Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin *104(2009), 115–130*

Helmut Moritz
Institut für Navigation und Satellitengeodäsie
Technische Universität Graz

Große Mathematiker und die Geowissenschaften: Von Leibniz und Newton bis Einstein und Hilbert

Zusammenfassung

Die Arbeit besteht aus drei zusammenhängenden Teilen.

Teil A. Klassische Physik.
Seit Newton sind die Physik und die Mathematik untrennbar verbunden und miteinander gewachsen. Die Mathematik ist grundlegend für die Erklärung und Beschreibung der Erde und ihres Schwerefeldes. Große Mathematiker wie Laplace, Legendre und Gauß haben aber auch aus der Geodäsie rein mathematische Anregungen bekommen.

Teil B. Komplexität.
Die Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme in der Himmelsmechanik wurde von Henri Poincaré um 1890 begründet. Heute ist sie als Chaostheorie bekannt und ist seit E. Lorenz (1963) grundlegend für die meteorologische Wettervorhersage. Verallgemeinernd spricht man von *Komplexitätstheorie.*

Teil C. Inverse Probleme.
Der dritte Teil des Vortrags ist einer kurzen Besprechung der inversen Probleme gewidmet, deren Schwierigkeit und Wichtigkeit für die Praxis (von Massenbestimmung aus Gravitation bis zur seismischen und Magnetic Resonance Tomography (MRT)) viele zeitgenössischen Mathematiker für Geodäsie, Geophysik und Medizin interessiert.

Abstract

The paper consists of three interrelated parts.

Part A. Classical Physics.
Beginning with Newton, physics and mathematics are inseparably connected and have grown together. For eminent mathematicians such as Laplace, Lagrange and Gauss, the natural sciences have not only been basic for explaining and describing the gravitational field of the Earth, but they also have received purely mathematical inspirations from the geosciences.

Part B. Complexity.
A standard recent example is chaos theory, or the theory of nonlinear dynamic systems founded by Henri Poincaré around 1890 in his research on celestial mechanics and made popular, among others, by the fundamental treatment of weather forecasting by E. Lorenz (1963). Generally one speaks of Complexity Theory with possible applications to geodynamics, biology, and medicine.

Part C. Inverse problems.
A first important example is Gauss' least-squares adjustment of overdetermined systems. Nowadays, there are methods which are of increasing importance for geodesy, geophysics, medicine, etc. Some examples are the determination of masses from gravimetry, and seismic tomography, which has a similar structure as Magnetic Resonance Tomography (MRT) in medicine.

A. Klassische Physik

1. Einleitung

Seit Leibniz und Newton sind die Physik und die Mathematik untrennbar verbunden und miteinander gewachsen. (Das gilt nicht für alle Naturwissenschaften, z.B. nicht für die Biologie.) Dass nach Newton der Fall des Apfels vom Baum und die Bahn des Mondes um die Erde den gleichen Naturgesetzen unterliegen, erscheint auch heute noch beachtlich. Dass die Astronomie als *erklärende* Wissenschaft ebenso den Newtonschen Gesetzen unterworfen ist wie die Geodäsie, welche die Erde beschreibt, wäre den tausende Jahre zurückliegenden praktischen Astronomen und Feldmessern des vorderen Orients unverständlich gewesen.

Für die großen Mathematiker seit Newton sind die Naturwissenschaften nicht nur grundlegend für die Erklärung und Beschreibung der Erde und ihres Schwerefeldes gewesen, sondern die Mathematiker haben dadurch auch rein mathematische Anregungen bekommen. Dies soll im Folgenden skizziert werden.

Ich weiß, dass die Mathematik bei anderen Wissenschaften nicht immer beliebt ist. Ich werde also versuchen, meine Liebe zu ihr möglichst in Schranken zu halten, so dass die Kollegen aus anderen Disziplinen einen allgemein verständlichen Überblick erhalten. Über nicht erklärte Fachausdrücke möge man hinweg lesen, ebenso wie über Fußnoten. (Eine ausführlichere Darstellung vieler einschlägiger Probleme findet sich in „Science, Mind and the Universe“ (im Text abgekürzt mit „SMU“), das sich auf des Verfassers Internetseite http://www.helmut-moritz.at findet und in PDF gelesen oder zur Gänze heruntergeladen werden kann.)

Wir verstehen hier unter klassischer Physik alles, was in einem Standardlehrbuch über theoretische Physik (wie z.B. Landau-Lifschitz oder Feynman Lectures on Physics) behandelt wird, also neben der klassischen Mechanik auch die Relativitätstheorie und die Quantentheorie. Nun skizzieren wir einige geodätische Anwendungen.

2. Physik und Geodäsie

Im 18. Jahrhundert war die Geodäsie ein Haupt-Arbeitsgebiet der großen französischen Mathematiker. Die Französische Akademie der Wissenschaften sandte um 1740 zwei Expeditionen zur „Gradmessung“ nach Peru und Lappland, um die Größe des Erdellipsoides zu bestimmen. Die Ergebnisse dienten zur Definition des Meters und des darauf beruhenden metrischen Systems. Die Geodäsie war also damals wirklich eine wichtige Grundlagenwissenschaft.

Gleichzeitig arbeiteten daher Mathematiker wie Lagrange, Laplace, Clairaut und Maupertuis (der auch die Lappland-Expedition leitete) die entsprechenden Theorien der Erdgestalt und des Erdschwerefeldes aus. Wir erwähnen hier nur die fundamentalen Arbeiten von Laplace und Lagrange über *Kugelfunktionen*, die eine grundlegend wichtige praktische Bedeutung gerade heute erlangen, seitdem man sie mit Hilfe der künstlichen Erdsatelliten mit hoher Präzision bestimmen kann. (Für diese hohen Genauigkeiten brauchen wir heute natürlich entsprechend genaue Theorien, Beobachtungs- und Rechenmethoden.)

Ein Hinweis auf die Bedeutung der Geodäsie im damaligen einschlägigen Denken in Frankreich ist der Umstand, dass Jules Verne in seinen populärwissenschaftlichen Romanen nicht nur von der Erde zum Mond und bis zum Erdmittelpunkt reiste, sondern auch einen geodätischen Roman schrieb: „Trois Russes and trois Anglais“. Dieser Roman behandelt eine Gradmessung vom Norden bis zum Süden durch den ganzen afrikanischen Kontinent. Die

Zusammensetzung der Messtruppe nimmt die internationale geodätische Zusammenarbeit vorweg, mit ihren Erfolgen und auch ihren Spannungen. (Im Übrigen wurde von den Amerikanern eine solche Gradmessung in Afrika um 1956 tatsächlich durchgeführt.)

In Deutschland entwickelte Carl Friedrich Gauss die Methode der kleinsten Quadrate, sowie die Differentialgeometrie der krummen Flächen, beides angeregt durch geodätische Probleme. Dies führte Riemann zur Differentialgeometrie der mehrdimensionalen Räume und weiters Einstein und Hilbert zur allgemeinen Theorie von Raum, Zeit und Gravitation (um 1915). Diese „Allgemeine Relativitätstheorie" wird für präzise Berechnung von Satellitenbahnen (z.B. beim Globalen Positionierungs-System, GPS) benötigt. (Scherzhaft kann man sagen, dass bei jedem mit GPS ausgestatteten Auto Albert Einstein auf dem Rücksitz als blinder Passagier mitfahre…)

Hilberts Name ist noch mit der zweiten großen physikalischen Theorie des 20. Jahrhunderts verbunden: Die Quantentheorie wurde in ihrer vollkommen Form von Heisenberg und Schrödinger um 1925 entwickelt. Ihre mathematische Grundlage bildet der unendlich-dimensionale Hilbertraum. (Wenn man über den unendlich-dimensionalen Raum stöhnt, dann denke man daran, dass heutige Computer, die ein lineares Gleichungssystem mit 100000 Unbekannten auflösen, mathematisch in einem 100000-dimensionalen Raum arbeiten, den man sich geometrisch auch nicht vorstellen kann.)

Heute hat Gauß' Methode der kleinsten Quadrate im Hilbertraum eine wichtige geodätische Anwendung gefunden, die *Kollokation*, die man z.B. zur Berechnung der oben erwähnten Kugelfunktionen des Erdschwerefeldes verwendet. Auf Gauß werden wir auch in Abschnitt 9 zurückkommen.

Zum Schluss ist zu sagen, dass der wichtigste und einflussreichste Denker in der physikalischen Geodäsie nach 1945 der russische Geodät M. S. Molodensky war. Wir werden in Abschnitt 9 darauf zurückkommen.

B. Komplexität

3. Von der klassischen Mechanik zu Chaostheorie

Auf einem ganz anderen mathematischen Gebiet liegt die heute sehr populäre Chaostheorie (SMU), oder abstrakter, Theorie der nichtlinearen dynamischen Systeme. Synonyme sind Fraktale oder Deterministisches Chaos. Es handelt sich nicht so sehr um eine einheitliche Theorie als um ein Bündel zusammenhängender mathematischer Theorien. Wir werden das später besser verstehen.

In Newtons Himmelsmechanik herrscht, wie man glaubte, strenger Determinismus (SMU, S. 73 ff.). Poincaré zeigte um 1890, dass die Bahnen der Himmelskörper „chaotisch“ werden können. Ein Standardbild (Fig.1) zeigt wahrlich ungewöhnliche dreidimensionale Bahnen (3D-Kurven im Schnitt mit der Bildebene).

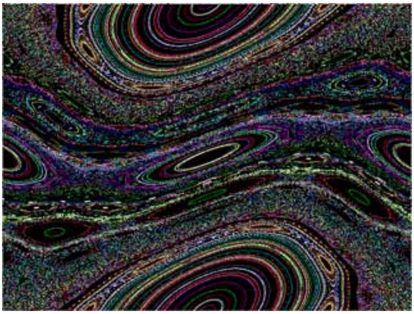

Figure 1: Poincaré

Ich zögere nicht, den großen Mathematiker Henri Poincaré als den Begründer der Chaostheorie anzusehen. Sein Buch „Nouvelles méthodes de la mécanique céleste“ behandelt zum ersten Mal die mathematische Betrachtung nichtlinearer dynamischer Systeme, was als größter Fortschritt in der Himmelsmechanik seit Newton angesehen werden kann[1]. Er verstand vollkommen das meteorologische Problem der Wettervorhersage (SMU, S. 80-82; ein schönes Zitat findet man auf Seite 243), sowie auch die Mechanik des Wurfs eines symmetrischen Würfels, die zur gleichen Wahrscheinlichkeit aller 6 Seitenflächen führt (SMU, S.83-84). Er verstand völlig die nicht-triviale Synthese der klassischen Mechanik, des Laplaceschen Determinismus, der Instabilität, des Chaos und der Wahrscheinlichkeitstheorie, wie seine großartigen populären Darstellungen zeigen.[2]

4. Chaos in den Geowissenschaften

Ich will hier nur einige Gebiete nennen.

1. *Meteorologie.* Bekannt ist Lorenz’ Schmetterling, der auf E. Lorenz (1963) zurückgeht und der die Instabilität des Wetters und die grundsätz-

1 S. Fröba und A Wassermann, *Die bedeutendsten Mathematiker*, Matrix Verlag, Wiesbaden, 2007, S.192.

liche Unsicherheit der Wettervorhersage veranschaulicht (Fig. 2). Die benachbarten Trajektorien veranschaulichen zwei mögliche Wettervorhersagen für den gleichen Tag, z.B. im Tagesspiegel und in der Berliner Morgenpost. Lorenz hat auch ein schönes allgemeines Buch geschrieben[3].

2. *Geomagnetismus*. Die schwierige Theorie des Geodynamos ist ohne Chaostheorie undenkbar.
3. Vorhersagen von Erdbeben oder von Lawinenabgängen. Die Problematik ist im Wesentlichen nicht unähnlich der Prädiktion in der Meteorologie, aber die mathematische Behandlung und die Unsicherheit sind natürlich viel größer.[4]

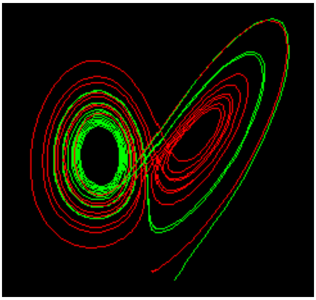

Figure 2: Lorenz

4. Fraktale Flächen sind ein Mittel zur Darstellung und Interpolation im Hochgebirge, als Anwendung in der Geodäsie. Zunächst ein anschauliches von mir berechnetes Modell (www.helmut-moritz.at , Arbeit über Doppelsummation, letzte Figur 7).

2 Als ich Professor an der Technischen Universität Berlin war, studierte ich Poincaré um 1970 und entdeckte etwas, was mir ein wunderbares und geheimnisvolles geodätisches Band zwischen Berlin und Paris erschien. Die bekannte Definition der Geodäsie, als Wissenschaft von der Figur und dem Gravitationsfeld der Erde, kristallisierte sich aus dem Denken zweier Wissenschaftler aus dem Geodätischen Institut Potsdam, Friedrich Robert Helmert und Heinrich Bruns. um 1870. Ziemlich gleichzeitig publizierte Heinrich Bruns einen kleinen aber profunden und folgenreichen Artikel über das Konvergenzproblem von Reihen der Himmelsmechanik („Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Störungen“, *Astronom. Nachrichten, 109,* 216-222, 1884). Das ist nur eine zufällige Koinzidenz, für mich aber war es eine Bestätigung der mir sehr am Herzen liegenden Tatsache, dass die Wissenschaft keine nationale Grenzen kennt. (Helmert und Poincaré waren übrigens beide aktiv in der Internationalen Geodätischen Assoziation tätig!)

3 E. Lorenz, *The Essence of Chaos*, Univ. of Washington Press, 1993.

4 D. L. Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1997.

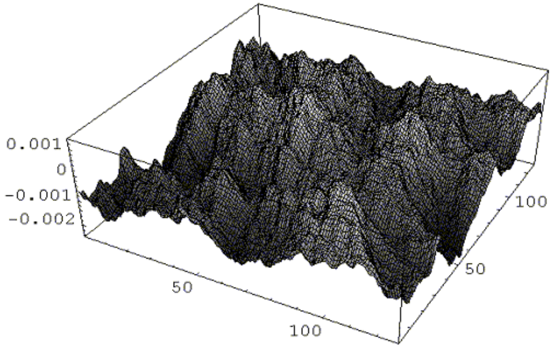

Figure 3: Fraktales Hochgebirge

Man kann sich vorstellen, dass solche gespenstige Bilder in der Filmindustrie öfter vorkommen als in der Natur[5].

5. Leibniz, Mandelbrot und Fraktale

In dem großartigen Buch von Benoit Mandelbrot, *Die fraktale Geometrie der Natur,* Birkhäuser wird eine umfassende Darstellung der Fraktale gegeben, die eine Generation von Mathematikern und angewandten Wissenschaftlern, aber auch jungen Computerfans fasziniert hat.

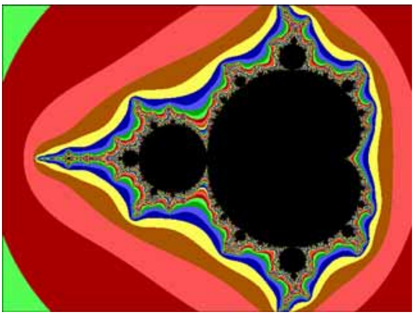

Figure 4: Das Mandelbrot-Fraktal

Das Mandelbrot-Fraktal ist mit dem Lorenz-Schmetterling (Fig. 3) zu einem Logo der neuen Chaostheorie geworden (Fig.. 4).

5 H.O. Peitgen und D. Saupe (Hrsg.), *The Science of Fractal Images*, Springer, 1988.

Das Mandelbrot-Fraktal (Fig.4) besteht aus einem Haupt-Mandelbrot, umgeben von „selbstähnlichen“, immer kleiner werdenden „Mandelbrötchen“ (schwarz). Es heißt auch „Apfelmännchen“. Solche Figuren gestatten einen intuitiven Zugang zur Chaostheorie. Für den gemäßigten Mathematiker sind es nicht-differenzierbare, aber doch gesetzmäßige Kurven oder Strukturen, die vielfach „gebrochen (latein. *fractus*) sind. Mit dieser groben und unscharfen, intuitiven Definition will ich mich hier aus der Affäre ziehen. Für die strengen Mathematiker gibt es exakte Definitionen jedes Schwierigkeitsgrades.

Interessanter Weise ist die Entwicklung zum Fraktal irgendwie ähnlich zu einer logischen Verschärfung des Leibnizschen Begriff des Differentials in den letzten Jahrzehnten durch Robinson, Laugwitz[6] und andere. Nach Leibniz ist die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ ein echter Quotient dy/dx zweier Differentiale dx und dy, die unendlich klein („infinitesimal“), aber nicht Null sind. Man kann wunderbar damit rechnen und tat es auch immer, wenn auch oft mit schlechtem Gewissen, von den strengeren Kollegen verachtet. Durch die moderne Logik sind die infinitesimalen Differentiale voll rehabilitiert; Leibniz’ geniale Intuition hat den Sieg davongetragen.

Mandelbrot, ein großer Bewunderer von Leibniz, hat den Zusammenhang mit der Fraktaltheorie an mehreren Stellen seines Buches angesprochen und ansatzweise versucht, die Antithese zwischen Differential (glatte Kurven) und Fraktal („gebrochene“ Kurven) zu einer Synthese zu vereinen. Hier müssen wir auf Mandelbrots Buch verweisen (§41). Da wir schon bei Leibniz sind, wollen wir erwähnen, dass das Universalgenie Leibniz sich auch der Entstehung der Struktur des Erdinneren beschäftigt hat[7].

6. In der Natur gibt es keine Geraden: Fraktale in Biologie und Medizin

Schon zu Anbeginn der modernen Fraktaltheorie um 1960 entdeckte man, dass die Euklidisch-Kartesische Geometrie eigentlich nicht ganz zu einer vom Menschen unberührten Natur passt. Es gibt in der Natur kaum vollkommen gerade Linien, zumindest nicht in der Biologie. Kaum ein Baum ist so vollkommen gerade wie eine Hauskante. In der Mineralogie könnte man die Kristallkanten als Gerade betrachten, aber das fällt wohl nur dem Mineralogen auf. Wenn der Gehirnchirurg in das menschliche Gehirn eindringt, so kann die Schneide seines Messers sehr gerade sein, nicht aber die Gehirnwindungen, in die er eindringt.

---

6 D. Laugwitz, Infinitesimalkalkül, B.I. Verlag, 1978.

7 W. Kertz, *Geschichte der Geophysik,* Georg Olms Verlag, 1999 (Kap.1, Abschn.3) (freundlicher Hinweis von Herrn Heinz Kautzleben).

Natürlich kann man das Gehirn in ein kartesisches Netz einbetten, aber das macht der Mensch und nicht die Natur. Direkt naturgegeben ist unsere menschliche Geometrie nicht.

Ein schönes Modell für Lungengewebe ist das Fraktal von Sierpinski 3D oder Menger (Fig. 5), nicht unähnlich einem Schwamm. (Die Geradenstücke in diesem Bild werden durch die unvollständige Approximation hervorgerufen; in Wirklichkeit gibt es nur Punkte.)

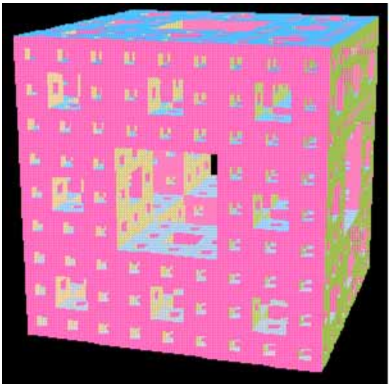

Figure 5: Menger

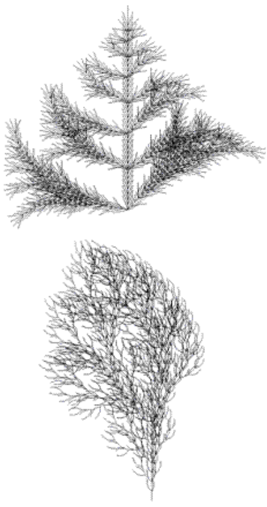

Figure 6: Fraktale Bäume (nach P. Bourke)

Es gibt auch wunderbare fraktale Bäume (Fig. 6).

Kein Wunder, dass Biologen und Mediziner sofort versucht haben, die Chaostheorie zu verwenden.[8] *Es gibt einfach keine geraden Linien in einer vom Menschen unberührten Natur.*

7. Zwischenbemerkungen

In der Chaostheorie gibt es bedeutende Entdecker. Poincaré war ein analytisches Genie in der präzisen Himmelsmechanik, das zeigte, dass auch die klassische Himmelsmechanik nicht so einfach und stabil ist wie Laplace glaubte. Poincaré entdeckte so die nichtlineare Dynamik. Poincaré untersuchte auch den Zusammenhang zwischen Instabilität and Wahrscheinlichkeit.

E. Lorenz revolutionierte die Meteorologie. Mandelbrot ist ein umfassendes Genie, das in der Natur überall fraktale Strukturen entdeckte.

Wir können in diesem Aufsatz keine weiteren Fraktalbilder zeigen, Viele wunderbare Bilder finden sich im Internet in verschiedenen „fractal galleries".

Für Bücher siehe Fußnote[9].

Zur Terminologie: Man spricht hier von

- nicht-linearen dynamischen Systemen (Mathematik von hohem Niveau)
- Chaostheorie (Instabilität, Meteorologie)
- Fraktaler Geometrie (Mandelbrot)

Alle diese Begriffe sind im Allgemeinen ziemlich verwandt und synonym, aber der Zusammenhang ist nach Meinung des Vortragenden doch noch nicht ganz vollständig und nahtlos. Die Blütezeit der Chaostheorie war vielleicht die Zeit 1980-2000.

Intuitiv spricht man von *Komplexität*, wenn das System eine große Anzahl von Elementen besitzt, die mit einer reichen Struktur ausgestattet sind. Ein Sandhaufen wird kaum als ein komplexes System bezeichnet werden, ein Ameisenhaufen schon eher, und ein lebender Organismus bestimmt, Kurz kann man sagen, das Komplexität eine Synthese von Ordnung und Chaos ist, oder anschaulicher: *Komplexität liegt auf der Kante zwischen Ordnung und*

---

8 Ein Klassiker ist L. Glass und M. C. Mackey, *From Clocks to Chaos: the Rhythms of Life*, Princeton Univ. Press, 1988.

9 Lesbar und interessant sind die Bücher: J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Cardinal-Penguin, London, 1988, und auf einem besonders hohen Niveau: I. Stewart , *Spielt Gott Roulette?: Chaos in der Mathematik*, Birkhäuser, Basel, 1990.

Chaos (M. M. Waldrop). Weltbekannt ist das *Santa Fe-Institut für Komplexität.*

Gerade die Geo- und Biowissenschaften brauchten eine einheitliche Theorie der Komplexität, die auch die *algorithmische Komplexität* (W. I. Kolmogorov, G. Chaitin) umfassen sollte. Für mehr Details siehe SMU, S. 170-172. Sehr interessant ist auch das Buch eines Nobelpreisträgers, des Physikers Gell-Mann[10]

Die Frage ist, ob eine solche *einheitliche* Komplexitätstheorie überhaupt möglich ist, oder ist sie nur ein Bündel von mehr oder weniger zusammenhängender Theorien? Aber ist denn die Mathematik ein einheitliches deduktives System, oder nur eine Sammlung von so verschiedenen Theorien wie Zahlentheorie und Differentialgeometrie?

Vielleicht kommt ein neuer Einstein, der in einem Paradigmenwechsel im Sinne von Kuhn (SMU, S. 155) eine neuartige Theorie schafft.

C. Inverse Probleme

8. Potentialtheorie

Am Anfang eines jeden Lehrbuchs über physikalische Geodäsie[11] findet sich eine einfache Formel für das Gravitationspotential V eines Körpers, insbesondere der Erde

$$V = \iiint \frac{1}{1} \rho \, dv$$

Hier bezeichnet ρ die Dichte der Massen innerhalb der Erde, dv ist das Volumenelement, und das dreifache Integral erstreckt sich über das gesamte Volumen der Erde (Fig. 7).

10 M. Gell-Mann, *The Quark and the Jaguar*, Freeman, New York, 1994; deutsch: *Das Quark und der Jaguar*, Piper, München, 1994. (Dieses Buch schließt auch die Quantentheorie ein, die wir hier nicht betrachten können.)

11 Zum Beispiel: B. Hofmann-Wellenhof und H. Moritz, *Physical Geodesy*, Springer, Wien, 2005.

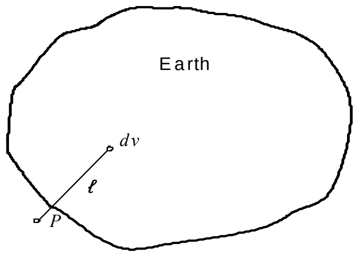

Figure 7

Für den Nichtmathematiker schaut die Formel gefährlich aus, sie ist aber begrifflich einfach. Man kann sie noch vereinfachen, indem man symbolisch schreibt:

$$V = L\,\rho.$$

Dies bedeutet, dass man das Potential V erhält, indem man den „linearen Operator“ L auf die Dichte ρ anwendet. In meiner Studentenzeit hatte das Wort „Operator“ einen etwas gefährlichen medizinischen Klang. In unserem heutigen Computer-Zeitalter wird dieses Wort für fast Alles benützt, was man mit einem Computer machen kann, nicht nur Addition und Subtraktion, sondern auch numerische Integration für die Berechnung des obigen Integrals.

Soweit ist alles einfach: keine Relativitätstheorie (sonst würden uns die Studenten davonlaufen), keine Komplexität, kein Chaos usw. Das Integral kann mittels Standardmethoden für die numerische Integration sehr leicht ausgewertet werden, wenn ρ gegeben und V gesucht ist.

Das *inverse Problem*, die Berechnung der Massen im Erdinneren aus dem Potential im Außenraum, ist hingegen außerordentlich schwierig, denn es gibt unendlich viele Massenverteilungen, die das gleiche Potential im Außenraum erzeugen. Dieses inverse Problem ist jedoch wichtig für die Erforschung von Lagerstätten von Erdöl, Kohle oder Erzen. Es ist leicht, die Lösung in der einfachen Form

$$\rho = L^{-1}\,V$$

zu schreiben, aber die tatsächliche Berechnung führt auf viele bedeutende Schwierigkeiten.

Ein „*korrekt gestelltes*“ oder einfach „*korrektes*“ Problem im Sinne von Hadamard hat eine und nur eine Lösung, und diese Lösung ist stabil. Früher dachte man, dass alle physikalisch sinnvollen Probleme korrekt gestellt seien.

Das „inverse“ Problem $\rho = L^{-1} V$ ist tatsächlich „inkorrekt“ in diesem Sinne. Es handelt sich um eine sehr allgemeine Situation: das direkte Problem ist eindeutig und stabil, also „korrekt im Sinne von Hadamard“; das entsprechende inverse Problem ist „inkorrekt“, aber praktisch durchaus sinnvoll und mathematisch oft hochinteressant.

Ohne ins Detail zu gehen, sei nur gesagt, das solche inversen Probleme *falsch gestellte* oder gar *inkorrekte Probleme* heißen, ohne jeden negativen Beigeschmack. Oft verwendet man „inkorrekt“ synonym mit „invers“.

Für den Mathematiker: In der Matrizenrechnung haben quadratische Matrizen mit nicht verschwindender Determinante eine Inverse. Aber es hat sich als sehr sinnvoll herausgestellt, auch für rechteckige Matrizen eine „verallgemeinerte Inverse“ zu definieren, die inkorrekt im Sinne von Hadamard ist.

Inverse Probleme können äußerst schwierig sein, sind aber gerade deshalb sehr attraktiv für Mathematiker, zumal sie große praktische Bedeutung haben. Heute sind die inversen Probleme ein wichtiges und aktives Gebiet für die mathematische Forschung[12].

9. Andere inverse Probleme

Sogar Schüler der Oberstufe eines Gymnasiums müssen heute etwas Differenzieren und Integrieren lernen. Sie wissen, dass jede analytische Funktion differenziert werden kann, aber die inverse Operation, das Integrieren, ist schon schwieriger. Man muss zu Integraltafeln oder mathematischen Programmpaketen wie Mathematica® greifen.

Ein sehr allgemeines Problem, die Bestimmung eines physikalischen funktionalen Objekts durch indirekte Messungen, ist gewöhnlich „inkorrekt“, weil das funktionale Objekt meistens eine unendliche Zahl von Parametern hat, während die Zahl der Messungen nur endlich ist, vom Einfluss der Messfehler ganz zu schweigen. Das sind das klassische Problem der *Wettervorhersage*, das überdies komplex ist (siehe oben, Abschnitt 4, Fall (1)), und auch die Schätzung des Erdschwerefeldes aus Satellitendaten.

In der Geodäsie haben wir das *geodätischen Randwertproblem*, formuliert von M. S. Molodensky (Abschnitt 2). Das Problem von Molodensky wurde 1945 entdeckt, und es hat das Denken der theoretischen Geodäsie revolutio-

12 Als allgemeine Literatur nennen wir: G.Anger, *Inverse Problems in Differential Equations,* Akademie Verlag , Berlin, and Plenum Press, London, 1990; G.Anger et al., *Inverse Problems: Principles and Applications in Geophysics, Technology and Medicine,* Akademie Verlag, Berlin, 1993 (Nachdruck bei Wiley, New York); G. Anger and H. Moritz, *Inverse Problems and Stability: Basic Ideas and Applications* , in: www.helmut-moritz.at.

niert. Er fand auch mehrere praktisch anwendbare Lösungen. Einen strenger Beweis der eindeutigen Lösbarkeit des nichtlinearen Molodensky-Problems unter mathematisch genau definierten Bedingungen als „hartes" nichtlineares inverses Problem (und es ist wirklich „hart"!) erbrachte der bekannte schwedische Mathematiker Lars Hörmander (1976), aufbauend auf Vorarbeiten von Torben Krarup aus Kopenhagen. Krarup entdeckte auch die Kollokation nach kleinsten Quadraten (1968), die wir schon in Abschnitt 2 erwähnten.

Schließlich führen wir noch die *seismische Tomographie* in der Geophysik an, und das strukturell sehr ähnliche Problem der *magnetischen Resonanztomographie* (MRT), das in der Medizin eine große Rolle spielt.

Wenn wir den Namen eines großen Mathematikers der Vergangenheit mit inkorrekten Problemen in Verbindung bringen wollen, so kommen wir wieder zum „princeps mathematicorum", Carl Friedrich Gauß. Seine *Ausgleichung nach kleinsten Quadraten für überbestimmte Systeme* passt sehr gut hierher. Dieses mathematische Modell, das in der Geodäsie klassisch ist, wird durch p Parameter definiert, die durch $n > p$ Beobachtungen bestimmt werden. Ein einfaches Standardbeispiel, dem Gauß oft in seinen geodätischen Triangulationsarbeiten begegnete, ist die Messung aller drei Winkel in einem Dreieck. Deren Summe sollte genau 180 Grad sein, aber das trifft in der Praxis nie zu. Die „Lösung" des Problems durch Messung von nur zwei Winkeln ist unzulässig vereinfacht, unsymmetrisch und gewissermaßen unfair gegenüber dem vernachlässigten Winkel. Allgemein ergibt die Verwendung *aller* Daten eine optimale und symmetrische Lösung, und zusätzlich eine statistische Schätzung für die Fehler der verwendeten Messungen.

Die Kollokation nach Krarup kann auch als Ausgleichung im Hilbertraum aufgefasst werden.

Im Übrigen kann die Lösung einer linearen Gaußschen Ausgleichungsaufgabe mathematisch als eine verallgemeinerte Matrizen-Inverse im Sinne von Abschnitt 8 dargestellt werden. Das ist sehr nützlich für das Verständnis; allerdings sind die meisten heute untersuchten inversen Probleme viel komplizierter.

10. Zum Abschluss

Beispiele von direkten und inversen Problemen

Schwere aus Masse	Masse aus Schwere
Natur (Erde)	seismische Tomographie
Natur (menschl. Körper)	medizin.Tomographie (Röntgen, NMR usw.)
Natur	Naturwissenschaft
Verbrechen	Polizei
(logische) Deduktion	(wissenschaftl.) Induktion
Ursache $\longrightarrow$ Wirkung	Wirkung $\longrightarrow$ Ursache
Realität $\longrightarrow$ Daten	Daten $\longrightarrow$ Realität

Die Tabelle zeigt die Allgemeinheit inverser Probleme, nicht nur in der Mathematik.

Eine zweidimensionale Photographie ist eine Projektion eines dreidimensionalen Objekts auf eine Ebene. In einem abstrakten, aber anschaulichen, Sinn ist die Menge der einschlägigen Messungen eine Projektion der unendlichen „Realität“ auf den endlichen „Messraum“. *Jede Wissenschaft ist eine Projektion der Realität auf einen Unterraum, den Unterraum dieser Wissenschaft.* Wie die Tabelle zeigt, ist diese Projektion ein direktes Problem. Die Tätigkeit des Forschers ist das inverse Problem, aus den Messungen Rückschlüsse auf die Realität zu ziehen.

Das klingt auf den ersten Blick abstrakt und realitätsfern. Diese Terminologie ist aber geeignet, ähnliche logische (nicht nur mathematische) Strukturen hervorzuheben, wie unsere Tabelle zeigt. Der Verbrecher führt ein direktes Problem aus, der Detektiv hat ein inverses Problem, die Klärung des Verbrechens und die Auffindung des Täters. Das ist natürlich wesentlich schwieriger. Der Historiker sucht nach komplexen Gründen und nach Menschen, welche die gegenwärtige Situation erzeugt haben: auch ein inverses Problem. Die einfache abstrakte Formulierung, $V = L\rho$ und $\rho = L^{-1} V$, die wir in Abschnitt 8 verwendet haben, kann verstanden werden, ohne die Einzelheiten zu kennen, so wie wir Auto fahren können, ohne die detaillierte Funktion von Motor, Getriebe und Bremsen zu kennen, die schon recht „komplex“ sein kann.

COMPLEXITÄT UND INVERSE PROBLEME wirken oft zusammen, besonders bei großen Datenmengen. Wir zeigen das am Beispiel unseres Standardproblems, der Wettervorhersage. Die wohlbekannte Unsicherheit dieses Problems kommt aus zwei Quellen:

- Die „chaotische“ Instabilität der entsprechenden Differentialgleichungen auch bei der Annahme vollständiger und fehlerloser Daten (das „Schmetterlingsproblem“, das wir in Teil B dieser Arbeit besprochen haben), und:
- Die kontinuierlich über die ganze Erde verteilt sein sollenden Beobachtungen sind auf ein diskretes Gitter beschränkt, das nicht einmal vollständig und regelmäßig ist. Außerdem gibt es Messfehler. Das ist also ein typisch „inkorrektes“ inverses Problem im Sinne von Teil C unserer Arbeit.

Dieses wichtige meteorologische Beispiel zeigt klar, wie die neuen „nichtklassischen“ Probleme und Methoden von Teil B und C eine zunehmend wichtige Rolle gegenüber den „klassischen“ Methoden von Teil A spielen. Im Zusammenhang damit benötigt man immer leistungsfähigere, größere und „komplexere“ Computer. Aber auch die intuitive und beweisende Kraft des menschlichen Geistes wird zunehmend gefordert.

Jedenfalls glaube ich, dass Komplexität und inverse Probleme in Zukunft eine wesentliche interdisziplinäre Rolle in vielen Wissenschaften: Physik, Technologie, Geowissenschaften, sogar Biologie und Gesellschaftswissenschaften, spielen werden.