

Werner Krause, Gundula Seidel und Frank Heinrich

Multimodalität im Denken am Beispiel mathematischer Anforderungen¹

1. Einführung

Bauersfeld (1993) zitiert Waldmann und Weinert (1986): „Wiewohl die Gemeinsamkeiten zwischen Meteorologie und Hochbegabtenforschung nur oberflächlicher Art sind, verdient eine Übereinstimmung Beachtung: Auf beiden Gebieten wurden wissenschaftliche Anstrengungen unternommen, um Bauernregeln und Alltagsweisheiten durch statistisch gesicherte Vorhersagemodelle zu ersetzen. Doch ist die Theorie zur Erklärung der Phänomene noch nicht entwickelt worden“. Bauersfeld wählt für seinen Analyseweg zur Erklärung einen konstruktivistisch-interaktionistischen Theorienansatz, der der Schulpraxis stärker Rechnung trägt.

Wir beziehen uns bei der Suche nach Erklärungsmöglichkeiten auf individuelle Unterschiede. In einer Zusammenfassung kognitionspsychologischer Charakteristika erfolgreichen Denkens betonen Waldmann und Weinert (1986), dass das Lösen komplexer Probleme u. a. „den Erwerb gediegener Einsichten voraussetzt“, „reiche, flexible und problemspezifische Kenntnisse“ verlangt sowie ein „efficient information processing“, was mit hohen Ansprüchen an „die Geschwindigkeit der kognitiven Prozessabläufe“, die Menge der gleichzeitig bearbeiteten Informationen, ein leichtes Abrufen aus dem Langzeitgedächtnis“ und an „den Aufwand beim Bilden neuer Assoziationen“ erklärt wird. Die Autoren sagen aber auch, dass man über interindividuelle Unterschiede in dieser Hinsicht „bisher allzu wenig weiß“. Kann nach fünfzehnjähriger Forschung Genaueres vorgelegt werden und kann die Menge der Erklärungsmöglichkeiten eingeschränkt werden?

1 Wesentliche Teile des Beitrages erscheinen unter dem Titel „Über das Wechselspiel zwischen Rechnen und bildhafter Vorstellung beim Lösen mathematischer Probleme – eine neurowissenschaftliche Studie beim Vergleich mathematisch (Hoch)- und Normalbegabter“ auch in: MU – Der Mathematikunterricht, Heft 6, 2003, Friedrich-Verlag, Seelze.

Klix (1992) schließt aus Reaktionszeitexperimenten bei analogen Schlussprozessen auf die bessere Verfügbarkeit² von Strategien bei mathematisch Hochbegabten. „Auch hier ist es so, als ob die Extremgruppe über einer Art innerer Vorinformation verfügte, wie solche Anforderung mühelos zu bewältigen sei.“ (Klix, 1992, S. 441). Wir verwenden experimentalpsychologische und neurowissenschaftliche Methoden (Krause und Sommerfeld, 2000), um im Rahmen einer Grundlagenforschung aus Elementaranalysen kognitiver Prozesse Komponenten zu bestimmen, auf die die bessere Leistung Hochbegabter zurückgeführt werden kann.

Es lässt sich aber noch ein zweiter Ansatzpunkt für unsere Untersuchungen angeben. Kieswetter (2002) beklagt in seiner Studie „Unzulänglich vermessen und vermessen unzulänglich: PISA u. Co.“ fehlende Maße für geistige Leistungen und fordert, „Testverfahren einer kritischen Kontrolle zu unterziehen“. Hier wird ein Vorschlag unterbreitet, wie dies unseres Erachtens geschehen kann.

Anliegen des Textes ist die Analyse mathematischen Denkens mit experimentalpsychologischen und neurowissenschaftlichen Methoden.

Soll mathematisches Denken gefördert werden, dann müssen alle Faktoren von der sozialen über die motivationale und emotionale bis hin zur kognitiven Ebene betrachtet werden und bekannt sein. Wir beschränken uns hier auf kognitive Elementarprozesse. Die Analyse kann durch Verhaltensbeobachtung, durch lautes Denken, durch Messung von Fehlern und Lösungszeiten (experimentalpsychologisch) und durch Messung nervaler Prozesse (neurowissenschaftlich) im Gehirn geschehen. Wir beschränken uns hier – wie oben bereits erwähnt – auf experimentalpsychologische und neurowissenschaftliche Methoden. Hinsichtlich der Anforderungen arbeiten wir mit Problemen, die von den Probanden unter Berücksichtigung ihrer bisherigen mathematischen Ausbildung und Vorerfahrung sowohl „algebraisch“ als auch „(anschauungs)geometrisch“ lösbar sind. Die Unterscheidung ist nicht absolut. Wir meinen vielmehr zum einen ein Lösungsvorgehen, bei dem die Arbeit mit Zahlen, Variablen, Gleichungen, Ungleichungen etc., also mit

2 Der Begriff der Verfügbarkeit umfasst sowohl die Eigenschaft des Wissens um Strategien als auch die Fähigkeit (gewissermaßen spielend leicht) damit umgehen zu können. Dabei ist sowohl der Abruf bereits gebildeter Strategien als auch deren („blitzschnelle“) Erzeugung und Fortentwicklung gemeint. Im Gegensatz zur Verfügbarkeit findet sich beim Wissen kein Unterschied im Extremgruppenvergleich. Seidel (2001, 2003) konnte zeigen, dass Normalbegabte und Hochbegabte die hier verwendeten Modalitätsstrategien gleichermaßen kennen.

Symbolen dominiert; und zum anderen ein Vorgehen, dass sich insbesondere durch die Verwendung geometrischer Formen, also durch die Arbeit mit Bildern auszeichnet (vgl. auch das Beispiel zur Abbildung 1).

Das Ziel besteht in einer Unterstützung des subjektiven Lehrerurteils über mathematische Denkleistungen durch Objektivierung von mathematischen Denkprozessen. Der Zweck besteht in einer gezielten Förderung von mathematischen Denkprozessen und damit von mathematischen Denkleistungen.

Eine in der Literatur übliche Vorgehensweise dazu besteht im Nachweis unterschiedlicher kortikaler Netze für unterschiedliche mathematische Anforderungen. So etwa unterscheiden Cohen, Dehaene, Lee u. a. (Cohen und Dehaene, 1997; Dehaene und Cohen, 1998; Lee, 2000) im Rahmen der numerischen Informationsverarbeitung zwischen „Faktenabruf“ (z. B. $2 + 2 = ?$) und „Größenmanipulation“ (z. B. $25 \times 36 = ?$) und zeigen, dass zu deren Anforderungsbewältigung auch unterschiedliche kortikale Netze aktiviert sind. Unsere Vorgehensweise lehnt sich mit dem Anspruch des Nachweises kortikaler Netze an diese übliche Vorgehensweise an, jedoch ist der Ansatzpunkt nicht eine spezielle mathematische Problemklasse sondern die Denkpsychologie. Die großen Wissenschaftsdisziplinen wie Mathematik, Physik, Chemie oder Biologie gehen theoriegeleitet vor und deduzieren Hypothesen aus Kenntnissen über Elementarprozesse. Wenngleich eine Theorie über menschliches Denken in unserer Disziplin bisher nicht existiert, so lassen sich doch Prozesseigenschaften im menschlichen Denken angeben, die in den unterschiedlichsten Anforderungen zu beobachten sind und von daher einen gewissen Allgemeingültigkeitsanspruch haben. Solche Invarianten im Denken werden Basiskomponenten genannt. Bisher werden von Klix (1992) vier Basiskomponenten betrachtet, die er auch evolutionär begründet hat, wenngleich ein Vollständigkeitskriterium nicht existiert: Komplexitätsreduktion, Multimodalität, Analogiebildung und multiple Klassenbildung. Wir beschränken uns hier auf die Multimodalität. Diese Basiskomponente charakterisiert die Fähigkeit im Denken, ein Problem sowohl bildhaft-anschaulich als auch begrifflich (bzw. rechnerisch oder durch Symbolmanipulation) zu lösen. Es ist bekannt, dass eine solche Doppelrepräsentation bzw. das Wechselspiel zwischen den Modalitäten die Leistung fördert. Dies gilt sowohl für das Behalten von Information – ein dargebotenes Wort in Verbindung mit einem Bild wird besser behalten als ein Wort allein (Engelkamp, 1990) – als auch beim Denken (Spies, 1995, 1996; Krause, 2000), sowohl bei technischen Problemen als auch bei Alltagsproblemen. Beispielsweise zeigt Klix (1993) mit Bezug auf den von Leibniz eingeführten Integralgedanken als Summe einer

„menschlichen“ Anzahl von „differentiellen Stückchen“, wie wechselseitige Abbildungen von anschaulichen in begriffliche Repräsentationsformen und umgekehrt zu kreativen Denkleistungen, zur Entdeckung völlig neuer Zusammenhänge führen können. Der kognitive Aufwand sollte eine entscheidende Größe für das Wechselspiel zwischen den Modalitäten darstellen: ein Wechsel sollte insbesondere dann stattfinden, wenn der kognitive Aufwand in der verbleibenden Modalität hoch bzw. das Problem gar nicht lösbar ist. Der Autor macht dies mit einem trivialen Beispiel deutlich: „Zu 1 Million 10 000 Stück hinzutun, das ist anschaulich nicht zu machen. In der logisch-begrifflichen Ebene unseres Zahlensystems jedoch eine Kleinigkeit“. Diese Eigenschaft des Wechselspiels zwischen den Modalitäten wird als eine Eigenschaft Hochbegabter angesehen (Hendrickson, 1986; Klix, 1992). Wenn dies zutrifft, dann ergeben sich für den experimentellen Nachweis der Multimodalität zumindest 2 Methoden: 1) die Variation einer unabhängigen Variablen (z. B. Operationenanzahl) so, dass der Modalitätswechsel durch Aufwandserhöhung erzwungen wird und 2) ein Extremgruppenvergleich hoch – versus normalbegabt. Wir haben uns hier für den zweiten Weg entschieden und fragen, ob sich bessere Leistungen Hochbegabter auf das Wechselspiel zwischen Rechnen und bildhafter Vorstellung zurückführen lassen.

2. Ist die kürzere Lösungszeit Hochbegabter experimentalpsychologisch erklärbar?

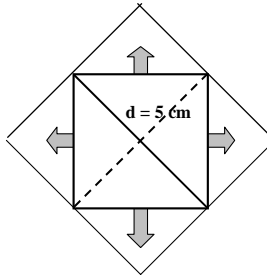
Gegeben ist folgendes Problem (Abbildung 1): Für ein Quadrat mit der Diagonallänge $d = 5$ cm soll der Flächeninhalt verdoppelt werden. Wie lang ist die Seite des neuen Quadrates? Die Abbildung 1 zeigt zwei Modalitätsstrategien, die zur Lösung des Problems eingesetzt werden können. Eine bildhaft-anschauliche Strategie (Abbildung 1 oben) besteht im „Herausklappen“ der vier kongruenten rechtwinkligen Dreiecke, die durch Einzeichnen beider Diagonalen entstanden sind. Ein solches Vorgehen führt auf eine geometrische Figur, welche die Lösung unmittelbar nahe legt. Eine rechnerische Strategie (Abbildung 1 unten) besteht im Anwenden des Satzes von Pythagoras (Heinrich, 1997).

Unsere Versuchspersonen³ müssen solche Probleme lösen. Dabei zeigt

3 Stichprobe: *mathematisch (Hoch)begabte*: 12 Abiturienten des Carl-Zeiss-Gymnasiums Jena (Spezialschule); Durchschnittsalter: 18,5; 3 weiblich, 9 männlich; IQ (LPS – U3): 124. *mathematisch Normalbegabte*: 13 Abiturienten der Grete-Unrein Schule Jena (Gesamtschule); Durchschnittsalter: 17,6; 6 weiblich, 7 männlich; IQ (LPS – U3): 106. Die Auswahl erfolgte durch Lehrerurteil.

sich, wie aus Tabelle 1 hervorgeht, dass hochbegabte Versuchspersonen etwa die halbe Zeit im Vergleich zu normalbegabten Versuchspersonen benötigen. Worauf ist diese Zeitverkürzung bei Hochbegabten zurückzuführen?

Bildliche Lösungsstrategie:



Rechnerische Lösungsstrategie:

(Die Skizze dient hier nur dem besseren Verständnis)

	$F = a^2$ $d^2 = a^2 + a^2$ $d^2 = 2a^2 \text{ and } a^2 = \frac{d^2}{2}$ $\Rightarrow F = \frac{d^2}{2}$ $F' = 2F$ $F' = 2 \cdot \frac{d^2}{2}$ $F' = d^2$ $\Rightarrow a' = \sqrt{d^2}$ $a' = d$ $a' = 5 \text{ cm}$
--	--

Abb. 1: Beide Modalitätsstrategien (2 M) zur Lösung des oben angegebenen Problems.

Oben: bildhaft-anschauliche Strategie.

Unten: Lösung durch Arbeiten mit Gleichungen und Rechnen.

Größe		hochbegabt	normalbegabt	Z-Werte	p-Werte
IQ nonverbal	M	124	107	-2,79	0,004
	SD	10	10		
IQ verbal	M	112	105	-0,997	0,34
	SD	13	4		
Mentale Rotation	M	17	14	-1,317	0,193
	SD	3	5		
Cavanagh-Konstante	M	295	247	-0,821	0,438
	SD	116	77		
Gedächtnisspanne (Ziffern)	M	7,36	6,03	-3,45	0,000
	SD	0,957	0,489		
Lösungszeit	M	57	101	-3,95	0,001
	SD	46	52		

Tab. 1: Intelligenzquotient (IQ), mentale Rotation (Scorewerte), Gedächtniskapazität (Cavanagh-Konstante in ms), Gedächtnisspanne (g), Arbeitsgedächtniskapazität (Rechenspanntest) und Lösungszeit (sec) für Hoch- und Normalbegabte (M = Mittelwert, SD = Standardabweichung).

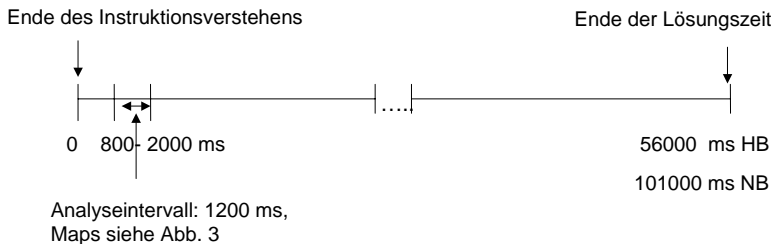
Fragen wir zunächst, ob die mit anderen psychologischen Messverfahren bestimmten Eigenschaften Hochbegabter die kürzere Lösungszeit – zumindest plausibel – erklären könnten. Hochbegabte seien intelligenter als Normalbegabte, dann sollte der IQ trennen. Wie die Tabelle 1 zeigt, sind die Ergebnisse widersprüchlich und damit für die Prädiktion ungeeignet. (Mit dem nonverbal IQ werden Leistungen beim analogen Schließen, mit dem verbal IQ werden Kategorisierungsleistungen gemessen.) Angenommen, Hochbegabte besitzen eine größere Visualisierungsfähigkeit als Normalbegabte, könnten sich also etwas bildhaft-anschaulich besser vorstellen, dann sollten die Testwerte bei der mentalen Rotation trennen. Gemäß Tabelle 1 ist dies jedoch nicht der Fall. Angenommen, Hochbegabte hätten eine bessere (Kurzzeit-) Gedächtniskapazität, dann sollten sie sich in der Gedächtnisspur (ausdrückbar durch die Cavanagh-Konstante in ms) unterscheiden. Wie Tabelle 1 zeigt, findet sich kein Unterschied. Dagegen steht zunächst ein Unterschied in der Gedächtnisspanne bei Ziffern. Danach behalten Hochbegabte kurzzeitig mehr Ziffern als Normalbegabte. Die Gedächtnisspanne ist jedoch materialabhängig und von daher nicht verallgemeinerbar. Die traditionellen Maße der Experimentalpsychologie liefern damit keine Erklärung für die kürzere Lösungszeit Hochbegabter.

Klix (1992) erklärt die kürzere Lösungszeit Hochbegabter durch die bessere Verfügbarkeit von Strategien.

3. Haben Hochbegabte Strategien besser verfügbar?

Wenn Hochbegabte im Gegensatz zu Normalbegabten schon mit dem Verstehen des Problems (oder spätestens am Ende des Verstehensprozesses) Lösungsstrategien verfügbar (vgl. Fußnote 2) haben, dann sollten jene Hirnareale, die für diese Strategien verantwortlich sind, zu diesem Zeitpunkt bei Hochbegabten aktiviert sein, nicht dagegen bei Normalbegabten. Zum Nachweis der Aktivierung in den Hirnarealen wurde das Elektroenzephalogramm (EEG) während des Problemlösens gemessen. Die EEG-Auswertung erfolgt mit der von Schack entwickelten adaptiven EEG-Kohärenzanalyse (Schack, 1997, 1999; Schack, u. a. 1995, 1999). Die Kohärenz ist ein Maß für die Synchronizität zweier EEG-Signale. Hohe Kohärenz bedeutet hohe Aktivierung. In dieser Untersuchung erfolgt eine Beschränkung auf benachbarte Elektrodenpaare und auf ein Frequenzband von 13 bis 20 Hz. Bezüglich der Datenauswertungsmethode sei auf die genannte Literatur verwiesen.

Die Grundidee für den Nachweis der Verfügbarkeit ist in Abbildung 2 dargestellt.



2-Modalitätsstrategien

1-Modalitätsstrategie

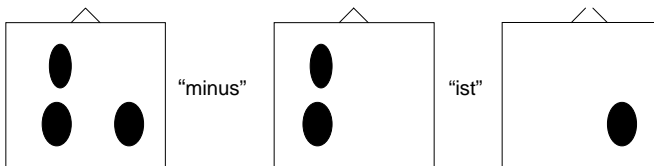


Abb. 2: Schematische Darstellung für den Nachweis der Verfügbarkeit von Modalitätsstrategien. oben: Zeitbezug der EEG-Kohärenzanalyse und Lösungszeit. (HB = hochbegabt, NB = normalbegabt).

unten: Schematische topographische Darstellung der aktivierten kortikalen Areale (Maps) bei Nutzung einer (1 M: Rechnen) bzw. bei Nutzung von zwei (2 M: Rechnen und bildhaftes Vorstellen) Modalitätsstrategien. Bei Differenzbildung erhält man das rechte Map als Nachweis für die Nutzung von zwei Modalitätsstrategien.

Die zeitliche Analyse beschränkt sich auf die erste Sekunde nach dem Instruktionsverstehen. Der 800 ms Startpunkt (und nicht Null ms) ist methodischen Bedingungen der adaptiven EEG-Kohärenz geschuldet. Das Analyseintervall von 1200 ms ist willkürlich gewählt worden. Die Versuchspersonen mussten sowohl Probleme mit zwei Modalitätsstrategien (2 M) (vgl. Abb. 1) als auch Aufgaben mit einer Modalitätsstrategie (1 M) lösen. Für die zuletzt genannte Anforderung wurden Additionsaufgaben mit 3 und 4 Summanden gewählt. Diese Aufgaben dienten als Referenz. Das Ergebnis der Differenzen zeigt Abbildung 3.

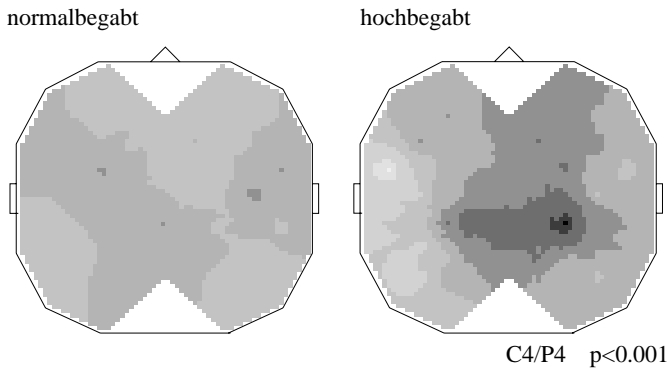


Abb. 3: gemittelte Differenzkohärenzmaps beim Lösen von Aufgaben (zwei Modalitätsstrategien minus eine Modalitätsstrategie) für Hoch- und Normalbegabte. Die Kohärenzdifferenz von 0,27 über dem Elektrodenpaar C4P4 (der dunkelste Fleck centro-parietal rechts) ist signifikant ($p < 0,001$, Bonferronikorrektur). Skala der Kohärenzwerte: von + 0,30 (schwarz) bis - 0,30 (weiss).

Zur Mapdarstellung wurden aus der Stichprobe der Hochbegabten nur diejenigen Zeitpunkte ausgewählt, zu denen die Kohärenz im centroparietalen Bereich rechts über C4P4 beim Lösen von 2-Modalitätsstrategie-Aufgaben signifikant höher war als beim Lösen von 1-Modalitätsstrategie-Aufgaben. Für diese so ausgewählten Zeitpunkte wurden die Differenzkohärenzmaps in der Stichprobe der Normalbegabten bestimmt. Die Mittelung der Maps erfolgt über gleiche Stichprobenanzahlen. Der Befund in Abbildung 3 besagt, dass innerhalb der ersten Sekunde nach dem Instruktionsverstehen bei Hochbegabten bereits jene Hirnregionen aktiviert sind, die für beide Modalitäten verantwortlich gemacht werden, wohingegen in der Stichprobe der Normalbegabten zu diesem Zeitpunkt noch keine Aktivierung in diesen Hirnregionen nachweisbar ist. Wir interpretieren dieses Ergebnis so, dass zu diesem Zeitpunkt – innerhalb der ersten Sekunden nach dem Instruktionsverstehen – eine

bildhaft–anschauliche Modalitätsstrategie in der Stichprobe der Normalbegabten noch nicht verfügbar ist.

Betrachtet man neben der Topographie auch noch die Aktivationszeit über dem Elektrodenpaar C4P4 in Abhängigkeit von der Lösungszeit (Abbildung 4), so lässt sich ein umgekehrt proportionaler (und nicht direkt proportionaler) Zusammenhang für dieses Analyseintervall der ersten Sekunde nachweisen. Je länger dieses ausgewählte kortikale Areal – in diesem frühen Zeitabschnitt – aktiv ist, umso kürzer ist die Lösungszeit.

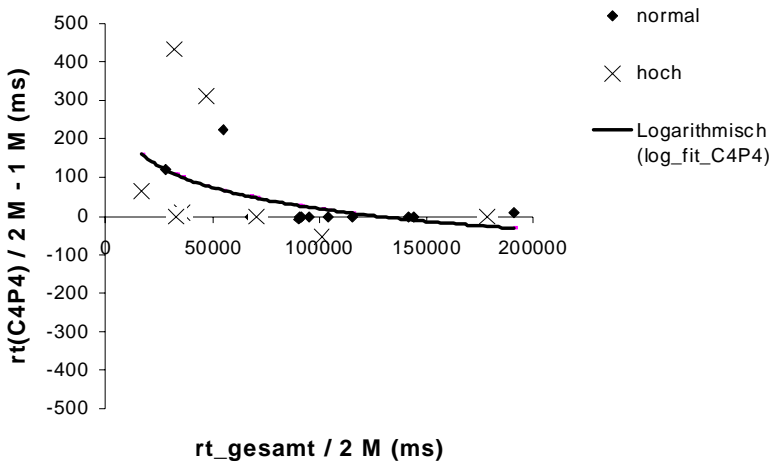


Abb. 4: Zeit, in der über dem Elektrodenpaar C4P4 eine signifikant höhere Kohärenz bei einem 2-Modalitätsstrategie-Problem im Vergleich zu einer 1-Modalitätsstrategie-Aufgabe gemessen wurde in Abhängigkeit von der Lösungszeit für jede einzelne Versuchsperson. Durch Kreuze bzw. Quadrate sind die hoch- bzw. normalbegabten Versuchspersonen gekennzeichnet. Der negative Anstieg der angepassten Funktion ist signifikant von Null verschieden ($B = -79,6$; $p = 0,038$).

Die Funktion in Abbildung 4 repräsentiert eine Beziehung, wie sie in der Betrachtungsweise zwischen innerer und äußerer Psychophysik kognitiver Prozesse von Bedeutung ist (Sommerfeld, 2001). Es lässt sich – in der Tat auch bei Denkprozessen – in analoger Weise eine Funktion zwischen intern und extern ablaufenden Prozessen angeben.

Hypothesengemäß findet sich über anderen Hirnregionen kein funktionaler Zusammenhang. Als Beispiel ist die Beziehung im linken Frontalbereich über dem Elektrodenpaar F3F7 in Abbildung 5 dargestellt.

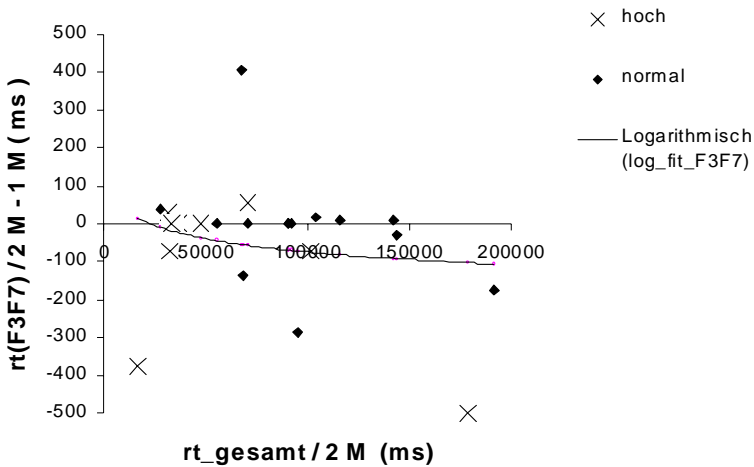


Abb. 5: Zeit, in der über dem Elektrodenpaar F3F7 eine signifikant höhere Kohärenz bei einem 2-Modalitätsstrategie-Problem im Vergleich zu einer 1-Modalitätsstrategie-Aufgabe gemessen wurde in Abhängigkeit von der Lösungszeit für jede einzelne Versuchsperson. Durch Kreuze bzw. Quadrate sind die hoch- bzw. normalbegabten Versuchspersonen gekennzeichnet. Der negative Anstieg der angepassten Funktion ist nicht signifikant von Null verschieden ($B = -50$; $p = 0,46$).

Die Abbildung 6 zeigt die Beziehung für alle 30 Elektrodenpaare.

Wir deuten diesen Befund so, dass eine frühzeitige längere Aktivierung der für eine bildhaft-anschauliche Modalitätsstrategie verantwortlichen kortikalen Areale die Lösungszeit verkürzt. Dies unterstreicht den Einfluss der frühzeitigen Verfügbarkeit von Strategien auf die Lösungszeit und stellt eine Erklärungsmöglichkeit dar, warum Hochbegabte kürzere Lösungszeiten aufweisen.

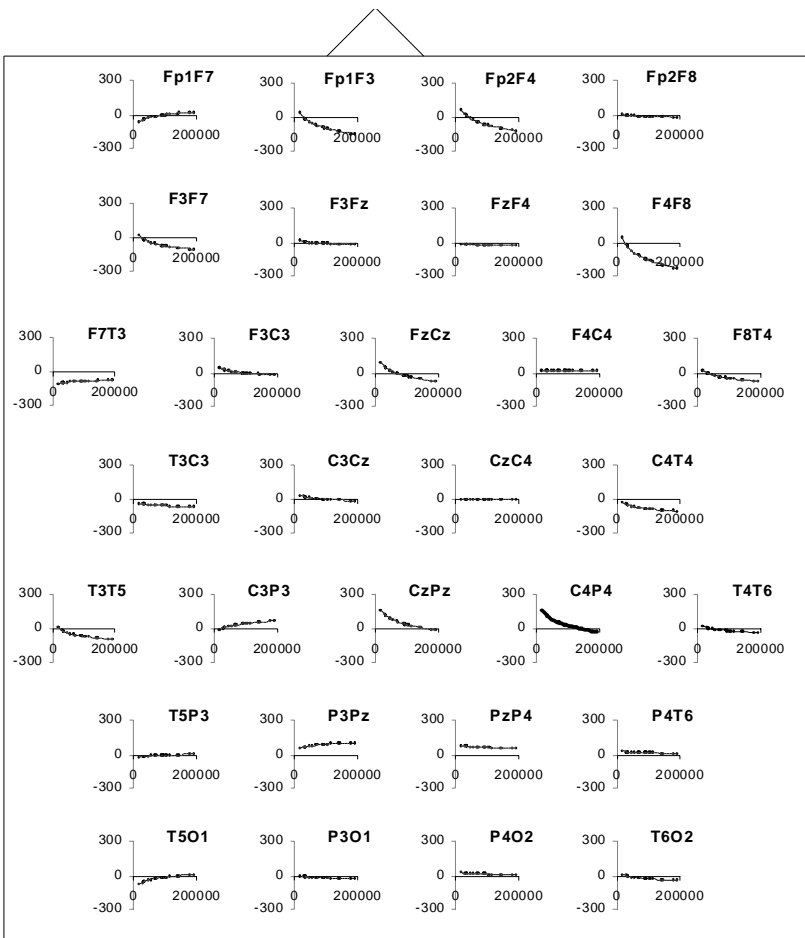


Abb. 6: Zeit (ms), in der über jedem Elektrodenpaar eine signifikant höhere Kohärenz bei einem 2-Modalitätsstrategie-Problem im Vergleich zu einer 1-Modalitätsstrategie-Aufgabe gemessen wurde in Abhängigkeit von der Lösungszeit (ms) für jede einzelne Versuchsperson. Nur über dem Elektrodenpaar C4P4 ist der negative Anstieg signifikant (siehe auch Abb. 4 und 5).

4. Zeigen Hochbegabte einen geordneteren Denkablauf?

Denkabläufe bilden sich in Handlungsabläufen ab, geordnete Denkabläufe in geordneten Handlungsabläufen, in geordneten Handlungs- oder Zustandsse-

quenzen. Man denke etwa an Zustandssequenzen als Sequenzen bestimmter Scheibenkonstellationen beim Turm von Hanoi. Zustandssequenzen können als Markoffketten aufgefasst werden. Der Ordnungsgrad einer Zustandssequenz lässt sich auf der Basis von Auftritts- und Übergangswahrscheinlichkeiten von und zwischen Zuständen als Entropie bestimmen. Damit wird der Ordnungsgrad einer Sequenz extern erfasst. Bekanntlich hat die seit mehr als zweitausend Jahren währende Trennung zwischen „extern“ und „intern“ einen entscheidenden Erkenntnisfortschritt gebracht. Lässt sich, so wäre zu fragen, die oben angestellte Überlegung auf eine „intern“ ablaufende Sequenz übertragen, um damit den Ordnungsgrad eines Denkablaufes zu messen? Intuitiv ist klar, dass ein geordneter Denkablauf weniger „Umwege produziert“ und damit weniger Zeit verbraucht, also zu kürzeren Lösungszeiten führt. Es muss aber ein Äquivalent für die externen Zustände intern definiert werden.

Lehmann (1987) hat in die EEG-Analyse eine Methode eingeführt, um zeitlich stabile Aktivationszustände aus dem EEG-Signal zu bestimmen, die ein Äquivalent für kognitive Operationen sein sollten. Er bezeichnete sie – spekulativ – als „Atome des Denkens“. Schack (1997, 1999) hat diesen Gedanken auf die adaptive EEG-Kohärenzanalyse übertragen. Mit dem von ihr entwickelten Verfahren lassen sich zeitlich stabile EEG-Kohärenzmaps bestimmen, die in Anlehnung an Lehmann als Mikrozustände bezeichnet werden. Wenngleich es nicht gelingt, die Mikrozustände zu interpretieren (Krause und Seidel, 2003), d. h. den Mikrozuständen kognitive Operationen eindeutig zuzuordnen, so lässt sich doch der Ordnungsgrad der Mikrozustandssequenzen mit der von Schack entwickelten Methode bestimmen. Die Mikrozustandssequenzen können – worauf wir bereits hingewiesen haben – als Markoffketten aufgefasst werden. Auftritts- und Übergangswahrscheinlichkeiten können so bestimmt werden. Mit einer Beschränkung auf 6 Mikrozustände sind die Markoffketten für eine hoch- und eine normalbegabte Versuchsperson in Abbildung 7 angegeben.

Auffällig ist die sich deutlich abhebende Untersequenz der hochbegabten gegenüber der normalbegabten Versuchsperson. Die über die Stichproben berechnete Entropiereduktion und der Ordnungsgrad der Markoffkette sind in Abbildung 8 dargestellt.

Nach diesem Befund weisen Hochbegabte eine höhere Entropiereduktion auf im Vergleich zu den Normalbegabten: das Gleiche gilt für den Ordnungsgrad (Krause, Seidel und Heinrich, 2003). Offensichtlich geht die höhere Verkettung der Mikrozustände mit einer Verkürzung der Lösungszeit einher.

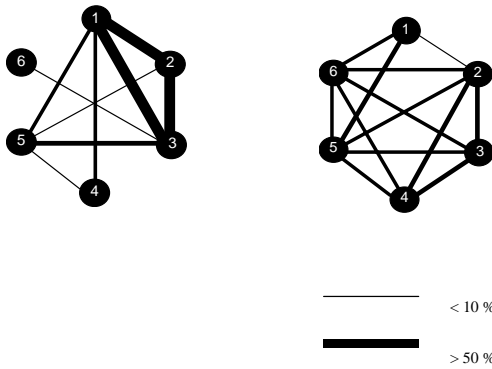


Abb. 7: Mikrozustandssequenzen für eine hochbegabte und eine normalbegabte Versuchsperson beim Lösen eines 2-Modalitätsstrategie-Problems (vgl. Abbildung 1). Die Strichstärke steht für die Übergangshäufigkeiten. Es erfolgt eine Beschränkung auf 6 Mikrozustände. Die Entropiereduktion H_{red} wurde als Differenz zwischen der Shannon-Entropie und der bedingten Entropie (Schack, 1999) für die beiden Versuchspersonen berechnet (hochbegabt: $H_{red} = 1.20$, normalbegabt: $H_{red} = 0.91$).

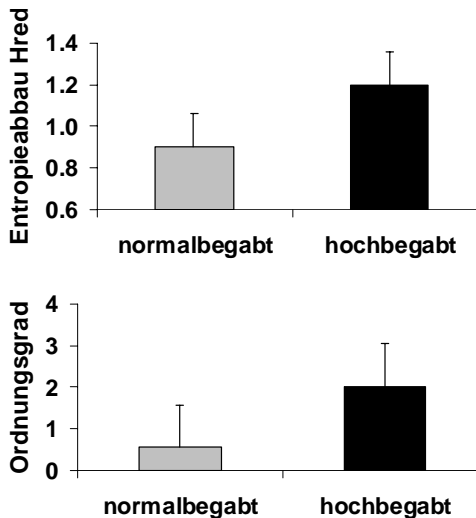


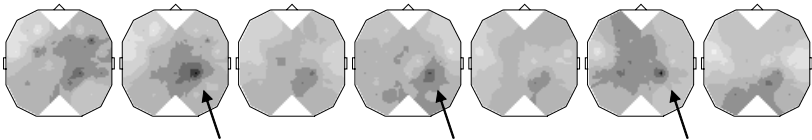
Abb. 8: oben: Entropiereduktion H_{red} für die Stichprobe der hoch- und der normalbegabten Versuchspersonen. Bei sechs Mikrozuständen beträgt der maximale Wert 2,56. Der Unterschied zwischen den Stichproben ist signifikant, ausgedrückt durch * ($p < 0,01$). unten: Ordnungsgrad der Markoffkette der Mikrozustände für die Stichprobe der hoch- und normalbegabten Versuchspersonen. Der Unterschied ist signifikant, ausgedrückt durch * ($p < 0,01$). Der Ordnungsgrad wurde mit einer Konfigurations-Frequenz-Analyse (Lautsch und Weber, 1995) bestimmt.

5. Zeigen Hochbegabte ein intensiveres „Wechselspiel“?

Phänomenologisch ist hinreichend erörtert, dass das Wechselspiel zwischen den Modalitäten zur Charakterisierung geistiger Leistungen eine bedeutsame Größe ist. Dies gilt nicht nur für die Mathematikdidaktik (Heinrich, 2003b) oder den historisch-mathematikdidaktischen Aspekt (Zimmermann, 2003), sondern auch für die Mathematik (Descartes, 1641, 1954), für die Begabungsforschung (Hendrickson, 1986), für die Gedächtnispsychologie (Paivio, 1969; Engelkamp, 1990), für die Denkpsychologie (Klix, 1992, 1993; Krause, 2000), für die Technikwissenschaften (Spies, 1995, 1996) und noch für weitere Disziplinen.

Zu fragen ist, ob dieses „Wechselspiel“ zwischen den Modalitäten auch mit neurowissenschaftlichen Methoden nachweisbar ist. Zur Beantwortung dieser Frage wird die gleiche Methode wie im Abschnitt 3) verwendet, jedoch dehnen wir jetzt das Analyseintervall auf die ersten 10 Sekunden nach dem Instruktionsverstehen aus. Die Abbildung 9 zeigt das auf diese Weise erhaltene Ergebnis für eine hochbegabte und eine normalbegabte Versuchsperson.

hochbegabt (rt = 32303 ms)



normalbegabt (rt = 144024 ms)

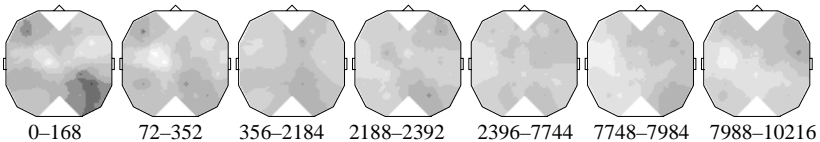


Abb. 9: Differenzkohärenzmaps (2 Modalitätsstrategien – 1 Modalitätsstrategie), gemittelt über jeweils 20 Aufgaben, für eine hochbegabte und eine normalbegabte Versuchsperson. Skala der Kohärenzwerte: von + 0.30 (schwarz) bis – 0.30 (weiss). Pfeile kennzeichnen signifikante Differenz über C4/P4 ($p < 0.001$, Bonferronikorrektur). Die Zahlen unter den Maps geben die Zeiten in ms an, die für beide Versuchspersonen gelten. Diese Zeitverhältnisse für den Modalitätswechsel wurden bei der hochbegabten Versuchsperson gefunden und auf die normalbegabte Versuchsperson übertragen. Bei der normalbegabten Versuchsperson wurde im gesamten Analyseintervall von 10 Sekunden keine signifikante Differenzkohärenz gefunden.

Innerhalb des Analyseintervalls von 10 Sekunden wird bei der hochbegabten Versuchsperson dreimal über dem Elektrodenpaar C4P4 eine signifikant höhere Kohärenz bei einer 2-Modalitätsstrategie-Aufgabe gegenüber einer 1-

Modalitätsstrategie-Aufgabe gemessen. Diese Kohärenzerhöhung dauert im Mittel über 200 ms an. Es gibt gute Gründe anzunehmen, dass eine so relativ lange Zeit mit dem Zeitverbrauch kognitiver Operationen in Verbindung zu bringen ist⁴. Übertragen wir die gleichen Zeitverhältnisse auf die normalbegabte Versuchsperson, so lässt sich kein Wechsel innerhalb der ersten 10 Sekunden beobachten. Es ist natürlich nicht auszuschließen, dass dieser Wechsel bei dieser normalbegabten Versuchsperson zu einem späteren Zeitpunkt eintritt. Und schließlich sollte ein Trainingsprozess oder ein gezielter Unterricht die zeitliche Vorverlagerung der Aktivierung und den Wechsel befördern. Man muss mit Bezug auf die Abbildung 9 jedoch deutlich machen, dass hier zwei Einzelfälle dargestellt sind. Für die gesamten Stichproben wurde kein signifikanter Unterschied für die Häufigkeit des Wechsels der Aktivierung über C4P4 gefunden. Wir vermuten, dass die verwendeten Aufgaben (vgl. Abbildung 1) für unsere Hochbegabten generell zu einfach waren. Über das „Wechselspiel“ bei komplizierteren Aufgaben wird zu einem späteren Zeitpunkt zu berichten sein.

Auf der Suche nach sensiblen Maßen für geistige Prozesse und Leistungen könnten der Zeitpunkt der Verfügbarkeit von Strategien, gemessen über den Zeitpunkt der Frühaktivierung ausgezeichneter Hirnregionen, das Wechselspiel zwischen Rechnen und bildhafter Vorstellung, gemessen über die Häufigkeit des Wechsels der Aktivierung ausgezeichneter Hirnareale und die Ordnung des Denkablaufes, gemessen über die Entropiereduktion und den Ordnungsgrad als solche Maße betrachtet werden, vorausgesetzt, die Mikrozustände lassen sich interpretieren.

6. Zusammenfassung

Die kürzere Lösungszeit von Hochbegabten gegenüber Normalbegabten beim Lösen von 2-Modalitätsstrategie-Aufgaben lässt sich durch die zunächst plausible Vermutung einer besseren Visualisierung nicht erklären. Auch finden wir bei diesen Anforderungen keinen Unterschied im Wissen um die Modalitätsstrategien. Die Gedächtniskapazitäten der Stichproben unterscheiden sich ebenfalls nicht.

Vielmehr findet sich bei Hochbegabten eine hohe Aktivierung in für Modalitätsstrategien ausgezeichneten Hirnarealen zu einem sehr frühen Zeit-

4 Just und Carpenter (1976): Fixationsdauer bei Vergleichs- und Rechenoperationen: 293 ms; Klix und van der Meer (1978), Klix (1983): analoge Schlussprozesse: 220 ms; Petzold und Edeler (1999): Urteilsprozesse: 56 ms.

punkt des Lösungsprozesses, unmittelbar nach dem Verstehen der Aufgabe. Bei Normalbegabten findet sich diese Aktivierung zu einem sehr frühen Zeitpunkt nicht. Die Aktivierungszeit dieser ausgezeichneten Hirnareale ist der Lösungszeit umgekehrt proportional. Wir interpretieren diese Befunde als bessere Verfügbarkeit von Modalitätsstrategien bei Hochbegabten und begründen damit deren kürzere Lösungszeit.

Darüber hinaus finden sich Unterschiede in der Sequenz von Mikrozuständen. Hochbegabte zeigen eine höhere Verkettung von Mikrozuständen. Aus den dabei entstehenden Subsequenzen resultieren Zeitverkürzungen.

Das Wechselspiel zwischen Rechnen und bildlicher Vorstellung ließ sich bisher nur kasuistisch zeigen. Zur Generalisierung bedarf es einer schwierigeren Anforderung.

Mit solchen Parametern wie Topographie, Sequenz und Wechsel zwischen Hirnarealen, die biologische Grundlagen des Verstandes darstellen, lassen sich subjektive Urteile objektivieren.

Danksagung: Für die Überlassung der Forschungssoftware „adkoh“, „adseg“ und „cohcl“ gilt unser herzlicher Dank Bärbel Schack. Ihr plötzlicher Tod hat uns sehr erschüttert. Für die Nutzung der Forschungssoftware „ilmap“ danken wir Gert Griebach sehr herzlich.

Literatur

- Bauersfeld, H. (1993). Mathematische Lehr-Lern-Prozesse bei Hochbegabten – Bemerkungen zu Theorie, Erfahrungen und möglicher Förderung. *Journal für Didaktik der Mathematik (JMD)*, 14, 3 / 4, 243–267.
- Cohen, L. & Dehaene, S. (1997). Cerebral pathways for calculation: double dissociation between rote verbal and quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex*, 33, 219–250.
- Dehaene, S. & Cohen, L. (1998). *Levels of representation in numberprocessing*. In: Stemmer, B. Whitaker, H.D. (eds.). *Handbook of Neurolinguistics*. San Diego: Academic Press.
- Descartes, R. (1954). *Meditation über die Grundlagen der Philosophie*. Übersetzung von A. Buchenau, Hamburg. (Titel der Originalausgabe: *Meditationes de prima philosophia*, 1641, 42).
- Engelkamp, J. (1990). *Das menschliche Gedächtnis*. Göttingen, Toronto, Zürich: Hogrefe.
- Griebach, G. (1990). *Computerorientierte Messtochastik in der Technischen Diagnose und dem Signalmapping*. *Habilitationsschrift. Friedrich-Schiller-Universität Jena, Mathematische Fakultät*.

- Hendrickson, L. (1986). A longitudinal study of precocity in music. In A.J. Cropley, K. Urban, H. Wagner, & W. Wiczerkowski (Eds.), *Giftedness*. (pp. 192–204). New York: Trillium Press.
- Heinrich, F. (1997). Diskussionsmaterial zur Untersuchung der Doppelrepräsentationshypothese und einige Bemerkungen aus mathematikdidaktischer Sicht. (*Manuskript, unveröffentlicht*).
- Heinrich, F. (2003a). Theoretische Analysen und empirische Erkundungen über das Wechseln von Lösungsansätzen beim Lösen mathematischer Probleme. Habilitationsschrift, Fakultät für Sozial – und Verhaltenswissenschaften, Friedrich-Schiller-Universität Jena.
- Heinrich, F. (2003b). Zum Wechselspiel zwischen Geometrie und Arithmetik/Algebra als ein heuristisches Leitprinzip im (bzw. von) Mathematikunterricht. Vortrag zur Habilverteidigung, Fakultät für Sozial – und Verhaltenswissenschaften, Friedrich-Schiller-Universität Jena. (*Manuskript, unveröffentlicht*).
- Just, M.A. & Carpenter, P.A. (1976). Eye Fixations and Cognitive Processes. *Cognitive Psychology*, 8, 441–480.
- Kießwetter, K. (2002). Unzulänglich vermessen und vermessen unzulänglich: PISA u. Co. In *DMV-Mitteilungen* 4/2002, S. 49–58. Siehe auch die Langversion: <http://www.minet.uni-jena.de/~schmitzm/midida/start.php?Datei=timss.txt>
- Klix, F. (1983). Begabungsforschung – ein neuer Weg in der kognitiven Intelligenzdiagnostik. *Zeitschrift für Psychologie*, 191, 360–387.
- Klix, F. (1992). *Die Natur des Verstandes*. Göttingen: Hogrefe.
- Klix, F. (1993). *Erwachendes Denken*. Heidelberg: Spektrum.
- Klix, F. & van der Meer, E. (1978). Analogical reasoning – an approach to cognitive microprocesses as well as to intelligence performance. *Zeitschrift für Psychologie*, 186, 39–47.
- Krause, W. (2000). *Denken und Gedächtnis aus naturwissenschaftlicher Sicht*. Göttingen: Hogrefe.
- Krause, W. & Sommerfeld, E. (2000). Elementaranalyse von Denkprozessen mit psychophysikalischen und neurowissenschaftlichen Methoden. *Zeitschrift für Psychologie*, 208, 322–339.
- Krause, W. & Seidel, G. (2003). Biologische Grundlagen des Verstandes. In Krause, B. & Krause, W. *Psychologie im Kontext der Naturwissenschaften*. Trafoverlag: Berlin (im Druck).
- Krause, W., Seidel, G. & Heinrich, F. (2003). Entropy reduction in mathematical giftedness. A new measurement for mental performance. In U. Lindemann (ed.) (2003). *Human behavior in design*. Springer-Verlag. Berlin (im Druck).
- Lautsch, E. & von Weber, S. (1995). *Methoden und Anwendungen der Konfigurationsfrequenzanalyse (KFA)*. Weinheim: Belz.
- Lee, K.-M. (2000). Cortical Areas Differentially Involved in Multiplication and Subtraction: A Functional Magnetic Resonance Imaging Study and Correlation with a Case of Selective Acalculia. *Annals of Neurology*, 48, 4 657–661.

- Lehmann, D., Ozaki, H. & Pal, I. (1987). EEG alpha map series: brain micro-states by space-oriented adaptive segmentation. *Electroencephalogr.Clin.Neurophysiol.*, 67, 271–288.
- Paivio, A. (1969). Mental imagery in associative learning and memory. *Psychological Review*, 76, 241–263.
- Petzold, P. & Edeler, B. (1999). Discrete Clusters of processing time in a verbal item-recognition task. In: *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the International Society for Psychophysics, Tempe*. pp. 25–30.
- Schack, B. (1997). Adaptive Verfahren zur Spektralanalyse Instationärer Mehrdimensionaler Biologischer Signale. *Habilitationschrift, Technische Universität Ilmenau*.
- Schack, B. (1999). Dynamic Topographic Spectral Analysis of Cognitive Processes. In Ch. Uhl (Ed.), *Analysis of Neurophysiological Brain Functioning*. Berlin, Heidelberg, New York:
- Schack, B. & Krause, W. (1995). Dynamic power and coherence analysis of ultra short-term cognitive processes - a methodical study. *Brain Topogr.*, 8, 127–136.
- Schack, B., Grieszbach, G. & Krause, W. (1999). The sensitivity of instantaneous coherence for considering elementary comparison processing. Part I: the relationship between mental activities and instantaneous EEG coherence. *Int.J.Psychophysiol.*, 31, 219–240.
- Seidel, G. (2001). Ordnungsbildung und Doppelrepräsentation im Denken mathematisch Hochbegabter. Sequentielle und topographische Eigenschaften von Mikrozustandsequenzen. *Dissertation, Friedrich-Schiller-Universität Jena*.
- Seidel, G. (2003). *Ordnung und Multimodalität im Denken mathematisch Hochbegabter: sequentielle und topologische Eigenschaften kognitiver Mikrozustände*. Lengerich: Pabst (im Druck).
- Sommerfeld, E. (2001). *Comparison Processes in Memory: Performance Indicators and Synchronous Brain Activity*. In: Sommerfeld, E., Kompass, R. & Lachmann, T. (2001). Fechner Day 2001. Proceedings of the Seventeenth Annual Meeting of the International Society of Psychophysics. Lengerich: Pabst Science Publishers. 81–86.
- Spies, K. (1995). Gezieltes Entwickeln und technisches Gestalten mit der marktorientierten Innovationsstrategie. *Glückauf*, 131, 648–652.
- Spies, K. (1996). *Ein methodischer Weg zu innovativen Technologien*. Aachen: Verlag der Augustinus Buchhandlung.
- Waldmann, M. & Weinert, F.E. (1986). How do the gifted think: Intellectual abilities and cognitive processes. In Cropley, A.J., Urban, K.K., Wagner, H. & Wiczerkowski, W. (eds.) (1986). *Giftedness: A Continuing Worldwide Challenge*. New York: Trillium Press.
- Zago, L., Pesenti, M., Mellet, E., Crivello, F., Mazoyer, B., Tzourio-Mazoyer, N. (2001). Neural Correlates of Simple and Complex Mental Calculation. *NeuroImage*, 13, 314–327.
- Zimmermann, B. (2003). Mathematisches Problemlösen und Heuristik in einem Schulbuch. *MU – Der Mathematikunterricht*, 1, 42–57.