Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät *71(2004), 167–183*

Heinz Fortak

Hans Ertels „Prinzip der multiplen Determinationspotenz“. Anwendung auf nichtlineare physikalische Systeme[1]

Zusammenfassung

In der Theoretischen Physik, und damit auch in der Theoretischen Meteorologie, spielen bis heute deterministische Evolutionsgleichungen für die Vorhersage künftiger Zustände von komplexen Systemen eine dominierende Rolle. Für kurzfristige Vorhersagen bleiben die Anfangsbedingungen eines Systems ein bestimmendes Element, bei langfristigen Vorhersagen „vergisst” das System diese und wird von der „Umgebung” gesteuert. Deterministisches Chaos und Irreversibilität innerhalb des Systems kommen dann zunehmend als bestimmende Elemente zum Tragen. Die „strenge” Kausalität im System geht dadurch verloren. Dass jedoch selbst bei durchgehender Kausalstruktur eines „abgeschlossenen” Gesamtsystems für die Vorhersage der künftigen Zustände ihrer Teilsysteme mehrere Möglichkeiten gleich berechtigt nebeneinander bestehen, ist ein wichtiges Ergebnis H. Ertels im Rahmen der diesbezüglichen Problemstellungen in der Naturphilosophie.

In den hier durchgeführten Betrachtungen wird von H. Ertels vorausgesetzter Integration von (nicht betrachteten) Evolutionsgleichungen abgegangen, und es wird anstelle der Vergleiche von Anfangs- und Endzuständen, die den Gegenstand von H. Ertels Betrachtungen bilden, die zeitliche Entwicklung zwischen beiden Zuständen, d. h. die Evolution der Teilsysteme zusätzlich in die Betrachtungen einbezogen. Hierzu wird ein System von nichtlinearen Evolutionsgleichungen herangezogen. Diese haben eine Form, wie sie etwa in spektralen oder diskretisierten Versionen hydro-thermodyna-

1 Fortak, H.: Betrachtungen zur Arbeit von Hans Ertel „Kausalität, Teleologie und Willensfreiheit als Problemkomplex der Naturphilosophie“. Enthalten in: W. Schröder (Ed). Arbeitskreis Geschichte der Geophysik und Kosmischen Physik (Beiträge zur Geschichte der Geophysik und Kosmischen Physik, Band 1 (2000)). Zugleich IAGA-History-Newsletter No 41. ISSN: 1615-2824. NE: Schröder, Wilfried. © W. Schröder/Science Edition AGGKP

mischer Modelle von Atmosphäre und Ozeanen auftreten. Das Auftreten von deterministischem Chaos ist durch die Nichtlinearität von vornherein gewährleistet.

Als Folge der Nichtlinearität der Gleichungssysteme sind so klare Aussagen wie bei H. Ertel nicht zu erhalten, jedoch ist das Anfangswert-Problem, die kausal-konditionale Beschreibung Ertels, hier beschrieben durch nichtlineare Integralgleichungssysteme, natürlich reproduzierbar. Hinsichtlich der teleologischen Beschreibung und derjenigen, die der „Willensfreiheit" zuzuschreiben wären, sind die entsprechenden Aussagen bei nichtlinearen Systemen nicht von vornherein klar verständlich. Erst nach Vernachlässigung von explizit auftretenden nichtlinearen Termen kann gezeigt werden, dass auch hier, trotz weiterhin implizitem Auftreten von nichtlinearen Termen, beide H. Ertelsche Fälle reproduzierbar sind, jedoch mit dem Unterschied, dass die künftigen Zustände der komplementären Systeme lediglich durch die „Struktur" derselben repräsentiert werden.

Es werden an dieser Stelle nicht alle Interpretationsmöglichkeiten der hergeleiteten Gleichungen und die zugehörigen Anwendungen, etwa in der Meteorologie, diskutiert. Es ist jedoch ein Rahmen angegeben, in welchem auf der Basis von H. Ertels Gedanken in Verbindung mit geeigneten Evolutionsgleichungen Probleme diskutiert werden können, die bisher kaum Beachtung gefunden hatten. Hierbei wird etwa an das Problem der „Nachwirkung" gedacht, bei dem es wegen unvollständiger Kenntnis aller Variablen der Systeme dazu kommt, dass vergangene Zustände in die Betrachtung einbezogen werden müssen („Gedächtnis" der Systeme).

1. Einleitung

In seiner Arbeit betrachtet H. Ertel die „Welt" als ein streng kausales System. Unter „Welt" versteht er sicher nicht das Weltall, sondern einen massenmäßig und energetisch abgeschlossenen Teil des Weltalls, d. h. ein sog. „abgeschlossenes" System[2]. Für alles was auf der Erde an Prozessen abläuft, kann das Sonnensystem als ein derartig abgeschlossenes System betrachtet werden. Die natürliche Unterteilung dieses Gesamtsystems in die Systeme „Partialsystem" und „Umgebung" wäre dann diejenige mit der Erde als Partialsystem und mit Sonne und Mond als Umgebung. In nichtgeologischen

2 Ertel, H.: Kausalität, Teleologie und Willensfreiheit als Problemkomplex der Naturphilosophie. Sitz. Ber. Dt. Akad. Wiss. zu Berlin, Klasse f. Mathematik u. allgem. Naturwiss., 1954, Nr. 1.

Zeiträumen kann diese „Umgebung” der Erde als ein deterministisches System angesehen werden; es lässt sich durch eine endliche Zahl von Parametern beschreiben und verhält sich kausal. Beide Systeme sind miteinander gekoppelt, wobei jedoch in den betrachteten Zeiträumen die Rückkopplung von der Erde in Richtung Sonne und Mond vernachlässigbar ist. Das Partialsystem Erde, gesteuert von der „Umgebung”, besteht seinerseits aus einer Vielzahl von Partialsystemen, die untereinander in vielfacher nichtlinearer Wechselwirkung stehen. Es sind dies: Atmosphäre, Hydrosphäre, Kryosphäre, Lithosphäre und Biosphäre. Bei der weiteren Unterteilung in diese vier Partialsysteme geht die „astronomische Umwelt” in jedes derselben bestimmend ein. Diese triviale Feststellung weist sich jedoch in den miteinander gekoppelten nichtlinearen Evolutionsgleichungen als durchaus nichttrivial aus.

H. Ertel hat diese Situation sicher im Auge gehabt, doch es ging ihm in seiner Arbeit um prinzipielle Aussagen in der Naturphilosophie. Hierzu konnte er von einem abgeschlossenen System ausgehen und dieses in „Partialsystem” und „Umgebung” aufteilen. Determinismus, und damit Kausalität, sind dann sowohl für das Gesamtsystem als auch für die beiden Teilsysteme gewährleistet.

Falls der Zustand des Gesamtsystems zum Zeitpunkt t durch eine endliche Zahl von Parametern $X^k(t)$, mit $k = 1,\dots,N$, darstellbar ist, kann man das Verhalten von Systemen normalerweise mit Hilfe von Evolutionsgleichungen der Art

$$\left(X^1, X^2, \dots, X^N, \mathrm{d}X^1/dt,\ \mathrm{d}X^2/dt, \dots, \mathrm{d}X^N/dt\,; t\right) = 0 \tag{1}$$

beschreiben. Aus den Parametern $X^k(t)$ lässt sich dann ein N- dimensionaler Zustandsvektor

$$\mathbf{X}(t) = \left(X^1(t), X^2(t), \dots, X^N(t)\right)^T \tag{2}$$

bilden[3]. Im Zustandsraum der Parameter beschreibt $\mathbf{X}(t)$ die Trajektorie des Zeitverhaltens des Gesamtsystems. Mit (2) lässt sich das System (1) in der abgekürzten Form $\mathbf{H}\left(\mathbf{X}(t), d\mathbf{X}/dt\,; t\right) = 0$, oder in bereits aufgelöster Form, als $d\mathbf{X}/dt = \mathbf{G}\left(\mathbf{X}, t\right)$, mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{X}(t_0)$ für $t = t_0$, schreiben.

H. Ertel verwendet in seiner Arbeit keine Evolutionsgleichung der Art $\mathbf{H}\left(\mathbf{X}(t), d\mathbf{X}/dt\,; t\right) = 0$, sondern er setzt eine Lösung dieses Gleichungssystems in der Form $\mathbf{F}\left(\mathbf{X}, \mathbf{X}(t_0)\right) = 0$ voraus (deterministisches System,

3 Das hoch gestellte T bezeichnet die Transponierung von Vektoren und Matrizen.

Kausalität). Unter bestimmten Bedingungen (Abwesenheit von deterministischem Chaos) wird eine derartige Lösung existieren.

Ertel führt dann eine „Dekomposition“ des Zustandsvektors in $\mathbf{X} = \mathbf{X}^S + \mathbf{X}^U$ durch (Index S für das „Partialsystem”, Index U für die „Umgebung”). Während das Gesamtsystem (Partialsystem und Umgebung) hinsichtlich Masse und Energie von einer „weiteren Umgebung” abgeschlossen sein soll, erscheint es jedoch als „intern offen”: Zwischen Partialsystem und Umgebung im engeren Sinne wird sowohl Masse als auch Energie ausgetauscht. Es entstehen dabei zwei miteinander gekoppelte Systeme von Gleichungen:

$$\mathbf{F}^S\left(\mathbf{X}^S,\mathbf{X}^U;\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U(t_0)\right)=0,\quad \mathbf{F}^U\left(\mathbf{X}^S,\mathbf{X}^U;\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U(t_0)\right)=0.\tag{3}$$

Diese Dekomposition ändert die Kausalität innerhalb des Gesamtsystems nicht. Gleiches gilt für die weitere von H. Ertel vorgenommene Auflösung der nichtlinearen Gleichungssysteme (3):

$$\mathbf{\Phi}_1^S\left(\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U(t_0);\mathbf{X}^S,\ 0\ \right)=0 \qquad E(14)$$

$$\mathbf{\Phi}_2^U\left(\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U(t_0);\ 0,\ \mathbf{X}^U\right)=0 \qquad E(15)$$

$$\mathbf{\Phi}_3^S\left(\mathbf{X}^S(t_0),\quad 0,\quad;\mathbf{X}^S,\mathbf{X}^U\right)=0 \qquad E(16)$$

$$\mathbf{\Phi}_4^U\left(\quad 0,\quad \mathbf{X}^U(t_0);\mathbf{X}^S,\mathbf{X}^U\right)=0 \qquad E(17)$$

An der prinzipiellen Möglichkeit einer derartigen Auflösung ist nicht zu zweifeln, an der praktischen Möglichkeit schon, wie sich später zeigen wird. Es beinhalten $E(14)$ und $E(15)$ die „kausal-konditionale Beschreibung des Partialsystems und der Umgebung”. Hier werden die Folgezustände von Teilsystemen eines dekomponierten Gesamtsystems nicht allein durch ihre eigenen Anfangswerte bestimmt, sondern durch diejenigen des Gesamtsystems! Im ersten Fall können die Anfangswerte der Umgebung (als Zwangsbedingung für die Entwicklung des Partialsystems) manchmal als außerhalb des Partialsystems gelegene Bedingungen aufgefasst werden. Im zweiten Fall bestimmt sich die Entwicklung der Umgebung aus ihren eigenen Anfangsbedingungen, jedoch unter Berücksichtigung der Anfangswerte des Partialsystems. Die „teleologische“ (Ziel gerichtete, Zweck bestimmte) Beschreibung der Zustandsänderungen eines Partialsystems, Gleichung $E(16)$, geht von dessen Anfangswerten aus. In Ziel gerichteter Form wird der Endzustand des Partialsystems jedoch durch den Endzustand der Umgebung mitbestimmt, welcher sich gewissermaßen „frei“ und unter geringem Einfluss von Seiten des Partialsystems auf diesen Zustand hin bewegen kann: „Teleologie“ beim

Partialsystem, „Willensfreiheit” beim Umgebungssystem. Als Beispiel diene die kurzfristige Wettervorhersage. Die großräumige Dynamik wird noch nicht wesentlich vom turbulenten Strömungsregime, etwa innerhalb der planetarischen Grenzschicht, bestimmt. Dieses entwickelt sich unter dem Einfluss des großräumigen Systems teleologisch, d.h. Ziel gerichtet. Schließlich beinhaltet Gleichung $E(17)$ die Möglichkeit, dass der Endzustand der Umgebung aus seinem Anfangszustand in Verbindung mit dem Endzustand des Partialsystems bestimmt werden kann, der sich hier „frei“ auf diesen Zustand hin bewegen kann: „Willensfreiheit” beim Partialsystem, „Teleologie“ beim Umgebungssystem). Hier werde die Langfrist- oder Klimaprognose betrachtet. Hier besitzt das „turbulente Regime“ infolge vielfältiger energetischer oder chemischer Prozesse die Möglichkeit, sich unter geringerem Einfluss des großräumigen Systems „frei“ zu entfalten während sich das dynamische Regime dann eher teleologisch anpasst.

2. Einbettung eines Subsystems (S) in ein Umgebungssystem (U)

Es soll nun der Aspekt der zeitlichen Entwicklung der Untersysteme eines Gesamtsystems in die Betrachtungen einbezogen werden. Hierzu wird eine spezielle nichtlineare Evolutionsgleichung herangezogen. Modelle der Hydro-Thermodynamik lassen sich in spektraler oder in diskretisierter Form so darstellen:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{G}\left(\mathbf{X}\right) = \mathbf{A} : \mathbf{X}\mathbf{X} - \mathbf{B} \bullet \mathbf{X} + \mathbf{C} \cdot \tag{4}$$

Hierin bedeuten $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ Matrizen (Tensoren) dritter, zweiter und erster Stufe. Doppeltskalare und einfachskalare Multiplikationen in dieser Vektor-Tensordarstellung bedeuten Verjüngungen der Art $A^k_{mn} X^m X^n$, $B^k_m X^m$. Die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ sind zeitunabhängige „Strukturparameter” des abgeschlossenen Systems (H. Ertels „Welt”).

Eine Dekomposition des Zustandsvektors $\mathbf{X}$ geht einher mit einer solchen der Struktur gemäß

$$\begin{aligned}
&\mathbf{X} = \mathbf{X}^S + \mathbf{X}^U \equiv \left(X^{k=1,\dots,N}\right) \\
&\mathbf{X}^S \equiv \left(X^{k=1,\dots,K}\right), \quad \mathbf{X}^U \equiv \left(X^{k=K+1,\dots,N}\right): \quad \text{1D-Matrix} \\
&\mathbf{C} = \mathbf{C}^S + \mathbf{C}^U \equiv \left(C^{k=1,\dots,N}\right) \\
&\mathbf{C}^S \equiv \left(C^{k=1,\dots,K}\right), \quad \mathbf{C}^U \equiv \left(C^{k=K+1,\dots,N}\right): \quad \text{1D-Matrix}
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\mathbf{B} \equiv \left(B^{m=1,\dots,N}_{k=1,\dots,N}\right) = \mathbf{B}^S + \mathbf{B}^U = \mathbf{B}^S_S + \mathbf{B}^S_U + \mathbf{B}^U_S + \mathbf{B}^U_U$$

$$\mathbf{B}^S_S \equiv \left(B^{m=1,\dots,K}_{k=1,\dots,K}\right), \qquad \mathbf{B}^S_U \equiv \left(B^{m=1,\dots,K}_{k=K+1,\dots,N}\right)$$

$$\mathbf{B}^U_S \equiv \left(B^{m=K+1,\dots,N}_{k=1,\dots,K}\right), \quad \mathbf{B}^U_U \equiv \left(B^{m=K+1,\dots,N}_{k=K+1,\dots,N}\right) \qquad : \text{2D-Matrizen} \ (6)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^U = \mathbf{A}^S_{SS} + \mathbf{A}^S_{SU} + \mathbf{A}^S_{US} + \mathbf{A}^S_{UU} +$$

$$+ \mathbf{A}^U_{SS} + \mathbf{A}^U_{SU} + \mathbf{A}^U_{US} + \mathbf{A}^U_{UU} \equiv \left(A^{n=1,\dots,N}_{k=1,\dots,N \quad m=1,\dots,N}\right) \qquad : \text{3D-Matrizen} \ (7)$$

$$\mathbf{A}^S_{SS} \equiv \left(A^{n=1,\dots,K}_{k=1,\dots,K \quad m=1,\dots,K}\right), \qquad \mathbf{A}^S_{SU} \equiv \left(A^{n=1,\dots,K}_{k=1,\dots,K \quad m=K+1,\dots,N}\right)$$

$$\mathbf{A}^S_{US} \equiv \left(A^{n=1,\dots,K}_{k=K+1,\dots,N \quad m=1,\dots,K}\right) \quad \mathbf{A}^S_{UU} \equiv \left(A^{n=1,\dots,K}_{k=K+1,\dots,N \quad m=K+1,\dots,N}\right)$$

$$\mathbf{A}^U_{SS} \equiv \left(A^{n=K+1,\dots,N}_{k=1,\dots,K \quad m=1,\dots,K}\right) \quad \mathbf{A}^U_{SU} \equiv \left(A^{n=K+1,\dots,N}_{k=1,\dots,K \quad m=K+1,\dots,N}\right)$$

$$\mathbf{A}^U_{US} \equiv \left(A^{n=K+1,\dots,N}_{k=K+1,\dots,N \quad m=1,\dots,K}\right) \quad \mathbf{A}^U_{UU} \equiv \left(A^{n=K+1,\dots,N}_{k=K+1,\dots,N \quad m=K+1,\dots,N}\right).$$

Führt man diese Ausdrücke in (4) ein und sortiert man nach der oberen Indexreihe, dann erhält man zunächst, formal aufgeschrieben:

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \left(\mathbf{A}^S_{SS} + \mathbf{A}^S_{SU} + \mathbf{A}^S_{US} + \mathbf{A}^S_{UU}\right):$$

$$\left(\mathbf{X}^S\mathbf{X}^S + \mathbf{X}^S\mathbf{X}^U + \mathbf{X}^U\mathbf{X}^S + \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U\right) - \left(\mathbf{B}^S_S + \mathbf{B}^S_U\right)\cdot\left(\mathbf{X}^S + \mathbf{X}^U\right) + \mathbf{C}^S$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \left(\mathbf{A}^U_{SS} + \mathbf{A}^U_{SU} + \mathbf{A}^U_{US} + \mathbf{A}^U_{UU}\right):$$

$$\left(\mathbf{X}^S\mathbf{X}^S + \mathbf{X}^S\mathbf{X}^U + \mathbf{X}^U\mathbf{X}^S + \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U\right) - \left(\mathbf{B}^U_S + \mathbf{B}^U_U\right)\cdot\left(\mathbf{X}^S + \mathbf{X}^U\right) + \mathbf{C}^U$$

Doppeltskalare und einfachskalare Multiplikationen lassen nur Terme bestehen, die gleichen oberen und gleichen unteren „Index” (S oder U) besitzen. Man erhält so

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \left(\mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S + \mathbf{A}^S_{SU} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^U + \mathbf{A}^S_{US} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^S + \mathbf{A}^S_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U\right) -$$

$$-\left(\mathbf{B}^S_S \cdot \mathbf{X}^S + \mathbf{B}^S_U \cdot \mathbf{X}^U\right) + \mathbf{C}^S$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \left(\mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S + \mathbf{A}^U_{SU} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^U + \mathbf{A}^U_{US} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^S + \mathbf{A}^U_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U\right) -$$

$$-\left(\mathbf{B}^U_S \cdot \mathbf{X}^S + \mathbf{B}^U_U \cdot \mathbf{X}^U\right) + \mathbf{C}^U \qquad .(8)$$

Je nach Fragestellung, im H. Ertelschen Sinne, lassen sich genau vier Umordnungen und Zusammenfassungen vornehmen:

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \left(\mathbf{B}^S_S - \mathbf{A}^S_{US} \bullet \mathbf{X}^U - \overline{\mathbf{A}}^S_{SU} \bullet \mathbf{X}^U\right) \bullet \mathbf{X}^S + \\ + \left(\mathbf{A}^S_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{B}^S_U \bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{C}^S\right) \tag{9}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \left(\mathbf{B}^U_U - \mathbf{A}^U_{SU} \bullet \mathbf{X}^S - \overline{\mathbf{A}}^U_{US} \bullet \mathbf{X}^S\right) \bullet \mathbf{X}^U + \\ + \left(\mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{B}^U_S \bullet \mathbf{X}^S + \mathbf{C}^U\right) \tag{10}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \left(\mathbf{B}^S_U - \overline{\mathbf{A}}^S_{US} \bullet \mathbf{X}^S - \mathbf{A}^S_{SU} \bullet \mathbf{X}^S\right) \bullet \mathbf{X}^U + \\ + \left(\mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{B}^S_S \bullet \mathbf{X}^S + \mathbf{C}^S\right) \tag{11}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \left(\mathbf{B}^U_S - \overline{\mathbf{A}}^U_{SU} \bullet \mathbf{X}^U - \mathbf{A}^U_{US} \bullet \mathbf{X}^U\right) \bullet \mathbf{X}^S + \\ + \left(\mathbf{A}^U_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{B}^U_U \bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{C}^U\right) \tag{12}$$

wobei hier abweichend von Fußnote 2 $\overline{\mathbf{A}}^S_{US}$ die transponierte Matrix von $\mathbf{A}^S_{US}$ bedeuten soll.

Führt man die folgenden Abkürzungen für die in Klammern stehenden Tensoren zweiter Stufe ($\mathbf{M}$) und die Vektoren ($\mathbf{N}$) ein

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^S_S\left(\mathbf{X}^U\right) &= \mathbf{B}^S_S - \left(\mathbf{A}^S_{US} + \overline{\mathbf{A}}^S_{SU}\right) \bullet \mathbf{X}^U \\
\mathbf{M}^U_U\left(\mathbf{X}^S\right) &= \mathbf{B}^U_U - \left(\mathbf{A}^U_{SU} + \overline{\mathbf{A}}^U_{US}\right) \bullet \mathbf{X}^S \\
\mathbf{M}^S_U\left(\mathbf{X}^S\right) &= \mathbf{B}^S_U - \left(\overline{\mathbf{A}}^S_{US} + \mathbf{A}^S_{SU}\right) \bullet \mathbf{X}^S \\
\mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right) &= \mathbf{B}^U_S - \left(\overline{\mathbf{A}}^U_{SU} + \mathbf{A}^U_{US}\right) \bullet \mathbf{X}^U \\
\mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^U\right) &= \mathbf{A}^S_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{B}^S_U \bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{C}^S \\
\mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^S\right) &= \mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{B}^U_S \bullet \mathbf{X}^S + \mathbf{C}^U \\
\mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^S\right) &= \mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{B}^S_S \bullet \mathbf{X}^S + \mathbf{C}^S \\
\mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right) &= \mathbf{A}^U_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{B}^U_U \bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{C}^U
\end{aligned} \tag{13}$$

dann erhält man sowohl für die „Umgebung” als auch für das Partialsystem Gleichungssysteme, die in der Struktur dem des Gesamtsystems gleichen. Der Unterschied besteht jedoch darin, dass die von der Zeit unabhängigen „Strukturparameter” $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ des Gesamtsystems durch solche ersetzt erscheinen, welche die Kopplung zwischen den beiden Systemen vermitteln:

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^S_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{9'}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{M}^U_U\left(\mathbf{X}^S\right)\cdot\mathbf{X}^U + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^S\right) \tag{10'}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{M}^S_U\left(\mathbf{X}^S\right)\cdot\mathbf{X}^U + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^S\right) \tag{11'}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{12'}$$

Man beachte, dass sich auch in den Vektoren **N** Nichtlinearitäten befinden.

Die Zustandsvektoren $\mathbf{X}^S$ und $\mathbf{X}^U$ treten auf den rechten Seiten der Gleichungen (9´)- (12´) sowohl explizit als auch implizit auf. Dies ermöglicht in Fällen, in denen etwa einer der Zustandsvektoren als bekannt angesehen werden kann, die Verwendung einer Vektorgleichung mit explizitem Auftreten der komplementären Variable. Dies gilt für (9´) und (10´). Hier treten die Variablen des jeweils komplementären Systems sowohl als Koeffizientenmatrizen als auch in Form additiver „Vektoren" auf. Es handelt sich somit um inhomogene Differentialgleichungen erster Ordnung mit variablen Koeffizienten. Dies ist beim System (11´), (12´) anders. Dort erscheinen die zu prognostizierenden Variablen in den Koeffizienten. Auch hierfür existieren Anwendungen, wie später gezeigt werden wird.

Es besteht formal die Möglichkeit, verschiedene Kombinationen der vorstehenden Gleichungssysteme zu bilden, und zwar die Kombinationen (9´) + (10´), (9´) + (12´), (11´) + (10´) und (11´) + (12´). Zu jeweils einem Gleichungssystem für das Partialsystem gehört ein solches für die Umgebung; beide zusammen beschreiben in gekoppelter Weise die Zustandsänderungen der Teilsysteme des Gesamtsystems:

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^S_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{9'}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{M}^U_U\left(\mathbf{X}^S\right)\cdot\mathbf{X}^U + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^S\right) \tag{10'}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^S_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{9'}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{12'}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{M}^S_U\left(\mathbf{X}^S\right)\cdot\mathbf{X}^U + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^S\right) \tag{11$'$}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{M}^U_U\left(\mathbf{X}^S\right)\cdot\mathbf{X}^U + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^S\right) \tag{10$'$}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{M}^S_U\left(\mathbf{X}^S\right)\cdot\mathbf{X}^U + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^S\right) \tag{11$'$}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{12$'$}$$

Je nachdem, welche Vorkenntnis man über $\mathbf{X}^S$ oder $\mathbf{X}^U$ besitzt, wird man sich für eines der vorstehenden Gleichungssysteme entscheiden.

Generell muss betont werden, dass es bei dem als notwendig erachteten Ausgang von Evolutionsgleichungen obiger Art darauf ankommt, zwei gegebenenfalls sehr umfangreiche miteinander gekoppelte nichtlineare Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zu lösen. Es ist aber auch bekannt, dass man derartige Probleme auf Probleme der Lösung von Integralgleichungen zurückführen kann. Integriert man nämlich diese Gleichungssysteme über das Zeitintervall $t_0 \to t$, dann ergeben sich jeweils Systeme von miteinander gekoppelten nichtlinearen Integraleichungen. Als Beispiel diene das System (9′). Formal integriert erhält man hier

$$\mathbf{X}^S = \mathbf{X}^S\left(t_0\right) + \int_{t_0}^{t} dt\left[\mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^S_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^U\right)\right] \tag{14}$$

Im Falle der eingangs betrachteten Situation, Erde als Partialsystem (S) und Sonne + Mond als Umweltsystem, kann der „Vektor" $\mathbf{X}^U$ als bekannt angesehen werden. Dann bestimmt das nichtlineare System von Integralgleichungen (14) alles, was unter dem Einfluss von Sonne und Mond im Teilsystem Erde an Prozessen ablaufen kann. Selbstverständlich kann hierfür bereits das System (9′) herangezogen werden. Die Darstellung in Form von Integralgleichungen ermöglicht es jedoch, die Verbindung zwischen der hier mittels der Evolutionsgleichungen hergestellten Beziehungen und denjenigen von H. Ertel direkter herzustellen, welche eine bereits vollzogene Integration von Evolutionsgleichungen voraussetzten. Verwendet man die im Sinne von (14) integrierten Gleichungssysteme (9′) bis (12′), dann stehen zum Vergleich die H. Ertelschen Gleichungssysteme:

$$\Phi_1^S\left(\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U(t_0);\mathbf{X}^S,\ 0\ \right)=0 \qquad E(14)$$

$$\Phi_2^U\left(\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U(t_0);\ 0,\ \mathbf{X}^U\right)=0 \qquad E(15)$$

$$\Phi_3^S\left(\mathbf{X}^S(t_0),\quad 0,\quad ;\mathbf{X}^S,\mathbf{X}^U\right)=0 \qquad E(16)$$

$$\Phi_4^U\left(\quad 0,\quad \mathbf{X}^U(t_0);\mathbf{X}^S,\mathbf{X}^U\right)=0 \qquad E(17)$$

Betrachtet werden zunächst die Systeme (9′) und (10′). Nach zeitlicher Integration von (10′) ergibt sich ein System von Integralgleichungen des Typs (14) mit explizitem Auftreten von $\mathbf{X}^U(t_0)$. Die Lösung des Integralgleichungssystems ergibt $\mathbf{X}^U=\mathbf{X}^U\left(\mathbf{X}^U(t_0),\mathbf{X}^S;t\right)$. Eingesetzt in das gleichfalls über die Zeit integrierte System (9′) liefert den Zusammenhang $\left(\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U(t_0);\mathbf{X}^S,0\right)$. Dieser entspricht demjenigen von $E(14)$. Verwendet man die Systeme (9′) und (12′) und integriert hier zunächst (9′), dann erhält man $\mathbf{X}^S=\mathbf{X}^S\left(\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U;t\right)$. Dies wieder in das integrierte System (12′) eingesetzt liefert dann den Zusammenhang $\left(\mathbf{X}^S(t_0),\mathbf{X}^U(t_0);0,\mathbf{X}^U\right)$, der $E(15)$ entspricht. Dies sind die beiden H. Ertelschen Prognosegleichungssysteme $E(14)$ und $E(15)$. H. Ertels teleologischer Fall $E(16)$ könnte bereits aus dem über die Zeit integrierten System (9′) folgen. Dieses liefert den Zusammenhang $\left(\mathbf{X}^S(t_0),0;\mathbf{X}^S,\mathbf{X}^U\right)$. Analog liefert das über die Zeit integrierte System (10′) den Teil von H. Ertels Aussagen, den er unter „Willensfreiheit” aufführt: $\left(0,\mathbf{X}^U(t_0);\mathbf{X}^S,\mathbf{X}^U\right)$.

Die bisherigen Betrachtungen setzen die eindeutige Lösung von „vollständigen” Systemen nichtlinearer Integralgleichungen erster Ordnung voraus; man hätte es dann mit strenger Kausalität zu tun. Analytisch exakte Lösungen der hier anstehenden Systeme von Gleichungen sind jedoch nicht denkbar, und numerische Lösungen sind mit unvermeidlichen Fehlern behaftet, welche die hier vorausgesetzte Kausalität allen Geschehens zerstören. Auch die unvollständige Beschreibung des Gesamtsystems oder seiner Partialsysteme führt zu einer Zerstörung der strengen Kausalität.

3. Anwendung der Evolutionsgleichungen

Bisher wurde hinsichtlich einer anderen Sicht der H. Ertelschen Ausführungen mehr formal argumentiert. Nun soll versucht werden, die Gleichungssysteme hinsichtlich ihrer Lösungsmöglichkeiten zu untersuchen. Beispielsweise betrifft eine Anwendung der Systeme (12′), (9′) in der Meteorologie die Trennung der Bewegungen in „großräumige“ (U) und „turbulente“ Bewegungen (S)[4]. Als hier geeignet erscheinende Kombination wird gewählt:

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{12′}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S - \mathbf{M}^S_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{9′}$$

Die großräumigen Parameter seien $\mathbf{X}^U$ (Umgebung), die turbulenten $\mathbf{X}^S$ (eingebettete Turbulenz). In den Vektoren $\mathbf{N}$ und in den Tensoren $\mathbf{M}$ treten allein die $\mathbf{X}^U$ auf. Wegen der Nichtlinearität der ersten Terme in (12′) und (9′) ist die Handhabung derselben, analytisch gesehen, hoffnungslos. In [5] ermöglichte die Formulierung mit Hilfe von Integralgleichungssystemen einen Schritt in Richtung auf eine geschlossene Darstellung von $\mathbf{X}^U(t)$; das Schließungsproblem, d. h. die Bestimmung einer Dissipations-Fluktuations-relation, blieb ungelöst.

Hier soll gezeigt werden, wie es eine Vernachlässigung nichtlinearer (turbulenter) Terme ermöglicht, getrennte Differentialgleichungssysteme für die beiden Teilsysteme abzuleiten. Diese stellen sich dann aber noch als über die „Strukturparameter” miteinander gekoppelt dar. Vernachlässigt man die beiden nichtlinearen Terme $\mathbf{A}^U_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S$, $\mathbf{A}^S_{SS} : \mathbf{X}^S\mathbf{X}^S$, die beide dem „turbulenten” Partialsystem angehören, dann hat man es mit den Gleichungssystemen zu tun:

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = -\mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{12″}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = -\mathbf{M}^S_S\left(\mathbf{X}^U\right)\cdot\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^U\right) \tag{9″}$$

Innerhalb der numerischen Wetter- und Klimavorhersage wird das System (12′′, 9′′) in weiterhin verkürzter Form verwendet: Der Vektor $\mathbf{X}^S$ des turbulenten Zustandsraumes tritt nicht auf und alle turbulenten Effekte werden in Abhängigkeit vom Vektor $\mathbf{X}^U$ des großräumigen („synoptischen”) Scales parametrisiert (über die Schnittstelle zwischen $\mathbf{X}^S$ und $\mathbf{X}^U$ muss an dieser Stelle nichts gesagt werden). Somit wird in diesen Modellen lediglich die einfachste, rein deterministische, Systemversion verwendet:

---

4 Fortak, H.: Das „Gedächtnis” intern offener hydrodynamischer Systeme. Annalen d. Meteorol., Neue Folge, Nr 23, Offenbach/Main, 1986.

5 Fortak, H.: Zum Problem der Fluktuations-Dissipations-Relation. In: Gedächtniskolloquium für K.-H. Hinkelmann. Annalen der Meteorologie, Neue Folge, Nr. 24, Offenbach/ Main, 1988.

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right) = \mathbf{A}^U_{UU} : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{B}^U_U \bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{C}^U .$$

Die turbulenten Effekte verbergen sich hier in den Koeffizientenmatrizen. Deterministisches Chaos wird durch den ersten Term der rechten Seite ermöglicht (E. Lorenz). Eine Parametrisierung des „turbulenten Unterraums“ mittels linearer Parametrisierungsansätze sowie dessen Einarbeitung in die Koeffizienten der Evolutionsgleichung kann im vorliegenden Fall nur als unbefriedigend betrachtet werden. Es ist jedoch Praxis. Man kann sich nicht des Eindrucks verwehren, dass dies hinsichtlich eines vielskaligen Systems (irdisches Gesamtsystem) eine zu einfache und die Physik eines komplexen Systems sehr einschränkende Methode ist. Die Verwendung der in diesem Zusammenhang wohl vorzuziehenden Systeme (12´´) und (9´´) wäre, physikalisch gesehen, die realistischere Approximation an die komplexen Verhältnisse des Gesamtsystems, allerdings mit Auswirkungen (Nachwirkung, siehe Anhang), die man jedoch erwarten sollte.

Jeder Eingriff in das geschlossene Gefüge der Gleichungssysteme führt dazu, dass man damit rechnen muss, ein Gesamtsystem mit „Nachwirkungen” zu produzieren: Man wird Informationen aus der Vergangenheit zur Bestimmung der Lösungsvektoren benötigen. Die hier vorgenommene Vernachlässigung der beiden nichtlinearen Terme wirkt sich so aus, wie eine Unvollständigkeit in der Beschreibung der Systeme durch fehlende Parameter. Die „Kausalität“ geht dabei zwar verloren, doch wird in der Praxis der Vorhersagetechnik auf allen entsprechenden Gebieten selbstverständlich die Entwicklung während der Vergangenheit mitberücksichtigt (auch der Meteorologe tut dies).

Differenziert man (12´´) nach der Zeit, dann erhält man

$$\frac{d^2\mathbf{X}^U}{dt^2} = -\mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)\bullet\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} - \frac{d\mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)}{dt}\bullet\mathbf{X}^S + \frac{d\mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right)}{dt} .$$

Führt man $d\mathbf{X}^S/dt$ aus (9´´) ein, dann folgt

$$\frac{d^2\mathbf{X}^U}{dt^2} = -\mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)\bullet\left[-\mathbf{M}^S_S\left(\mathbf{X}^U\right)\bullet\mathbf{X}^S + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^U\right)\right] -$$

$$- \frac{d\mathbf{M}^U_S\left(\mathbf{X}^U\right)}{dt}\bullet\mathbf{X}^S + \frac{d\mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right)}{dt} .$$

Löst man nun (12´´) unter Verwendung des reziproken Tensors $\left[\mathbf{M}^S_U\left(\mathbf{X}^S\right)\right]^{-1}$ nach $\mathbf{X}^S$ auf,

$$\mathbf{X}^S = -\left[\mathbf{M}_S^U\left(\mathbf{X}^U\right)\right]^{-1} \bullet \left(\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} - \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right)\right)$$

und setzt dies in die vorher stehende Gleichung ein, dann ergibt sich eine hoch nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für den „Vektor” $\mathbf{X}^U$ des synoptischen Scales. Man beachte, dass in weiteren Termen dieser Gleichung, d. h. in

$$\frac{d\mathbf{M}_S^U\left(\mathbf{X}^U\right)}{dt} = -\left(\overline{\mathbf{A}}_{SU}^U + \mathbf{A}_{US}^U\right) \bullet \frac{d\mathbf{X}^U}{dt},$$

$$\frac{d\mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^U\right)}{dt} = \mathbf{A}_{UU}^U : \left(\frac{d\mathbf{X}^U}{dt}\mathbf{X}^U + \mathbf{X}^U\frac{d\mathbf{X}^U}{dt}\right) - \mathbf{B}_U^U \bullet \frac{d\mathbf{X}^U}{dt}$$

ebenfalls $\mathbf{X}^U$ und $d\mathbf{X}^U / dt$ auftreten und dass sich damit das Endgleichungssystem sehr kompliziert gestaltet. In dieses gehen jedoch alle Strukturparameter des turbulenten Scales ein: Die Kopplung des großräumigen Systems (U) (Umgebung) mit seinem turbulenten Partialsystem (S) wird lediglich durch die Struktur desselben hergestellt. Die Lösung wäre darstellbar in der Form

$$\mathbf{F}^U\left(0, \mathbf{X}^U\left(t_0\right); \mathbf{A}^S, \mathbf{B}^S, \mathbf{C}^S; \mathbf{X}^U; t\right) = 0 .$$

Das synoptische System entwickelt sich aus seiner Anfangssituation heraus (teleologisch, Ziel gerichtet) mit der Zeit unter Zwangsbedingungen, die der „Struktur” des turbulenten Partialsystems entstammen. Der Satz von „Strukturparametern” des turbulenten Partialsystems charakterisiert den „Endzustand” desselben, welcher sich entsprechend einer „freien Willenshandlung“ eingestellt hatte. Somit entspricht dieser Fall hinsichtlich des Partialsystems demjenigen, den H. Ertel der „Willensfreiheit” zuordnet. Dieser Fall wäre mit der längerfristigen Vorhersage in der Meteorologie verknüpft. Die Parametrisierung der turbulenten Effekte spiegelt sich hier indirekt in den Strukturparametern des turbulenten Partialsystems wieder.

Die Umkehrung, nämlich die Berechnung des turbulenten Scales unter dem Einfluss des synoptischen gestaltet sich ganz analog. Hierbei wird von den Systemen (11´), (10´) ausgegangen, d. h. von

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = \mathbf{A}_{UU}^S : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{M}_U^S\left(\mathbf{X}^S\right) \bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^S\right) \tag{11′}$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = \mathbf{A}_{UU}^U : \mathbf{X}^U\mathbf{X}^U - \mathbf{M}_U^U\left(\mathbf{X}^S\right) \bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^S\right) \tag{10′}$$

und es werden die nichtlinearen Terme $\mathbf{A}^{S}_{UU} : \mathbf{X}^U \mathbf{X}^U$, $\mathbf{A}^{U}_{UU} : \mathbf{X}^U \mathbf{X}^U$ des synoptischen Scales vernachlässigt. Das reduzierte System für den turbulenten Scale (11´´) und (10´´)

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = -\mathbf{M}^{S}_{U}\left(\mathbf{X}^S\right)\bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{N}^S\left(\mathbf{X}^S\right) \qquad (11'')$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = -\mathbf{M}^{U}_{U}\left(\mathbf{X}^S\right)\bullet \mathbf{X}^U + \mathbf{N}^U\left(\mathbf{X}^S\right) \qquad (10'')$$

wird genauso behandelt, wie dasjenige für den synoptischen Scale. Differentiation nach der Zeit von (11´´), Einsetzen von (10´´) und schließlich nach Eliminierung von $\mathbf{X}^U$ aus (11´´) alles in die differenzierte Gleichung (11´´) einsetzen. Auch hier ergibt sich ein nichtlineares System mit einer zweiten Ableitung nach der Zeit, ein System mit Nachwirkung. Die Lösung wäre hier darstellbar in der Form

$$\mathbf{F}^S\left(\mathbf{X}^S\left(t_0\right), 0; \mathbf{X}^S; \mathbf{A}^U, \mathbf{B}^U, \mathbf{C}^U; t\right) = 0 \ .$$

Das turbulente Partialsystem entwickelt sich aus seiner Anfangssituation heraus mit der Zeit unter Zwangsbedingungen, die der „Struktur" des synoptischen Partialsystems entstammen. Der Satz von „Strukturparametern" des synoptischen Partialsystems charakterisiert den „Endzustand" desselben, welcher sich entsprechend einer „freien Willenshandlung" eingestellt hatte. Somit entspricht dieser Fall hinsichtlich des Partialsystems demjenigen, den H. Ertel der „Teleologie" zuordnet.

Dabei fällt auf, dass die hier vorgenommene partielle Linearisierung die zeitliche Entwicklung der beiden Partialsysteme unter zeitlicher Konstanz der jeweiligen Komplementärsysteme beschreibt. Die vorstehend geschilderten Verhältnisse dürften den Vorstellungen eines Prognostikers, etwa eines meteorologischen, nicht fremd vorkommen.

Im Falle völliger Linearität des Problems erhält man die beiden Gleichungssysteme

$$\frac{d\mathbf{X}^S}{dt} = -\mathbf{B}^{S}_{S}\bullet \mathbf{X}^S + \mathbf{C}^S - \mathbf{B}^{S}_{U}\bullet \mathbf{X}^U$$

$$\frac{d\mathbf{X}^U}{dt} = -\mathbf{B}^{U}_{S}\bullet \mathbf{X}^S + \mathbf{C}^U - \mathbf{B}^{U}_{U}\bullet \mathbf{X}^U$$

Löst man die erste Gleichung nach $\mathbf{X}^U$ auf, differenziert nach der Zeit, setzt die zweite Gleichung ein und dann nochmals die nach $\mathbf{X}^U$ aufgelöste erste Gleichung, dann erhält man

$$\frac{d^2\mathbf{X}^S}{dt^2}+\mathbf{B}_U^S\bullet\left[\mathbf{B}_U^U\bullet\left(\mathbf{B}_U^S\right)^{-1}+\left(\mathbf{B}_U^S\right)^{-1}\bullet\mathbf{B}_S^S\right]\bullet\frac{d\mathbf{X}^S}{dt}+$$

$$+\mathbf{B}_U^S\bullet\left[\mathbf{B}_U^U\bullet\left(\mathbf{B}_U^S\right)^{-1}\bullet\mathbf{B}_S^S-\mathbf{B}_S^U\right]\bullet\mathbf{X}^S=\mathbf{B}_U^S\bullet\left[\mathbf{B}_U^U\bullet\left(\mathbf{B}_U^S\right)^{-1}\bullet\mathbf{C}^S-\mathbf{C}^U\right]$$

$$\frac{d^2\mathbf{X}^U}{dt^2}+\mathbf{B}_S^U\bullet\left[\mathbf{B}_S^S\bullet\left(\mathbf{B}_S^U\right)^{-1}+\left(\mathbf{B}_S^U\right)^{-1}\bullet\mathbf{B}_U^U\right]\bullet\frac{d\mathbf{X}^U}{dt}+$$

$$+\mathbf{B}_S^U\bullet\left[\mathbf{B}_S^S\bullet\left(\mathbf{B}_S^U\right)^{-1}\bullet\mathbf{B}_U^U-\mathbf{B}_U^S\right]\bullet\mathbf{X}^U=\mathbf{B}_S^U\bullet\left[\mathbf{B}_S^S\bullet\left(\mathbf{B}_S^U\right)^{-1}\bullet\mathbf{C}^U-\mathbf{C}^S\right]$$

wobei die Gleichung für die „Umgebung” analog entstand. Die Differentialgleichungen sind zwar entkoppelt, sie hängen jedoch von den Strukturparametern des jeweils komplementären Systems ab:

$$\mathbf{X}^S=\mathbf{F}^S\left(\mathbf{X}^S\left(t_0\right),\mathbf{B}_U^S,\mathbf{B}_U^S,\mathbf{B}_U^U\right),\quad \mathbf{X}^U=\mathbf{F}^U\left(\mathbf{X}^U\left(t_0\right),\mathbf{B}_S^U,\mathbf{B}_U^S,\mathbf{B}_S^S\right)$$

Die reduzierten Gleichungssysteme führen bereits auf Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit. Diese benötigen neben den An-fangsbedingungen $\mathbf{X}^S\left(t_0\right)$, bzw. $\mathbf{X}^U\left(t_0\right)$ jedoch zusätzlich die Anfangsbedingungen $d\mathbf{X}^S/dt\big|_{t_0}$, bzw. $d\mathbf{X}^U/dt\big|_{t_0}$. Sie sind jedoch nur zu erhalten, wenn man gemäß

$$d\mathbf{X}^S/dt\big|_{t_0}=\lim\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbf{X}^S\left(t_0\right)-\mathbf{X}^S\left(t_0-\varepsilon\right)\right]:\varepsilon\to 0$$

$$d\mathbf{X}^U/dt\big|_{t_0}=\lim\frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbf{X}^U\left(t_0\right)-\mathbf{X}^U\left(t_0-\varepsilon\right)\right]:\varepsilon\to 0$$

die Vergangenheit der Systeme in die Betrachtungen mit einbezieht. Es handelt sich somit um Prozesse mit Nachwirkung; das „Gedächtnis” der Systeme wird beansprucht!

Schlussbemerkung

Hans Ertel versucht, das Geschehen, das die Natur für uns scheinbar mühelos ablaufen lässt, in eine mathematische Form zu bringen. Dabei kann er zeigen, unter welchen Bedingungen sich die verschiedenen in der Naturphilosophie auftretenden Betrachtungsweisen ergeben. Wählt man in einem dekomponierten System die Anfangsparameter, dann ist eine „kausal-konditionale“ Beschreibung beider Teilsysteme möglich, wählt man Folgeparameter, dann ist für das eine System eine „teleologische” Darstellung möglich, für das andere eine solche, die einer „freien Willenshandlung” entspricht. Man hat den

Eindruck, dass H. Ertel die prinzipielle Kausalität allen Geschehens bejaht.

Die Natur, die wir durch Beobachtungen nicht „vollständig" erkennen können, verhält sich in ihrem Ablauf für uns meist nur scheinbar kausal. Irreversibilität ist immer gegenwärtig und oft genug auch deterministisches Chaos. Von einer durchgehenden Kausalität kann der beobachtende Mensch nicht sprechen. Aber auch der Theoretiker kann ein komplexes „abgeschlossenes" System nicht durch eine endliche Zahl von Parametern beschreiben, kann die zugehörigen Evolutionsgleichungen (Modellbildung) nicht genau genug aufstellen und von einer exakten mathematischen Lösung derartiger, meist nichtlinearer Modellgleichungen kann ebenso nicht gesprochen werden. Trotzdem ist es möglich, die Gedankengänge H. Ertels auf Lösungsverfahren für komplexe Systeme anzuwenden und dabei neue Erkenntnisse, wie etwa hinsichtlich von Nachwirkungseffekten oder sogar hinsichtlich der Entstehung der Irreversibilität, gewinnen. Das chaotische Verhalten komplexer Systeme ist in dem hier verwendeten Modell bereits durch den Term $\mathbf{A}:\mathbf{XX}$ impliziert.

Anhang: Unvollständige Systembeschreibung und Prozesse mit Nachwirkung

In der Regel stellt sich das Problem der Lösung einer deterministischen Systemgleichung in Form einer allgemeinen Evolutionsgleichung dar:

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{G}\left(\mathbf{X},t\right) \text{ mit } \mathbf{X} = \mathbf{X}\left(t_0\right) \text{ für } t = t_0 \,. \tag{A1}$$

Dieses System muss für jede beliebige Anfangsbedingung $\mathbf{X}\left(t_0\right)$ aus der Menge der möglichen Zustände $\mathbf{X}\left(t\right)$ des Systems, dem Zustandsraum, eindeutig lösbar sein. Diese Lösung lässt sich unter Verwendung eines Operators $\mathbf{F}_{t;t_0}$ formal darstellen als

$$\mathbf{X}\left(t\right) = \mathbf{F}_{t;t_0}\left[\mathbf{X}\left(t_0\right)\right]. \tag{A2}$$

In Übereinstimmung mit (A1) wird hier einem Anfangszustand $\mathbf{X}\left(t_0\right)$ eindeutig ein zur Zeit $t > t_0$ erreichter Zustand $\mathbf{X}\left(t\right)$ zugeordnet. Es liegt ein deterministischer Prozess ohne Nachwirkung vor: Jeder Zustand hängt nur vom unmittelbar vorhergehenden ab, nicht von Zeiten, die der Vergangenheit angehören.

Wird das System durch einen unvollständigen Satz von Parametern beschrieben, etwa durch

$$\mathbf{X}^*\left(t\right) = \left(X^1\left(t\right), X^2\left(t\right), \ldots, X^{N-1}\left(t\right)\right)^T, \quad \left(X^N\left(t\right) \text{ ist nicht bekannt}\right),$$

dann wird hierdurch der Zustand $\mathbf{X}\left(t\right)$ nicht mehr eindeutig bestimmbar und man erhält einen Prozess mit Nachwirkung. Wählt man zwei Mitglieder des Systems (A1) und eliminiert aus diesen dX^N / dt, dann erhält man eine Gleichung der Art

$$H^*\left(X^1, X^2, \ldots, X^N, dX^1/dt, dX^2/dt, \ldots, dX^{N-1}/dt; t\right) = 0 .$$

Wendet man diese für $t = t_0$ an, dann ließe sich in dem Fall, dass

$$d\mathbf{X}^*/dt\,\Big|_{t_0} = \left(dX^1/dt\,\Big|_{t_0}, dX^2/dt\,\Big|_{t_0}, \ldots, dX^{N-1}/dt\,\Big|_{t_0}\right)^T \tag{A3}$$

bekannt wäre, wenigstens der Anfangswert $X^N(t_0)$ des unbekannten Schließungsparameters $X^N(t)$ durch Eliminierung aus

$$H^*\left(X^1(t_0), X^2(t_0), \ldots, X^N(t_0), dX^1/dt\Big|_{t_0}, dX^2/dt\Big|_{t_0}, \ldots, dX^{N-1}/dt\Big|_{t_0}; t_0\right) = 0$$

bestimmen. Um (A3) zu ermitteln, benötigt man wegen

$$\frac{d\mathbf{X}^*}{dt}\Big|_{t_0} = \lim \frac{1}{\varepsilon}\left[\mathbf{X}^*(t_0) - \mathbf{X}^*(t_0 - \varepsilon)\right] : \varepsilon \to 0 \tag{A4}$$

jedoch einen Anfangswert aus der Vergangenheit. Es liegt damit Nachwirkung vor. Diese Situation entspricht dem praktischen Leben: Jede Vorhersage von Ereignissen berücksichtigt die in der Vergangenheit abgelaufene Entwicklung; das Gedächtnis spielt dabei eine wichtige Rolle. Es muss somit bei der Anwendung der Gedankengänge H. Ertels, die sich auf die Gleichungen $E(14) - E(17)$ stützen, damit gerechnet werden, dass in der Natur Nachwirkungsprozesse eine große Rolle spielen werden und dass somit aus unserer unvollkommenen Kenntnis der Natur (endliche Parameterzahl) und aus unserer Unfähigkeit, nichtlineare Systeme exakt im erforderlichen Maße zu lösen, ein „Gedächtnis” in die Beschreibung der Natur hineingetragen wird. Von einer strengen Kausalität in einem derartigen abgeschlossenen System wird man in der Praxis somit nicht sprechen können.