T_{\mathrm{TCG}} = (1 + L_G)\,(x, y, z)^T_{\mathrm{ITRF2000}}. \qquad (2.6)$$

In gleicher Weise unterscheidet sich das Produkt Gravitationskonstante mal Erdmasse GM, das den Maßstab der Satellitenbahn bestimmt, in den beiden Systemen:

$$GM_{TCG} = (1 + L_G)\, GM_{TT}. \tag{2.7}$$

2.2 Bewegungsgleichungen

Die relativistische Behandlung der Bahnanalyse von Erdsatelliten erfordert Korrektionen für die Bewegungsgleichungen, die Zeittransformationen und die Messungen.

Für die Bewegungsgleichungen ergeben sich wegen der durch das Gravitationsfeld verursachten Raumkrümmung Korrektionen zu den Beschleunigungen am Satelliten. Der Effekt der Raumkrümmung wird durch Anwendung der Schwarzschild-Metrik berücksichtigt und wurde für die Planetenbahnen schon 1916 berechnet. Wegen der Sonnennähe ist er für den Merkur mit 43″ pro Jahrhundert wesentlich größer als für die übrigen Planeten. Diese Periheldrehung des Merkurs war bereits lange bekannt, konnte aber erst durch die Allgemeine Relativitätstheorie erklärt werden. Eine weitere frühe Bestätigung erfuhr die Allgemeine Relativitätstheorie 1919 durch astronomische Beobachtungen während einer Sonnenfinsternis, mit denen die vorausgesagte Lichtablenkung sonnennaher Ziellinien zu Sternen durch das Gravi-tationsfeld der Sonne nachgewiesen wurde.

Bei künstlichen Erdsatelliten ist natürlich das Gravitationsfeld der Erde der wirksame Effekt. Man erhält im geozentrischen System GCRS für die Störbeschleunigungen (McCarthy und Petit (Eds.), 2004: Gulklett, 2003; Moritz, Hofmann-Wellenhof, 1993):

$$\Delta\ddot{\vec{r}} = \frac{GM}{c^2 r^3}\left\{\left[2(\beta+\gamma)\frac{GM}{r} - \gamma\dot{\vec{r}}^{\,2}\right]\vec{r} + 2(1+\gamma)(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}}\right\} \tag{2.8}$$

Dabei bedeuten:

GM – Gravitationskonstante mal Erdmasse (Abplattung der Erde vernachlässigt),

r, $\vec{r}$ – Entfernung bzw. Vektor zwischen Geozentrum und Satellit,

β, γ – Parameter der PPN-Gravitationstheorie (nach Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie
β = γ = 1).

Als Näherung ergibt sich für den Betrag (Zhu und Groten, 1988; Hofmann-Wellenhof et al., 1994; Rothacher, 2003):

$$\Delta\ddot{r} = \frac{2(GM)^2 a(1-e^2)}{c^2 r^4} \tag{2.9}$$

mit a – große Halbachse der Satellitenbahn und e – Bahnexzentrizität.

Die Korrektionen liegen in der Größenordnung von $5 \cdot 10^{-9}$ m·s^{-2} bei LEO-Satelliten (Low Earth Orbit, Höhe zwischen 500 km und 1500 km) und $2 \cdot 10^{-11}$ m·s^{-2} für geostationäre Satelliten. Für die LEO-Satelliten ergibt die Integration bereits für Bahnbögen von 3 Stunden Bahnstörungen im cm-Bereich, sodass die Effekte für präzise Bahnanalysen berücksichtigt werden müssen. Bei weiterer Steigerung von Mess- und Bahngenauigkeit werden sie mehr und mehr auch für MEO-Satelliten (Medium Earth Orbit, Höhe 5000 km bis 15000 km) relevant.

2.2.1 Lense-Thirring- Effekt und geodätische Präzession

Nach der allgemeinen Relativitätstheorie verursacht ein Gravitationsfeld neben der Krümmung des Raumes zusätzlich – sofern es rotiert – einen Mitdreheffekt des umgebenden Raumes oder genauer der Raumzeit. Für die rotierende Raumzeit (dragging of surrounding space-time) haben die beiden österreichischen Physiker Lense und Thirring auf der Basis der allgemeinen Relativitätstheorie bereits 1918 den Effekt, den rotierende Massen in ihrer Umgebung ausüben („…so ähnlich wie Wasser in einem Strudel“), berechnet. Der entsprechende Effekt – benannt nach den beiden Wissenschaftlern – verursacht einen Präzessionseffekt auf einen rotierenden Kreisel und müsste in einem entsprechenden Satelliten gemessen werden können. Desgleichen ergibt sich eine Störung der Bahn eines künstlichen Erdsatelliten, der sich um die rotierende Erde bewegt (Satellit auf seiner Bahn als Kreisel im Raum). Den Einfluss auf die Bahnbeschleunigung eines Satelliten erhält man (mit obigen Symbolen) zu (McCarthy und Petit (Eds.), 2004):

$$\Delta\ddot{\vec{r}}_{LT} = (1+\gamma)\frac{GM}{c^2 r^3}\left[\frac{3}{r^2}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})(\vec{r}\cdot\vec{J}) + (\dot{\vec{r}}\times\vec{J})\right] \tag{2.10}$$

mit $\vec{J}$ – Drehimpuls des Erdkörpers pro Einheitsmasse (Betrag etwa $9{,}8 \cdot 10^8$ m^{2}s^{-1}).

Besonders gestört wird durch diesen Effekt das Bahnelemente Ω (Rektaszension des aufsteigenden Knotens); für die säkulare Änderung ergibt sich (Ciufolini und Pavlis, 2004):

$$\dot{\Omega} = \frac{2J_E}{a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.11}$$

Dabei sind J_E, a und e Drehimpuls der Erde, große Halbachse bzw. Exzentrizität der Satellitenbahn.

Da die Effekte extrem klein sind, kommen für einen Nachweis nur Satelliten mit höchster Bahngenauigkeit in Frage, also passive so genannte Kanonenkugelsatelliten mit Laserreflektoren. Die Effekte liegen für Ω z.B. bei 0,18″/Jahr für Starlette (H ≈ 900 km) und 0,032″/Jahr (ca. 1,9 m pro Jahr!) für LAGEOS (H ≈ 6000 km). Wegen des säkularen Charakters müssen diese Effekte von den normalen wesentlich größeren säkularen Störungen getrennt werden. Trotz des größeren Betrages für Starlette ist dieser für einen Nachweis nicht geeignet, da die Bahngenauigkeit wegen der übrigen Störungen weit darunter liegt. Nur mit langjährigen LAGEOS-Analysen könnte der Nachweis gelingen. Dabei sollte die Tatsache ausgenützt werden, dass die normalen säkularen Störungen durch das Gravitationsfeld von der Bahnneigung i abhängen, nicht aber der Lense-Thirring-Effekt. Benutzt man dann nämlich zwei identische Satelliten mit gleichen Bahnparametern, die lediglich unterschiedliche Bahnneigungen in der Weise aufweisen, dass sich die säkularen Störungen in der Summe (umgekehrte Vorzeichen) aufheben, so bleibt als säkularer Effekt in Ω nur die relativistische Lense-Thirring-Störung. Das trifft zu, wenn ein Satellit die Neigung i und der andere die Bahnneigung 180°-i hat (symmetrisch um 90°). LAGEOS 1 wurde 1976 von der NASA gestartet und hat eine Bahnneigung von etwa 109,8°. Deshalb sollte LAGEOS 2 (identisch mit LAGEOS 1, gestartet 1992) eine Bahnneigung von etwa 70° haben. Aus anderen Gründen wurde aber eine Neigung von 52,6° gewählt, und die 70,2° sind dem geplanten LAGEOS 3 vorbehalten. Dennoch ist es kürzlich gelungen, durch Kombination präziser langjähriger Bahnanalysen von LAGEOS 1 und LAGEOS 2 und unter Nutzung neuester Gravitationsfeldmodelle zur genauen Berechnung der Bahnstörungen, den Effekt für Ω mit einem Betrag von 1,9 m pro Jahr bei einer Unsicherheit von etwa 10% nachzuweisen (Ciufolini, Pavlis, 2004). Dieses Ergebnis entspricht 99 % des theoretischen Wertes.

Es sei erwähnt, dass der Lense-Thirring-Effekt zur Zeit im Rahmen eines anderen speziellen Satellitenprojektes (nach mehreren wenig erfolgreichen früheren Projekten), des Gravity Probe-B, nachgewiesen werden soll. Dabei wird die Auswirkung der Rotation der Raumzeit auf die Kreiselpräzession gemessen. Der Effekt liegt in der Größenordnung von 0,042″ pro Jahr für die Bahn des Satelliten Gravity Probe-B (Höhe 644 km, Polbahn, gestartet Apr. 2004, Dauer des Experiments etwa 16 Monate). Für die Messung dieser Ablenkung des hochpräzisen Kreisels im Satelliten wird eine Genauigkeit von 1 % erwartet.

Der Lense-Thirring-Effekt erzeugt für eine im Satellit die Erde umkreisende Uhr auch eine Zeitkorrektion. Sie beträgt z.B. für einen GPS-Satelliten $-1{,}6 \cdot 10^{-17}$ s pro Umlauf (12^h) und kann somit vernachlässigt werden (Gulklett, 2003).

Ein weiterer allgemein-relativistischer Effekt ist die geodätische Präzession oder de Sitter-Effekt. Er überlagert die Kreiselpräzession des Lense-Thirring-Effekts und wird im Gegensatz zum Lense-Thirring-Effekt, der durch die Rotation des Gravitationsfeldes entsteht, durch die statische Masse des zentralen nicht rotierenden Körpers verursacht, d.h. durch die Bewegung des Kreisels durch die gekrümmte Raum-Zeit (Moritz, Hofmann-Wellenhof, 1993; Ciufolini, Pavlis, 2004). Die geodätische Präzession ist bereits gesichert und konnte 1988 aus der Analyse der Bahn des Erde-Mondsystems um die Sonne anhand von radiointerferometrischen Messungen nachgewiesen werden. Für Gravity Probe-B ist die geodätische Präzession mit 6,6″ pro Jahr um zwei Größenordnungen größer als der Lense-Thirring-Effekt. Beide Effekte sollen im Rahmen dieses Satellitenprojektes mit einer Auflösung des Kreisels von 0,001″ nachgewiesen und weiter erforscht werden.

3. Relativistische Effekte auf kosmisch-geodätische Beobachtungen bzw. Messungen

3.1 VLBI – Messungen

Bei der Very Long Baseline Interferometry werden Basislinien aus den beobachteten Differenzen der Ankunftszeiten von natürlichen Radiosignalen weit entfernter Quasare an mindestens zwei Stationen bestimmt. Um die Beobachtungsgleichung streng aufzustellen, wird als Inertialsystem das baryzentrische BCRS benutzt. Da aber die Messung der Ankunftszeiten auf der bewegten Erde erfolgt, müssen die Basislinien vom unbewegten baryzentrischen System in das bewegte geozentrische System transformiert werden. In der Beobachtungsgleichung muss also der Basisvektor $\vec{B}$ im baryzentrischen System durch den zu bestimmenden Basisvektor $\vec{b}$ im geozentrischen System ersetzt werden. Die Bewegungen der Messstationen bestehen aus der Erdrotation und der Bahnbewegung der Erde um die Sonne, wodurch tägliche und jährliche Aberrationseffekte entstehen. Die Umrechnung in ein bewegtes System muss entsprechend der Speziellen Relativitätstheorie nach der Lorentztransformation erfolgen. Das Resultat lautet (Hofmann-Wellenhof et al., 1994; Rothacher, 2003; Gulklett, 2003):

$$\vec{B} = \vec{b} - \frac{\vec{b}\cdot\vec{v}}{c^2}\vec{v}_2 - \frac{\vec{b}\cdot\vec{v}}{2c^2}\vec{v} \tag{3.1}$$

mit $\vec{v}$ – Vektor der Geschwindigkeit des Geozentrums im baryzentrischen System,

$\vec{v}_2$ – Vektor der Rotationsgeschwindigkeit der Antenne 2 gegenüber dem Geozentrum.

Die in der Beobachtungsgleichung in baryzentrischer Koordinatenzeit ausgedrückte Laufzeitdifferenz Δt muss weiterhin noch auf die Eigenzeit τ einer Atomuhr auf der Erde transformiert werden, denn die gemessenen Laufzeitdifferenzen entsprechen der Differenz der Eigenzeiten der Atomuhren an den Stationen. Diese Atomuhren werden sowohl vom Gravitationspotential V (stärkeres Gravitationsfeld verursacht langsamere Uhren) als auch von ihrer Bewegungsgeschwindigkeit v_A mit Bezug auf das ruhende System (bewegte Uhren laufen langsamer als ruhende) beeinflusst. Fasst man beide Effekte zusammen, so ergibt sich (McCarthy und Petit (Eds.), 2004; Moritz, Wellenhof, 1994):

$$\Delta t = (1 + \frac{{v_A}^2}{2c^2} + \frac{V}{c^2})\Delta\tau \tag{3.2}$$

Das Glied $v_A^2 / 2c^2$ wird auch als Dopplerverschiebung 2. Ordnung bezeichnet.

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ergeben sich für die Laufzeitdifferenz Δt weiterhin Korrektionen wegen der durch die Gravitation der Himmelskörper, insbesondere Sonne, Erde und Jupiter, verursachten Krümmung der Raum-Zeit (McCarthy und Petit (Eds.), 2004):

$$\delta\Delta t_{grav} = \sum_J 2\frac{GM_J}{c^3}\ln\frac{R_{1J} + \vec{K}\cdot\vec{R}_{1J}}{R_{2J} + \vec{K}\cdot\vec{R}_{2J}} \tag{3.3}$$

Dabei sind

$\vec{R}_{1J}$ bzw. R_{1J} –Vektor bzw. Betrag des Vektors vom J-ten gravitierenden Körper zum Empfänger 1,

$\vec{R}_{2J}$ bzw. R_{2J} – desgleichen zum Empfänger 2,

$\vec{K}$ – Einheitsvektor vom Baryzentrum zur jeweiligen Radioquelle.

Für die verschiedenen Himmelskörper sind die Effekte nur relevant, wenn die Strahlen sehr nahe an ihnen vorbeilaufen. Für die Sonne sind im Extremfall 200 ns zu erwarten (Rothacher, 2003). Im Allgemeinen kann man sich im

Pikosekundenniveau auf den Einfluss der Erde beschränken. Mit $R_{1E} \approx R_{2E}$ kann man vereinfachen:

$$\delta\Delta t_{gravE} = 2\frac{GM_E}{c^3}\ln\frac{1+\sin E_1}{1+\sin E_2} \tag{3.4}$$

mit M_E – Erdmasse und den Elevationswinkeln E_1 und E_2, unter denen man die jeweilige Quelle von Station 1 bzw. 2 sieht. Der Effekt beträgt für die Erde maximal etwas über 20 ps.

3.2 Einflüsse bei GPS-Messungen

Auch die Uhren in den GPS-Satelliten unterliegen den Effekten sowohl der Allgemeinen als auch der Speziellen Relativitätstheorie. Sie müssen wegen der hohen Genauigkeit dieser Atomuhren von etwa $5 \cdot 10^{-14}$ (4 ns pro Tag) berücksichtigt werden (Hofmann-Wellenhof et al., 1994; Nelson, 2003; Gulklett, 2003). Das schwächere Gravitationsfeld in der Höhe der Satellitenbahnen (20000 km) bewirkt eine Beschleunigung der Satellitenuhren um etwa 45 µs pro Tag; das Satellitensignal erfährt auf dem Weg zum terrestrischen Empfänger also eine Blauverschiebung. Andererseits bewirkt die Bahngeschwindigkeit der Satelliten (3,9 km/s) eine Verlangsamung der Satellitenuhren von etwa 7 µs pro Tag gegenüber Uhren in Ruhe, womit eine Rotverschiebung des Signals verbunden ist. Beide Effekte (Summe etwa 38 µs/Tag) werden zusammengefasst. Bei Annahme einer kreisförmigen Satellitenbahn und einer kugelförmigen Erde erhält man somit für die Frequenzdifferenz $\Delta f = f - f_0$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\Delta V}{c^2}, \quad wobei \quad \Delta V = GM_E\left(\frac{1}{r^S} - \frac{1}{r_E}\right) . \tag{3.5}$$

Es bedeuten:

f, f_0 – Frequenz vom Satelliten ausgesendet (f) und vom Empfänger empfangen (f_0),

v – Bahngeschwindigkeit des Satelliten (v » 3,9 km/s),

ΔV – Differenz zwischen Gravitationspotential am Satelliten und am terrestrischen Empfänger,

r^S, r_E – Länge des Radiusvektors vom Geozentrum zum Satelliten bzw. zum Empfänger.

Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man für $\Delta f / f_0 = -4{,}4647 \cdot 10^{-10}$ ($0{,}8 \cdot 10^{-10}$ für speziell-relativistischen Anteil und $-5{,}3 \cdot 10^{-10}$ für allgemein-relativistischen Anteil).

Damit der terrestrische Empfänger trotz der relativistischen Effekte die nominale Frequenz von 10,23 MHz empfangen kann, wird die von der Satellitenuhr erzeugte Frequenz vor der Aussendung um $\Delta f = -4{,}464 \cdot 10^{-10} \cdot f_0 = -4{,}57 \cdot 10^{-3}$ Hz auf 10,229999995433 MHz verändert.

Diese Frequenzverschiebung berücksichtigt nur den konstanten Betrag. Wegen der nicht kreisförmigen GPS-Bahnen ($e \approx 0{,}014$) treten in der Frequenz noch periodische Variationen auf, die zu folgender Korrektion für die Entfernungen ρ führt:

$$\delta\rho_{rel1} = \frac{2\sqrt{GM_E a}}{c} e \sin E \tag{3.6}$$

mit e – numerische Exzentrizität, a – große Halbachse und E – exzentrische Anomalie der Satellitenbahn. Diese Korrektion erreicht Amplituden von etwa 45 ns oder 13,5 m und wird im Empfänger berücksichtigt.

Als Beispiel für eine stark exzentrische Satellitenbahn sei der Satellit Molnya erwähnt ($e \approx 0{,}72$). Hier erreichen die relativistischen periodischen Variationen Amplituden von etwa 1,7 µs, entsprechend über 500 m!

Zusätzlich muss noch berücksichtigt werden, dass das Signal auf dem Weg durch die wegen des Gravitationsfeldes der Erde gekrümmte Raum-Zeit verzögert wird. Analog zu Gl. (3.4) erhält man für die Korrektion der Entfernung:

$$\delta\rho_{rel2} = \frac{2GM_E}{c^2} \ln \frac{r^S + r_E + \rho}{r^S + r_E - \rho} \tag{3.7}$$

Die Größe dieses Terms erreicht bei GPS-Satelliten 18,7 mm. Er ist in dem Ausmaß aber nur bei Einzelpunktbestimmungen wirksam; bei Basislinienbestimmungen verringert sich der Einfluss durch Differenzbildung auf weniger als 10^{-9}.

Ein weiterer speziell-relativistischer Effekt betrifft die Uhr des terrestrischen Empfängers, der sich durch die Erdrotation mit Bezug auf das in dieser Hinsicht ruhende GCRS bewegt (Nelson, 2003; Hofmann-Wellenhof et al., 1994; Gulklett, 2003). Dieser Sagnac-Effekt kann interpretiert werden als Differenz der Eigenzeiten der Satellitenuhr und der Uhr im terrestrischen Empfänger (Ashby, 2003). Er kann folgendermaßen berechnet werden (Nelson, 2003; Gulklett, 2003):

$$\Delta t = \frac{1}{c^2} \vec{\rho} \cdot \vec{v} \tag{3.8}$$

mit $\vec{\rho}$ – Vektor Station – Satellit und $\vec{v}$ – Geschwindigkeitsvektor der Bewegung des Empfängers. Der Effekt ist maximal am Äquator ($v \approx 0{,}46$ km/s) und bei großen Distanzen zum Satelliten, d.h. bei kleinen Höhenwinkeln. Für GPS beträgt der maximale Sagnac-Effekt 133 ns (1 ns entspricht etwa 30 cm). Der Effekt wird im Empfänger durch die Software berücksichtigt.

Wesentlich größer kann dieser Effekt sein, wenn GPS-Signale von tief fliegenden Satelliten empfangen werden. Für CHAMP beispielsweise ($v \approx$ 7,6 km/s) beträgt der Effekt maximal etwas über 2 µs.

Als weitere relativistische Effekte sind u. a. der Einfluss der Raumkrümmung auf die geometrische Distanz sowie der oben vernachlässigte Einfluss der Erdabplattung und des Gezeitenpotentials von Mond und Sonne zu nennen. Der erstere Effekt erreicht bei GPS-Distanzen etwa 6 mm (Ashby, 2003). Die beiden letzteren erzeugen periodische Effekte, und zwar mit Amplituden von 24 ps für den Einfluss der Erdabplattung und von etwa 1 ps für den Einfluss des Gezeitenpotentials von Mond und Sonne [Nelson, 2003; Gulklett, 2003).

3.3 Lasermessungen zu Satelliten (SLR)

Die relativistischen Korrektionen für die aus SLR erhaltenen Distanzen ρ zu künstlichen Erdsatelliten erhält man ebenfalls aus Gleichung (3.7). Da SLR ein Zweiwegverfahren ist und der Strahl somit auf dem Weg zum Satelliten und zurück durch die wegen des Gravitationsfeldes der Erde gekrümmte Raum-Zeit verzögert wird, ergibt sich zusätzlich ein Faktor 2. Die Korrektionen betragen z.B. bei LAGEOS (Höhe etwa 6000 km) zwischen 12 mm und 22 mm und für Starlette (Höhe etwa 900 km) maximal 10 mm. In Anbetracht der Subzentimetergenauigkeit moderner Meßsysteme sind diese Effekte bereits heute relevant. Bei Lasermessungen zum Mond (LLR) erreichen die Korrektionen 3 cm bis 4 cm.

Zusätzlich müssen gegebenenfalls auch hier die Einflüsse der Raumkrümmung auf die geometrische Distanz berücksichtigt werden. Je nach Distanz zum Satelliten können diese Korrektionen mehrere Millimeter betragen.

4. Schlussbemerkung

Die Ausführungen haben gezeigt, dass die Erkenntnisse sowohl der Speziellen als auch der Allgemeinen Relativitätstheorie in der modernen Satellitengeodäsie eine große Rolle spielen. Die heute erreichbaren hohen Genauigkeiten erfordern ihre Berücksichtigung in unterschiedlichster Weise. Andererseits bieten künstliche Erdsatelliten heute ein experimentelles Feld für Anwendungen und die Demonstration der Gültigkeit der Relativitätstheorie. Durch eine weitere Genauigkeitssteigerung der Methoden der Satellitengeodäsie wird auch die Bestätigung weiterer relativistischer Effekte, die heute noch an der Nachweisgrenze liegen, möglich sein. Das erfordert aber auch eine weitere Verfeinerung der Modellierung der relativistischen Effekte, bei der u. a. die oben vorgenommenen diversen Vereinfachungen und Vernachlässigungen schrittweise einbezogen werden müssen.

Literatur

[1] Ashby, N.: Relativity in the Global Positioning System. Living Reviews in Relativity, Internet: http://relativity.livingreviews.org, 2003

[2] Beutler , G.: Himmelsmechanik I. Mitteilungen Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald, Bern 1991

[3] Capitaine, N. et al. (Ed.): Proceedings of the IERS Workshop on the Implementation of the New IAU Resolutions. Verlag BKG, Frankfurt/M., 2002, 134 S.

[4] Ciufolini, I.; Pavlis, E. C.: A confirmation of the general relativistic prediction of the Lense-Thirring effect. Nature, Vol. 431, 21 October 2004, S. 958–960

[5] Gambis, D: Earth Orientation Monitoring using Various Techniques, Proc. Colloqu. IAU 178, Cagliari, Italy, Sept 1999., 2000

[6] Gulklett, M.: Relativistic effects in GPS and LEO. Univ. Copenhagen, Dept. of Geophysics, October 2003, 91 S.

[7] Hofmann-Wellenhof, B.; Lichtenegger, H.; Collins, J.: GPS – Theory and Practice. Springer Verlag 1994, 355 S.

[8] Johnston, K. J.; McCarthy, D. D.; Luzum, B. J.; Kaplan, G. H. (Eds.): Proceedings IAU Colloquium 180. Washington, 2000

[9] McCarthy, D. D.; Petit, G. (Eds.) : IERS Conventions 2003. Verlag BKG, Frankfurt/M., 2004, 127 S.

[10] Moritz, H.; Hofmann-Wellenhof, B.: Geometry, Relativity, Geodesy. Herbert Wichmann Verlag 1993, 367 S.

[11] Nelson, R. A.: Practical relativistic timing effects in GPS and GALILEO. CGSIC Timing Subcommittee Meeting, March 2003

[12] Nelson, R. A.: Handbook on Relativistic Time Transfer. ION-GPS Conference, Portland Sept. 2003

[13] Petit, G.: Importance of a common framework for the realization of Space-Time Reference Systems. Proc. Int. Conf. Munich 1998, 1999

[14] Rothacher, M.: Erdmessung und Satellitengeodäsie 2. Vorl.-Skript SoSe 2003, Inst. Astron. & Physik. Geodäsie, TU München

[15] Zhu, S. J.; Groten, E.: Relativistic effects in GPS. In Groten, E. Strauß, R. (Eds.): GPS-Techniques applied to geodesy and surveying, Springer 1988

[16] IERS (International Earth Rotation Service): Bulletin A (wöchentlich), US-Naval Obs., Washington; Bulletin B (monatlich), Paris Observatory; Annual Reports, Paris Observatory