

Fritz Gackstatter

## Entwicklungslinien zur Einsteinschen Kosmologie

### 1. Entwicklungslinien

Arithmetik, Geometrie und Astronomie sind Teilbereiche unseres mathematisch-naturwissenschaftlichen Weltgebäudes, deren Bedeutung bereits in Platons „Staat“ erklärt wird.

Die Allgemeine Relativitätstheorie führt die Entwicklungslinien von Geometrie und Astronomie/Physik zusammen. Dieses Zusammenwirken von Geometrie und Physik zeigt sich besonders deutlich in der Einsteinschen Kosmologie.

Bernhard Riemann hat in seinen „Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, das Linienelement für die Räume konstanter Krümmung angegeben:

$$(1) \quad ds^2 = \Sigma dx^2 / [1 + (\alpha/4) \Sigma x^2]^2 .$$

Verbindet man Element (1) mit der Metrik des Minkowski-Raumes der Speziellen Relativitätstheorie, findet man die Robertson-Walker-Metrik

$$(2) \quad ds^2 = -c^2 dt^2 + \{R^2(t) / [1 + (\alpha/4) r^2]^2\} \{dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)\},$$

wobei die Funktion  $R = R(t)$  den Weltradius oder die Skalenfunktion in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

Durch Einsetzen der R-W-Metrik (2) in die Einsteinschen Feldgleichungen

$$(3) \quad R_{\alpha\beta} - (1/2) R^* g_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$$

erhält man die beiden Friedmanschen DGLn

$$(4) \quad (1/c^2) (R'/R)^2 + \alpha / R^2 = (1/3) u + (1/3) \lambda,$$

$$(5) \quad R'/R = - (1/3) u' / (u + p) .$$

$R^*$  ist die skalare Krümmung,  $\lambda$  die kosmologische Konstante. Als zweite Friedmansche Gleichung haben wir den Energie-Impuls-Erhaltungssatz (5) gewählt. Die beiden Grundgleichungen der Einsteinschen Kosmologie, (4) und (5), sind gefunden.

## 2. Separation der Friedmanschen Gleichungen

Im Buch „Relativität und Kosmos“ von H.-J. Treder ([1], S. 69) findet man Informationen über den Aufbau der physikalischen Größen  $u$  und  $p$ . Danach ist  $u$  die Summe aus der Dichte der Ruhenergie  $\mu c^2$ , der Strahlungsenergie  $u_s$  und der thermischen inneren Energie  $i$ ; der Druck  $p$  setzt sich aus dem Strahlungsdruck  $p_s$ , und dem Gasdruck  $\pi$  zusammen:

$$(6) \quad u = \mu c^2 + u_s + i, \quad p = p_s + \pi .$$

Es gelten die Proportionalitäten

$$(7) \quad \mu c^2 \sim 1/R^3, \quad u_s \sim 1/R^4, \quad i \sim 1/R^5,$$

und die Zustandsgleichungen

$$(8) \quad p_s = (1/3) u_s, \quad \pi = (2/3) i .$$

Die Formeln (6) und (7) legen einen funktionentheoretischen Laurentreihenansatz für  $u$  und  $p$  nahe:

$$(9) \quad u = \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} a_v R^v, \quad p = \sum_{v=-\infty}^{v=+\infty} b_v R^v .$$

Durch Einsetzen in (5) und Koeffizientenvergleich erhält man

$$(10) \quad u = \dots + a_{-5}/R^5 + a_{-4}/R^4 + a_{-3}/R^3 + a_{-2}/R^2 + \dots, \\ p = \dots + (2/3)a_{-5}/R^5 + (1/3)a_{-4}/R^4 + 0/R^3 - (1/3)a_{-2}/R^2 - \dots$$

*Satz (Separation der Friedmanschen Gleichungen). Die  $a_v$ -Werte können beliebig vorgegeben werden, die  $b_v$  sind dann bestimmt - und mit (5) ist bereits eine der Friedmanschen Gleichungen erfüllt und separiert (abgetrennt).*

Zum Beweis siehe [2]. Setzt man  $a_{-2} = 3$ ,  $a_v = 0$  sonst, dann erhält man das statische Weltmodell von Einstein (1917) mit  $p < 0$ . Modelle mit  $u \geq 0$ ,  $p \geq 0$  findet man durch den Ansatz

$$(11) \quad u = 6A/R^3 + 3B_1/R^4 + 3B_2/R^5 + \dots + 3B_n/R^{n+3}, \\ p = B_1/R^4 + 2B_2/R^5 + \dots + nB_n/R^{n+3} .$$

Durch Einsetzen geeigneter  $u$ -Abschnitte in die einzig verbleibende Friedmansche Gleichung (4) werden in [2] kosmologische Modelle konstruiert. Die  $R$ - $ct$ -Kurven können in geschlossener Form durch trigonometrische, elliptische bzw. hyperelliptische Funktionen ausgedrückt werden.

Andere  $u$ - $p$ -Verhältnisse kann man realisieren, wenn man im Ansatz (9) nichtganzzahlige  $v$  zuläßt. Setzt man nichtabbrechende Laurentreihen in (11) an, dann sind positive Konvergenzradien  $R_0$  möglich: mit  $R > R_0 > 0$  hat man am Anfang eine positive Skalenfunktion.

**3. Ein Kosmos mit  $\mu c^2 > 0$  und  $\lambda > 0$**

Im „Physik Journal“ vom Februar 2005 findet man in einem Beitrag von G. Börner [3] folgende Abbildung:

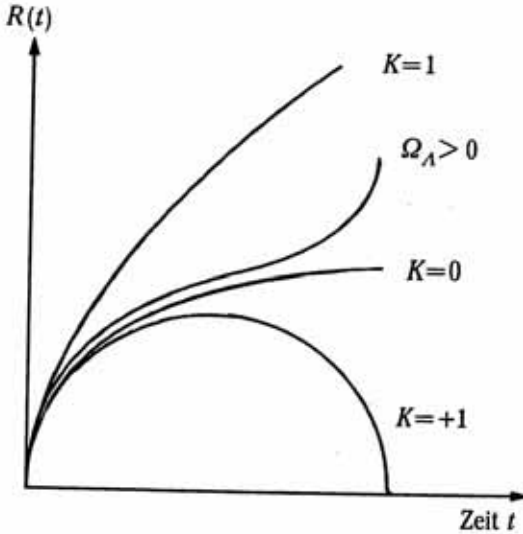


Abb. 3: Der Abstand zweier Teilchen in den kosmologischen Modellen ändert sich zeitlich proportional zu  $R(t)$ . Die Kurve mit  $\Omega_\Lambda > 0$  entspricht qualitativ dem Expansionsverhalten, das beobachtet wird.

Die Expansionskurve vom Lemaitre-Typ (mit  $\Omega_\Lambda > 0$ ) steht im Einklang mit den gegenwärtigen Beobachtungen. Diese Kurve kann mit Hilfe der Theorie der elliptischen Funktionen in geschlossener Form angegeben werden.

Satz (Parameterdarstellung der Expansionskurve vom Lemaitre-Typ). Setzt man im Ansatz (11)  $n = 0$ ,  $u = \mu c^2 = 6A/R^3$ ,  $p = 0$ ,  $\lambda > 0$ , dann erhält man die  $R$ - $ct$ -Parameterdarstellung durch

$$(12) (dR/d\tau)^2 = (1/3) \lambda R^3 - \alpha R + 2A,$$

$$(13) (dct/d\tau)^2 = R.$$

Die Ordinate  $R$  wird (bis auf eine Normierung) durch die DGL der Weierstraßschen  $p$ -Funktion beschrieben, die Abszisse  $ct$  kann anschließend durch eine Quadratur bestimmt werden.

Beweis: Setzt man in [2, Formel (31) und (32)] den Spezialfall  $n = 0$  ein, dann erhält man (12) und (13), q.e.d.

Im Friedmanschen DGL-System (4) + (5) kann (5) durch

$$(5') \quad (1/c^2) (R''/R) = - (1/6) u - (1/2) p + (1/3) \lambda$$

ersetzt werden. Diese Formel zeigt uns den Wendepunkt  $R'' = 0$  der  $R$ - $ct$ -Kurve: Wenn die Dichte der Ruhenergie  $u = \mu c^2 = 6A/R^3$  mit wachsendem  $R$  monoton fallend den Wert  $2\lambda$  erreicht, dann steht man am Übergangspunkt vom materiedominierten Zustand zum de Sitter-Bereich mit  $\lambda > 0$ .

#### 4. Volumendefekte

Das folgende Thema beginnt mit dem Theorema egregium. Die Gaußsche Krümmung  $K$  einer Fläche ist eine Größe der inneren Geometrie, und die Formeln von Bertrand-Puiseux und Diguët aus dem Jahre 1848 zeigen uns, wie  $K$  durch Längenmessungen bestimmt werden kann: Man konstruiere zu einem Flächenpunkt  $P$  den geodätischen Abstandskreis vom Radius  $r$ , messe Umfang  $U(r)$  oder Flächeninhalt  $A(r)$ , und vergleiche diese Werte mit den euklidischen Größen  $2\pi r$  bzw.  $\pi r^2$ . Dann kann  $K$  an der Stelle  $P$  nach folgenden Formeln berechnet werden:

$$(14) \quad K(P) = 6 \lim_{r \rightarrow 0} \{ [2\pi r - U(r)] / [2\pi r \cdot r^2] \} = 12 \lim_{r \rightarrow 0} \{ [\pi r^2 - A(r)] / [\pi r \cdot r^2] \}.$$

Die Krümmung hängt vom Längen- bzw. Flächendefekt ab.

H. Vermeil hat 1917 das entsprechende Ergebnis für  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten (mit positiv definiter Metrik) hergeleitet und Volumendefekte und skalare Krümmung  $R^*$  in Verbindung gebracht.

Was kann man bei den indefiniten Metriken der Relativitätstheorie machen? Felix Klein ([4], Teil II, S. 184) und Wolfgang Pauli ([5], S. 92) weisen darauf hin, daß die Vermeilsche Methode sich nicht unmittelbar auf den indefiniten Fall übertragen läßt, weil hier der Kugel das unendlich ausgedehnte Hyperboloid entspricht.

In [2] werden zu einer festen Stelle  $P$  im Robertson-Walker-Raum mit Metrik (2) Riemannsche Normalkoordinaten  $(T, X, Y, Z)$  konstruiert und der geodätische Teil des Lichtkegels mit  $0 \leq \tau \leq T$  betrachtet. Vergleicht man das 3-dimensionale Volumen  $V_3(T)$  der zum Zeitpunkt  $T$  gehörigen Kugel im Lichtkegel mit der entsprechenden Größe  $(4/3)\pi T^3$  im Minkowski-Raum, dann findet man:

Satz (*Volumendefekte bei kosmologischen Modellen*). *Die Volumendefekte können in Verbindung gebracht werden mit den physikalischen Größen  $u$ ,  $p$  und  $\lambda$ , es gilt*

$$(15) \quad \lim_{T \rightarrow 0} \{ [(4/3)\pi T^3 - V_3(T)] / [(4/3)\pi T^3 \cdot T^2] \} = (3/20) u + (1/4) p - (1/10) \lambda.$$

Es wird vorausgesetzt, daß die T-Zeitachse im Punkt P dieselbe Richtung hat wie die t-Zeitachse der R-W-Metrik (2). Die anderen geodätischen Kegelabschnitte sind durch Lorentz-Transformationen verbunden. Näheres in [2].

Betrachtet man den de Sitter-Kosmos mit  $u = p = 0$  und  $\lambda > 0$ , dann folgt aus (15)

$$(16) V_3(T) > (4/3)\pi T^3.$$

Die geodätischen Kugeln im Lichtkegel haben ein größeres Volumen als die Minkowskischen Vergleichsobjekte, die Ausdehnung des Raumes tritt in Erscheinung.

*Zeiten:* Beim Vergleich der rechten Seiten der Formeln (5') und (15) muß man bedenken, daß (5') auf die Koordinatenzeit t der R-W-Metrik (2) bezogen ist, während zu (15) die durch geodätische Konstruktion bestimmte natürliche Zeit T der Riemannschen Normalkoordinaten gehört.

*Zum Schluß:* Am Anfang der Arbeit finden wir in Formel (1) die Maßverhältnisse zum Riemann-Kosmos der nichteuklidischen Geometrie, mit einem weiteren Zitat aus Riemanns Hypothesen kommen wir zum Ende: „... indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.“ – Albert Einstein hat Riemanns Idee realisiert: Mit den Begriffen der Riemannschen Geometrie kann die Relativitätstheorie Erscheinungen beschreiben, die innerhalb der Newtonschen Physik nicht zu erklären sind.

## 5. Literatur

- [1] H.-J. Treder: Relativität und Kosmos. Berlin: Akademie-Verlag 1968.
- [2] F. Gackstatter: Über Volumendefekte und Krümmung bei der Robertson-Walker-Metrik und Konstruktion kosmologischer Modelle. Ann. Physik (Leipzig) 44 (1987), 423-439.
- [3] G. Börner: Der Nachhall des Urknalls. Physik Journal 4 (2005), 21-27.
- [4] F. Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Teil I und II. Berlin: Springer 1926 und 1927.
- [5] W. Pauli: Relativitätstheorie. Stuttgart. Teubner 1921.