



S. Sauerbrei, K. Knicker, U. Sydow, E. C. Haß, P. J. Plath

(Institut für Angewandte und Physikalische Chemie, Universität Bremen)

### Eine mathematische Beschreibung des Schaumzerfalls

Schnell zerfallender Schaum besitzt ganz besondere Eigenschaften. Am Beispiel des Bierschaums können wir zeigen, dass die Zerfallsfunktion des Bierschaumvolumens nicht einfach exponentiell verläuft, dass sich eine instabile Strukturbildung im Schaum entwickelt und dass die Blasengrößenverteilungen nicht einem typischen Diffusionsprozess folgen. Doch maßgebend für diese Aussagen ist die Tatsache, dass das Bier nicht turbulent, sondern mit Ultraschall aufgeschäumt wird. Diese Methode führt zu einer Schaumentstehung, die durch annähernd gleich kleine Blasen zu Beginn im Schaum gekennzeichnet ist. Mit dieser in hohem Maße reproduzierbaren Anfangsbedingung erhält man für die Zerfallsfunktion des Schaumvolumens folgende Ausgleichsfunktion:

$$V(t) = V_0 \exp(bt + ct^{2.5}). \quad (1)$$

Diese Funktion ist separierbar in eine Ausgleichsfunktion für die Drainage (2), die zu Beginn des Schaumzerfalls dominiert, und in eine Ausgleichsfunktion für die Rearrangementphase (3), die den Zerfall zum Ende hin beschreibt,

$$V(t) = V_{0,1} \exp(bt), \quad (2)$$

$$V(t) = V_{0,2} \exp(ct^{2.5}), \quad (3)$$

wobei  $V_0 \approx V_{0,1}$  und  $V_{0,2}$  ein fiktives Volumen der Rearrangementphase darstellt [1].

Die Untersuchung der Schaumbilder des Zerfalls zeigt eine Korrelation zwischen dem Flüssigkeits- bzw. Schaumbereich (Blasen) in den Bildern und dem Flüssigkeits- bzw. Schaumvolumen [1]. Ferner lässt sich eine fraktale Dimension  $D_f$  über den Rand der Blasen bestimmen. Der zeitliche Verlauf dieser Dimension führt zu der Tatsache, dass sich apollonische Strukturen zum Ende hin (Ende der Rearrangementphase) im Schaum ausbilden, da der Wert der Dimension gegen  $D_f \sim 1.3058$  konvergiert, der wiederum der fraktalen Dimension der apollonischen Kreispackung (Abb. 1) entspricht [1,2].

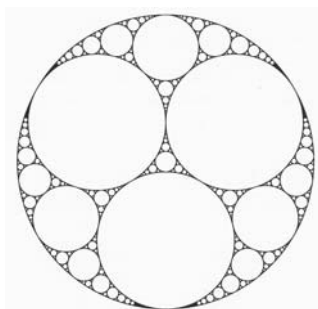


Abb. 1: Apollonische Kreispackung mit der fraktalen Dimension  $D_f \sim 1.3058$ .

Die normierten Blasengrößenverteilungen der Schaumbilder folgen einer bemerkenswerten Dynamik, die nicht einer klassischen Diffusion entspricht. Die statistische Auswertung im Sinne der klassischen Majorisierung [7,8] zeigt eine Abnahme der statistischen Ordnung während der Drainage, ausgehend von der hoch geordneten Verteilung zu Beginn (nur kleine Blasen annähernd gleicher Größe), und sowohl unvergleichbare Verteilungen als auch eine Zunahme der statistischen Ordnung während der Rearrangementphase, die am Ende multimodale Verteilungen entwickelt. Letzteres hängt mit der instabilen Strukturbildung der apollonischen Kreis- bzw. Kugelpackung im Schaum zusammen [3].

Die entsprechenden Übergangsmatrizen der Verteilungen während der Drainage werden durch doppelt stochastische Matrizen repräsentiert. In der Rearrangementphase beschreiben inverse doppelt stochastische und pseudo doppelt stochastische Matrizen die Übergänge der Verteilungen. Die Einträge bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten dieser Matrizen der Rearrangementphase können negativ sein [4].

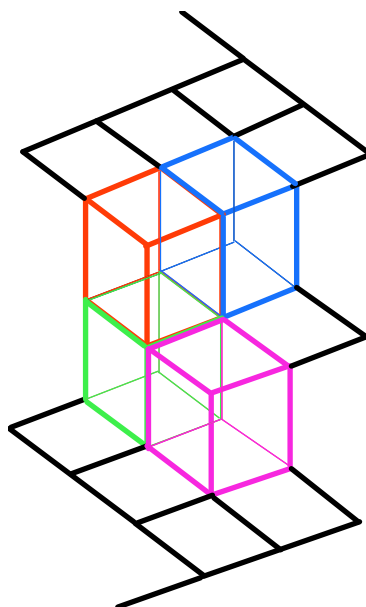


Abb. 2: Struktur eines um Permutationen erweiterten Ruch Diagrammverbands.

Das Abbilden der Verteilungsvektoren auf reelle Werte mit Hilfe der Shannon Entropie, die als Schur-Funktion der Ordnung der klassischen Majorisierung unterliegt [7], zeigt ein vergleichbares Ergebnis wie die klassische Majorisierung. Die Shannon Entropie der Blasengrößenverteilungen

steigt während der Drainage monoton an und schwankt bzw. nimmt ab während der Rearrangementphase. Somit lässt sich die oben erwähnte Prozessstrennung auch aus den Schaumbildern bestimmen [3].

Diese ungewöhnliche Dynamik der Blasengrößenverteilungen lässt sich mit Ruch's Diagrammverbänden modellhaft darstellen. Diese Verbände werden um die Permutationen der Diagramme erweitert (Abb. 2), so dass die Dynamik des Modells sowohl eine positive als auch eine negative Diffusion erlaubt, die wiederum bei unseren experimentell beobachteten Verteilungen auftritt [5,6].

Der Verzicht der Normierung der Blasengrößenverteilungen berücksichtigt eine Diffusion und die abnehmende Anzahl der Blasen, die den Schaumzerfall im wesentlichen charakterisiert und den Schaumbildern entnommen werden kann. Die Auswertung der Dynamik dieser absoluten Blasengrößenverteilungen erfolgt durch die schwache Sub-Majorisierung [7], die einen Diffusionsprozess mit Senke beschreibt. Man erhält dann über den gesamten Prozess Verteilungen, deren statistische Ordnung abnimmt und keine unvergleichbaren Verteilungen [3]. Die entsprechenden Übergangsmatrizen sind positiv semidefinit.

Eine entsprechende Funktion, die die Ordnung der Sub-Majorisierung erhält (Abb. 3), bildet die absoluten Blasengrößenverteilungen auf reelle Werte ab. Diese Funktion dient als Entropiemaß und zeigt einen monoton ansteigenden Verlauf bezüglich der Verteilungen.

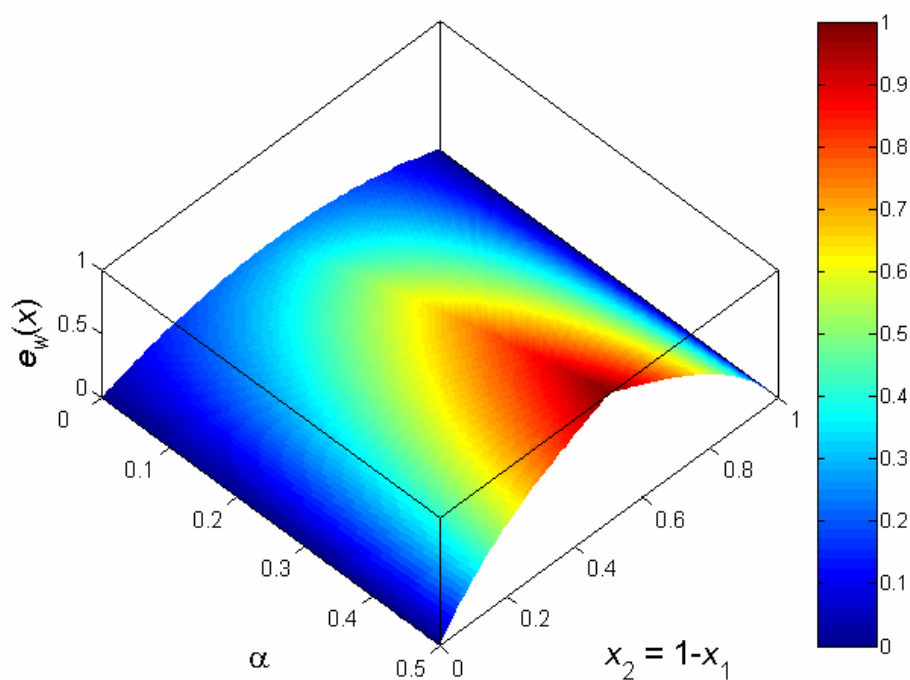


Abb. 3: Funktion der schwachen Sub-Majorisierung: die Funktion erhält ihren maximalen Wert  $\alpha = 0.5$  und  $x_1 = x_2 = 0$ , d.h. alle Objekte (Blasen) sind verschwunden.

Um diese Dynamik bestehend aus Diffusion und Senke modellhaft darzustellen, kann man wieder die Ruch'schen Diagrammverbände heranziehen.

Die Stärke der Senke in Abhängigkeit der fortschreitenden Diffusion lässt sich mit einem Senkenfaktor  $\alpha$  und einer normierten Funktion beschreiben, deren Produkt die von Verteilung zu Verteilung abnehmende Anzahl der Blasen definiert [3].

Das offene System Bierschaumzerfall ist ein komplexer Prozess, der aufgrund einer instabilen

Strukturbildung keine Gleichverteilung erreicht und daher nicht mit einer einfachen Diffusionsfunktion zu beschreiben ist. Die klassische Auswertung zeigt eine nicht monoton ansteigende Shannon Entropie und negative Übergangswahrscheinlichkeiten. Darüber hinaus macht die klassische Auswertung keine Aussage über die abnehmende Anzahl der Blasen während des Zerfalls. Mit der Sub-Majorisierung ist nun eine realistische Beschreibung dieses System, dessen Teilchenzahl nicht invariant ist, möglich. Diffusion und Senke können definiert werden und es lässt sich ein entsprechendes Entropiemaß einführen. Man erhält eine monoton ansteigende Funktion und Übergangsmatrizen, deren Einträge nicht negativ sind. Die klassische und die realistische Dynamik können durch Verbandstrukturen beschrieben werden. All diese Erkenntnisse basieren auf der Tatsache, dass die Randphänomene des Schaums mit dem Schauminneren korrelieren und das System über jene zu erfassen ist.

### Literatur:

- [1] S. Sauerbrei, E. C. Haß and P. J. Plath, *The Apollonian Decay of Beer Foam – Bubble Size Distribution and the Lattices of Young Diagrams and Their Correlated Mixing Functions*, Discrete Dynamics in Nature and Society, Volume 2006, Article ID 79717, 1-35.
- [2] B.B. Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur*, Akademie-Verlag, Berlin, 1987, pp. 181 – 183.
- [3] S. Sauerbrei, K. Knicker, Ernst-Christoph Haß, P. J. Plath, *Weak Majorization as an Approach to Non-Equilibrium Foam Decay*, eingereicht bei Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics.
- [4] S. Sauerbrei, U. Sydow and P. J. Plath, *On the Characterization of Foam Decay with Diagram Lattices and Majorization*, Z. Naturforsch. **61a** (2006) 153-165.
- [5] S. Sauerbrei, P.J. Plath, *Diffusion Without Constraints*, accepted by Journal of Mathematical Chemistry.
- [6] E. Ruch, *The Diagram Lattice as Structural Principle*, Theoret. Chim. Acta (Berl.) 38 (1975), 167–183.
- [7] A.W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, 1979.
- [8] P.M. Alberti, A. Uhlmann, *Dissipative Motion in State Spaces*, Teubner Texte zur Mathematik Bd. 33, Leipzig, 1981.

Anschrift: Dr. Sonja Sauerbrei (sonja@uni-bremen.de)