Leibniz–Online
3/2007

www.ls-journal.de
ISSN 1863-3285

Christian Zylka

Über eine neue Halbordnung

Gewidmet der ehemaligen Leipziger Gruppe um Armin Uhlmann

Zusammenfassung

Ziel unserer Arbeit ist es, eine Relation vorzustellen, die – wie die gewöhnliche Majorisierung – eine Halbordnung darstellt, aber jene verschärft.

1. Vorbemerkungen

Wir erklären kurz die Grundlagen der gewöhnlichen Majorisierung, wobei wir der Schreibweise von Marshall/Olkin [1] folgen:

$R_+ := [0, \infty)$ (= nichtnegative reelle Achse)

$R_+^n := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), x_i \in R_+, \forall i\}$

$D_+^n := \{\mathbf{x} = (x_{[1]}, x_{[2]}, ..., x_{[n]}), \text{mit}(x_{[1]} \geq x_{[2]} \geq ... \geq x_{[n]}\}$

Seien nun $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_+^n$, dann definiert man die Relation $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ (in Worten: "$\mathbf{x}$ ist *gemischter* als $\mathbf{y}$" oder "$\mathbf{y}$ *majorisiert* $\mathbf{x}$"):

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \quad \text{falls} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum\limits_{i=1}^{k} y_{[i]}, k = 1, 2, ..., n-1 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{[i]} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_{[i]} \end{cases} \tag{1}$$

Zwei n–Tupel $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ heißen *vergleichbar* wenn $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ oder $\mathbf{y} \prec \mathbf{x}$ gilt. Da es vorkommen kann, daß zwei n–Tupel nicht vergleichbar sind, ist "$\prec$" eine sog. *Halbordnung* (siehe auch den Artikel von A. Uhlmann in diesem Band).
Unglücklicherweise wird in der mehr physikalisch bzw. chemisch orientierten Literatur, vgl. etwa v. Neumann [2], Uhlmann [3], Ruch und Mead [4], Ruch, Schranner und Seligman [5], Alberti und Uhlmann [6] oder Thirring [7], der Richtungssinn von "$\prec$" entgegengesetzt benutzt.

Eine n–reihige Matrix $\mathbf{T} = (T_{ij})$ heißt *bistochastisch*, wenn $0 \leq T_{ij} \leq 1, \forall i, j$ und $\sum\limits_{i=1}^{n} T_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} T_{ij} = 1$ gilt.

Die Menge der bistochastischen Matrizen werde mit $\mathcal{BST}$ abgekürzt.

Eine zu (1) äquivalente Charakterisierung ist:

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \quad \text{falls} \quad \exists \mathbf{T} \in \mathcal{BST} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Ty} = \mathbf{x}. \tag{2}$$

Die Menge aller n–Tupel, die gemischter als $\mathbf{z}$ sind, heiße $\mathcal{G}(\mathbf{z})$.

2. Unsere Beobachtung

Alsdann betrachten wir physikalische Systeme, deren Zustände durch nachstehende *Zustandsräume* beschrieben werden können.

$$\mathcal{S}_n := \{\mathbf{q} : \mathbf{q} = (q^1, q^2, \ldots, q^n), q^i \geq 0, \ \sum q^i = 1\}$$

Nun definieren wir über diesen Zustandsräumen *Prozesse*, also Zustandsänderungen in der Zeit:

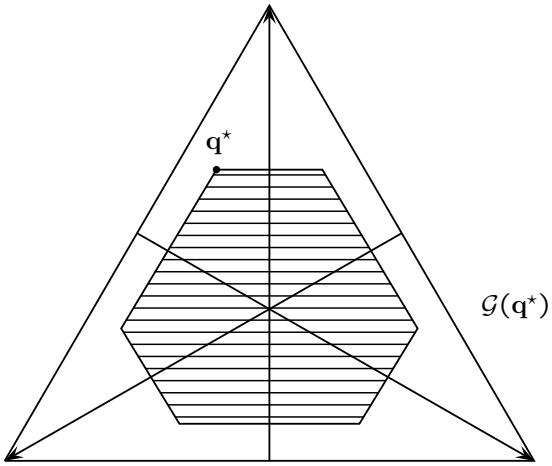
$$R_+ \ni t \to \mathbf{q}(t) \in \mathcal{S}_n$$

Schließlich stellen wir an den Prozeß zwei Forderungen, nämlich i) mischungsverstärkend und ii) stetig zu sein. In Anlehnung an Laßner/Laßner [8] wurden diese Prozesse in [9] *cc–Prozesse* genannt und mit $\mathcal{P}_{cc}$ abgekürzt, also:

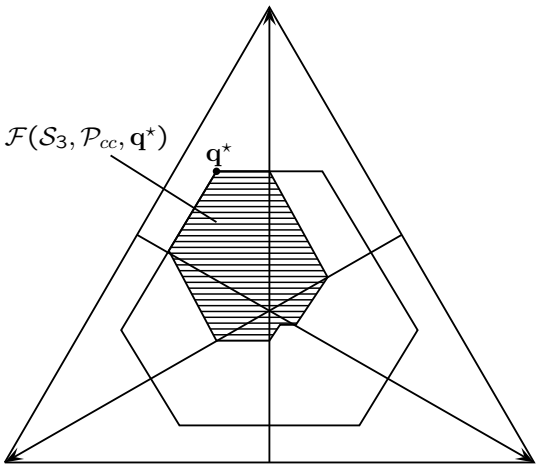
$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{cc} := \{ & R \ni t \to \mathbf{q}(t) \in \mathcal{S}_n \text{ mit:} \\ & \text{i) } \forall\, t', t'' \text{ mit } 0 \leq t' \leq t'' : \ \mathbf{q}(t'') \prec \mathbf{q}(t') \\ & \text{ii) } \lim_{t' \to t''} q(t') = q(t'')\} \end{aligned}$$

Wenn ein Zustand $\mathbf{q}$ von $\mathbf{q}^\star$ durch einen cc–Prozeß erreichbar ist, dann schreiben wir $\mathbf{q} \ll \mathbf{q}^\star$. Die Menge aller derjenigen Zustände, die von $\mathbf{q}^\star \in \mathcal{S}_n$ durch cc–Prozesse erreichbar sind, heiße $\mathcal{F}(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}_{cc}, \mathbf{q}^\star)$. (Das $\mathcal{F}$ möge an Zukunft erinnern, $\mathcal{F}(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}_{cc}, \mathbf{q}^\star)$ ist also nichts anderes als die Zukunft von $\mathbf{q}^\star$ unter cc-Prozessen.)

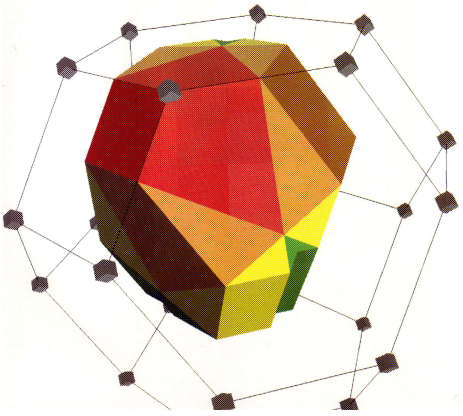
Die Mengen $\mathcal{F}(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}_{cc}, \mathbf{q}^\star)$ sind erstmals in [9] konstruiert worden. Sie sind klarerweise Teilmengen von $\mathcal{G}(\mathbf{q}^\star)$. Ihre hervorstechende Eigenschaft ist – im Gegensatz zu $\mathcal{G}(\mathbf{q}^\star)$ – ihre Nichtkonvexität. Der erste nichttriviale Fall ist n = 3. Die nachstehende Abbildung zeigt $\mathcal{G}(\mathbf{q}^\star)$ für n = 3 und ein willkürliches $\mathbf{q}^\star$, wobei für die Darstellung von $\mathcal{S}$ baryzentrische Koordinaten verwendet wurden. Nach dem Satz von Birkhoff [10] ist $\mathcal{G}(\mathbf{q}^\star)$ gerade die konvexe Hülle aller Permutationen von $\mathbf{q}^\star$.

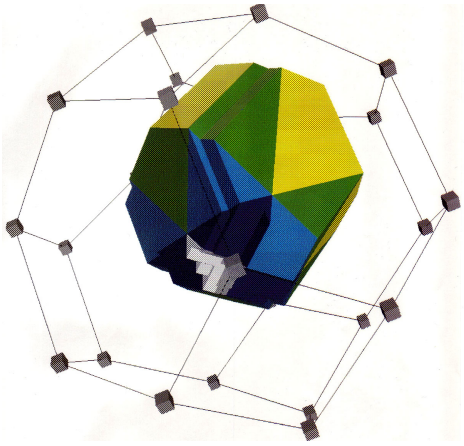


Der schraffierte Bereich der nächsten Abbildung zeigt nun die Zustände, die von $\mathbf{q}^\star$ aus durch cc–Prozesse erreicht werden können. Man erkennt sehr schön, da $\mathcal{F}(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}_{cc}, \mathbf{q}^\star)$ eine echte Teilmenge von $\mathcal{G}(\mathbf{q}^\star)$ ist, und wie die einfache Zusatzforderung nach Stetigkeit die Erreichbarkeit zusammenschnrt.



Die beiden folgenden Abbildungen zeigen die Situation für n = 4. Startpunkt ist die rote Ecke. Die 24 Markierungen geben die Permutationen des Startpunktes an. Ihre konvexe Hülle formt wiederum die Menge aller Zustände, die gemischter als der Startpunkt sind. Das farbige Objekt ist $\mathcal{F}(\mathcal{S}_4, \mathcal{P}_{cc}, \mathbf{q}^\star)$. Die Nichtkonvexität wächst sich dramatisch aus:





Abschließend sei festgehalten:
1. Man überzeugt sich ohne weiteres davon, daß "$\ll$" nicht nur selbst wieder eine Halbordnung ist. Sie bedeutet eine Verschärfung der gewöhnlichen Majorisierung,
denn:

$x \ll y \Rightarrow x \prec y$, die Umkehrung gilt i.a. nicht.

2. Offenbar muß mit $0 \leq t' \leq t''$ für $\mathbf{q}(t'') \ll \mathbf{q}(t')$ gelten:

$\mathcal{F}(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}_{cc}, \mathbf{q}(t'')) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}_{cc}, \mathbf{q}(t'))$.

Damit stellt aber das Volumen von $\mathcal{F}(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}_{cc}, \mathbf{q}(t))$ für "$\ll$" ein sog. *isotones Funktional* dar, d.h. ein Funktional, das die Halbordnung monoton begleitet. In
unserem Falle fällt es mit wachsendem t.

Acknowledgment

Für die Abbildungen bin ich Stefan Borchardt (Jena) und Peter Serocka (Bielefeld) zu Dank verpflichtet.

Literatur

[1] A.W. Marshall und I. Olkin, Inequalities. Theory of Majorization and Its Applications, Academic Press, New York, 1979.

[2] J.v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932.

[3] A. Uhlmann, Rep. Math. Phys. **1**, (1970) 147.

[4] P.M. Alberti und A. Uhlmann, Stochasticity and Partial Order, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1981.

[5] W. Thirring, Lehrbuch der Mathematischen Physik, Bd. 4: Quantenmechanik groer Systeme, Springer, Berlin u. Wien, 1980

[6] E. Ruch und C.A. Mead, Theor. Chim. Acta **41** (1976) 95.

[7] E. Ruch, R. Schranner und T.H. Seligman, J. Chem. Phys. **69** (1978) 386.

[8] G. Laßner und Gi. Laßner, Publ. Joint Inst. Nucl. Res. **E2–7537**, Dubna, 1973.

[9] Ch. Zylka, Diss. A, Leipzig, 1982.

[10] G. Birkhoff, Univ. Nac. Tucuman Rev. **5A** (1946) 147.