Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät *94(2008), 83–99*

Roswitha März

Mit Euler rechnen Oder: Eine dorische Säule in der Mathematik

Vorbemerkung

Clifford A. Truesdell hat Leonhard Euler 1957 anläßlich des 250. Geburtstagsjubiläums *den größten Mathematiker aller Zeiten* genannt[1]. Das Eulersche Werk wird in seiner Bedeutung vielfach mit dem von Newton und Einstein verglichen.
Euler war außergewöhnlich produktiv. Er hinterließ u.a. 40 Bücher, 15 Preisschriften, Hunderte von Zeitschriftenaufsätzen und Tausende von Briefen. Etwa 30 mathematische Objekte und Ergebnisse tragen heute seinen Namen, darunter die *Eulersche Zahl e* und die *Eulersche Formel* $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, welche als eine der absolut schönsten mathematischen Formeln gilt.

Leonhard Euler wurde seinerzeit von Friedrich II. mit der *dorischen* unter den Säulen verglichen, was von der späteren Nachwelt übereinstimmend als herabsetzende Geringschätzung verurteilt wurde. Aber ist dieser Vergleich nicht viel eher zutreffend, eine (vielleicht unbeabsichtigte) Würdigung des Grundlegenden, Klaren, Einfachen? Er anerkennt die fundamentalen Leistungen des genialen und fleißigen Rechners Leonhard Euler und verbindet dessen gedankliche Klarheit mit der des dorischen Stils. Wir finden hier wie dort nichts Gekünsteltes, sondern eben wunderbar einfache Schönheit.
Eulers Beiträge zu zahlreichen Teilgebieten der Mathematik, wie Analysis und Variationsrechnung, sind von seinen unmittelbaren Nachfolgern bis in die Gegenwart als fundamental und wegweisend anerkannt und aufgegriffen worden. Ganz anders verhält es sich dagegen mit Eulers Ideen zur numeri-

1 C. A. Truesdell: Eulers Leistungen in der Mechanik. L'enseignement mathematique, 3(1957)4, S. 252.

schen Lösung von Differentialgleichungen: Es ist zwar überliefert, daß Leonhard Euler etliche Himmelskörperbahnen mit dem heute nach ihm benannten Polygonzugverfahren numerisch berechnet hat; daß er aber auch schon die dabei entstehenden Approximationsfehler analysiert und damit die *Grundlagen der Numerik von Differentialgleichungen* geschaffen hat, wurde bisher im Rahmen der Mathematik kaum reflektiert und gewürdigt. Dabei ist diese Leistung Eulers für die Mitwirkung der heutigen Mathematik in der naturwissenschaftlichen Forschung und in den Hochtechnologien ähnlich fundamental wie seine Beiträge zu Analysis und Variationsrechnung.

Dorische Säulen und Leonhard Euler

Der Marmortempel der Athena Parthenos auf der Akropolis von Athen und viele andere im dorischen Baustil errichtete Gebäude beeindrucken über Jahrhunderte hinweg durch ihre erhabene Schönheit. Ein dominantes Merkmal dieser Bauten sind ihre Säulen, jene schlichten dorischen Säulen mit ausgeprägten Abakussen, die keines besonderen Schmuckes bedürfen. Die späteren Säulenformen der Antike, die ionischen und korinthischen, und viele weitere Versionen sind weniger schlicht gehalten. Sie sind kunstvoll verziert und strahlen Leichtigkeit und Eleganz aus, was die ursprünglicheren dorischen Säulen als relativ gedrungen erscheinen lassen kann. Wir schätzen und bewundern alle diese Säulen gleichermaßen als schön in ihrer Art und in ihrem Zusammenhang. Nicht der Baustil an sich adelt ein Gebäude, sondern die besondere Kunst seiner Erbauer. Naturgemäß wirken dorische Säulen stärker als die geschmückten Säulen über ihre Funktionalität auf den Betrachter, es steht das Gebäude im Vordergrund und nicht das Detail. So kann es sein, daß ein oberflächlicher Blick die dorischen Säulen nicht zur Kenntnis nimmt.

Prinz August Wilhelm, Bruder König Friedrichs II., schrieb diesem am 28.Oktober 1746 über seine erste Begegnung mit Euler:
„... Ich fand an ihm die Wahrheit von der Unvollkommenheit aller Dinge bestätigt. Durch Fleiß hat er sich logisches Denken und damit einen Namen erworben: aber seine Erscheinung und sein unbeholfener Ausdruck verdunkeln alle diese schönen Eigenschaften und verhindern, daß man sie sich zunutze macht ...“, worauf Friedrich 3 Tage später antwortete:
„... Ich dachte mir schon, daß Deine Unterhaltung mit Herrn Euler Dich nicht erbauen würde. Seine Epigramme bestehen in Berechnungen neuer Kurven,

irgendwelcher Kegelschnitte oder astronomischer Messungen. Unter den Gelehrten gibt es solche gewaltige Rechner, Kommentatoren, Übersetzer und Kompilatoren, die in der Republik der Wissenschaften nützlich, aber sonst alles andere als glänzend sind. Man verwendet sie wie die dorischen Säulen in der Baukunst. Sie gehören in den Unterstock, als Träger des gesamten Bauwerkes und der korinthischen Säulen, die seine Zierde bilden ...“[2].
Der vorherrschenden Meinung, die fürstlichen Herrschaften hätten mit dieser Einschätzung Eulers allein sich selbst ein sehr prägnantes geistiges Armutszeugnis ausgestellt[3], mag ich mich nicht anschließen. Sie haben doch nur leichte Schwächen hinsichtlich der Baukunst gezeigt und etwas arrogant den damaligen Zeitgeschmack vertreten. Sieht man davon ab, ist der Vergleich mit der dorischen Säule gar nicht so schlecht.
Und daß Fürsten im 18. Jahrhundert, wie Friedrich II. und sein Bruder, die Bedeutung der Mathematik nicht voll erfaßt und das Genie eines Leonhard Euler nicht erkannt haben, sollte wirklich kein Anlaß zur Kritik sein. Man bedenke, daß viel später in Berlin Regierende sich sogar damit gebrüstet haben, von Mathematik nichts zu verstehen. Es wäre sozusagen ein äußerst bemerkenswertes Wunder gewesen, hätte Friedrich II. damals schon die Tragweite des Eulerschen Werkes und die der Mathematik erfaßt.

Leonhard Euler war Zeit seines langen Lebens hoch angesehen, geehrt und auch gut besoldet. Nicht nur das russische, sondern auch das preußische Königshaus schätzte und honorierte seine Dienste, auch wenn Friedrich II. der Mathematik und ihm persönlich recht reserviert gegenüber stand. Euler gehörte zu den wenigen Wissenschaftlern jener Zeit, die es allein durch wissenschaftliche Arbeit zu Wohlstand bringen und sich und ihre Familie gut versorgen konnten. Kraft seines Ansehens konnte Euler einen heute undenkbar großen Gestaltungsfreiraum nutzen.
Wehmütig bewundernd nehmen wir heute zur Kenntnis, wie sich in jener Zeit der Aufklärung, insbesondere auch in Berlin, Herrschende und Wissenschaftler derart involviert und sachkundig über wissenschaftliche Probleme austauschen konnten. Es muß eine aufregende und anregende Zeit gewesen sein!
Dagegen sind die Eitelkeiten, Empfindsamkeiten, auch die natürlich ungerechte Verteilung von Privilegien sowie die resultierenden Grabenkämpfe der

---

2 E. A. Fellmann: Leonhard Euler. Rowohlt Taschenbuch Verlag GmbH, Reinbek bei Hamburg, 1995, S. 85,86.
3 ebenda.

damals Agierenden, über die so gern und ausgiebig berichtet wird, leider zu allen Zeiten Normalität, und sehr gewöhnlich.
Amüsant hintergründig sind jedoch manche Passagen in den damals üblichen Schmähschriften. So hat Voltaire im Rahmen der bekannten, heftigen Auseinandersetzungen an der preußischen Akademie um das *Prinzip der kleinsten Aktion (Wirkung)*, Euler das Bekenntnis in den Mund gelegt, daß er (Euler) *„aufrichtig bereue, zu der Meinung verführt worden zu sein, man könne Philosophie verstehen, ohne sie gelernt zu haben, und daß er sich künftig mit dem Ruhm begnügen wolle, unter den Mathematikern von Europa derjenige zu sein, der in einer gegebenen Zeit das Maximum von Rechnungen aufs Papier wirft.“*[4] Hierzu sei daran erinnert, daß der damalige Akademiepräsident, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, der die zentrale Rolle im vielschichtigen Streit spielte, für sich irrtümlich in Anspruch nahm, ein ganz allgemein gültiges Prinzip der minimalen Aktion gefunden zu haben. Euler dagegen hat das Prinzip der kleinsten Wirkung mathematisch korrekt für eine spezielle Problemklasse (Bewegung eines Massenpunktes) formuliert, jedoch nie auf seine Urheberschaft gepocht. Euler war vorsichtig in bezug auf Verallgemeinerungen (*„Deshalb muß man sorgfältig die Reichweite dieses Prinzips untersuchen, um ihm nicht mehr zuzuschreiben, als in seiner Natur liegt.“*[5]), und überdies der Ansicht, daß in der Natur auch Maxima der Aktion vorkommen.
Doch zurück zu Euler und den Säulenformen. Der Bezug auf den dorischen Stil ist durchaus der einzig passende: Schlichte, ausgewogene Schönheit und schnörkellose Funktionalität sind auch für Euler charakteristisch. Er hat auf vielen Gebieten wirklich Grundlegendes geschaffen. Er ist Träger, also auch Unterstock, bedeutender, herrlicher Bauwerke der Mathematik, wie u.a. der Analysis, der Variationsrechnung und eben auch der Numerik von Differentialgleichungen, wie noch dargelegt werden soll.
Darüberhinaus besitzen dorische Säulen ein ganz speziell zu Euler passendes Detail. Ihr Kapitell zeichnet sich gegenüber den ionischen und korinthischen Kapitellen durch einen markanten *Abakus*, die quadratische Deckplatte über Säulenhals und Echinus, aus. Abakus, griechisch *abakion*, ist zugleich die Bezeichnung für ein *Rechenbrett*, das lange für die Grundrechnungsarten benutzt wurde. Ionische und korinthische Säulen haben nur marginale, flache Abakusse und passen daher überhaupt nicht zu Euler, der tatsächlich ein

4 R. Thiele: Leonhard Euler. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982, S. 85.
5 ebenda, S. 75.

gewaltiger Rechner war. Der Bezug auf die dorische unter den Säulen ist damit sogar doppelt gerechtfertigt.

Rechen = Kunst. Vom Nutzen der Höheren Mathematik

Die Abhandlungen Eulers zeichnen sich durch seine klare, völlig ungekünstelte, allgemein verständliche Ausdrucksweise aus, die heute ein wenig liebenswürdig umständlich anmutet. Hier ist eine Kostprobe aus einer frühen Schrift von 1738, die den schönen Titel *Rechen=Kunst* trägt, und in der Euler für eine Mathematisierung der Wissenschaften wirbt:
„Heute bezweifelt niemand den großen Nutzen der Mathematik, denn vielen Wissenschaften und Künsten, deren wir uns täglich bedienen, ist sie unentbehrlich. Dies Lob wird nun aber gewöhnlich der niederen Mathematik, sozusagen ihren Elementen gezollt, während man jener Mathematik, die mit Recht die höhere genannt wird, jede praktische Bedeutung abspricht. Sie sei ein Spinngewebe, denkt man, das seiner außerordentlichen Zartheit wegen nicht gebraucht werden könne. Die gesamte Mathematik befaßt sich aber mit dem Aufsuchen unbekannter Größen. Zu diesem Zwecke zeigt sie uns die Methoden oder gleichsam die Wege, die zur Wahrheit führen; sie macht die verborgensten Wahrheiten ausfindig und setzt sie ins richtige Licht. So schärft sie einerseits unsere Denkkraft, bereichert aber auch andererseits unsere Kenntnisse. Beides sind Ziele, die gewiß der größten Mühe wert sind. Die Wahrheit ist an sich eine Kostbarkeit; da mehrere Wahrheiten, unter sich verknüpft, höhere Zusammenhänge ergeben, ist jede von Nutzen, selbst wenn dieser zuerst nicht ersichtlich ist. Man wendet auch etwa ein, die höhere Mathematik versenke sich zu tief in die Ergründung der Wahrheit. Dies ist eher ein Lob als eine Kritik.
Doch verweilen wir nicht zu lange bei diesen abstrakten Vorzügen, können wir doch leicht beweisen, daß die höhere Analysis mit nicht weniger Recht als die elementare Mathematik die Bezeichnung einer nützlichen Wissenschaft verdient, ja, daß ihr sogar ein viel weiteres Feld der Anwendung offensteht. Selbst im Interesse derjenigen Wissenschaften, für welche die elementare Mathematik zu genügen schien, ist die Weiterentwicklung der höheren Mathematik bis zu einem Grade erforderlich, den sie noch lange nicht erreicht hat. Daher will ich in dieser Abhandlung zeigen, daß der Nutzen, den man der elementaren Mathematik zugesteht, bei der höheren Mathematik nicht etwa verschwindet, sondern im Gegenteil stets wächst, je höher man in dieser Wis-

senschaft steigt; ja, daß die Mathematik noch nicht einmal so weit entwickelt ist, als auch die gebräuchlichsten Anwendungen es eigentlich erfordern. Um dies deutlich zu beweisen, möchte ich der Reihe nach jene Wissenschaften durchgehen, deren Nutzen von jedermann anerkannt wird, nämlich: Mechanik, Hydrostatik, Astronomie, Artillerie, Physik und Physiologie. Ich werde zur Evidenz zeigen, daß eine um so höhere Analysis erforderlich ist, je größer der Nutzen, den wir aus diesen Wissenschaften ziehen wollen; daß es aber fast immer der noch ungenügenden Entwicklung der Mathematik zuzuschreiben ist, wenn unsere Hoffnungen, die wir in jene setzen, nicht erfüllt werden.“[6]
Euler schließt detaillierte Studien zur mathematischen Modellierung in den erwähnten Disziplinen an, die so einleuchtend und schön sind, daß ich sehr bedauere, sie hier aus Platzgründen nicht wiederholen zu können. Hätte Hans Magnus Enzensberger seinen Essay über das Veständnis der Mathematik dem Eulerschen Werke gewidmet, müßte er keine Zugbrücken vermissen.[7]

Es ist faszinierend, wie Euler die höhere Analysis, insbesondere die Differentialgleichungen, in die Mechanik und die anderen Disziplinen geradezu hineingetragen hat. Sein vielseitiger praktischer Sachverstand und sein starkes Interesse für technische Dinge waren hierfür eine Vorbedingung. Wesentlich aber war sein Verständnis der höheren Analysis, deren Grundlage, die Infinitesimalrechnung, sozusagen gerade eben erst durch Newton, Leibniz und Johann Bernoulli auf den Weg der Formierung gebracht worden war, und die er, Euler, dann anhand dieser Anwendungen wie kein anderer Mathematiker geprägt hat.

Was für ein überaus glücklicher Zufall der Geschichte, daß genau in der richtigen Zeit in der näheren Umgebung von Johann Bernoulli ein Kind mit einer solchen Begabung geboren wurde, daß Eulers Vater, ein Landpfarrer, eine Neigung zur Mathematik hatte und darüberhinaus mit Johann Bernoulli bekannt war, und daß beide die geniale Veranlagung des Kindes Leonhard

6 Einleitung zur *Rechen = Kunst* zum Gebrauch des GYMNASII bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in St.Petersburg. Gedruckt in der Academischen Buchdruckerey 1738. Übersetzung von J.J. Burckhardt, Commentatio 790 C indicis Enestroemiani, S. 408-409.

7 H. M. Enzensberger: Zugbrücke außer Betrieb. Die Mathematik im Jenseits der Kultur. Eine Außenansicht. A.K. Peters, Natick, Massachusetts, 1999.

Euler erkennen konnten und es weitsichtig förderten!

Leonhard Euler war sich seines Könnens wohl bewußt. Es machte ihn absolut souverän in der Handhabung der Mathematik. Hinzu kam eine dem damaligen Zeitgeist entsprechende aufklärerische Gewißheit der unbegrenzten Erkennbarkeit und des permanenten Fortschritts[8], die ihn beflügelte. Zitieren wir dazu noch eine Passage aus der schon erwähnten *Rechen=Kunst* zur Physik, die damals als die Wissenschaft, welche die Ursachen aller Vorgänge der Natur untersucht, angesehen wurde, also einen Sammelbegriff für alle Naturwissenschaften darstellte:
„Deshalb gewinnen in unseren Augen alle Wissenschaften bedeutend an Wert, die der Physik eine größere Ausdehnung und Vervollkommnung geben. Doch die Physik selbst entbehrt nicht des Nutzens, sondern trägt reichliche Früchte ins tägliche Leben, und wenn ich zeige, daß ohne höhere Mathematik kein Fortschritt in der Physik möglich ist, so wird auch jene dieses Lobes teilhaftig... Muß man sodann bei all den Vorgängen, bei denen man eine Veränderung beobachtet, nicht vorerst auf die Bewegung achten, zusehen, wodurch und wie sie hervorgerufen wurde, welche Veränderungen sie erleidet, u.s.w.? ... Denn alle Veränderungen, die wir in der Natur beobachten, stammen von der Bewegung her; es ist also klar, dass die Mechanik, das heißt die Wissenschaft von der Bewegung, notwendig ist, um selbst die kleinste Veränderung im Universum zu erklären.“[9]
Diese streng mechanistische Auffassung des jungen Euler war zweifellos sehr förderlich für sein Werk. Hat er sie später in irgendeiner Form revidiert oder relativiert? Fakt ist, daß Leonhard Euler sein Leben lang und wie niemand zuvor Mathematik mit Naturwissenschaften und Technik aktiv verbunden hat. Er ließ sich von verschiedensten Anwendungsproblemen inspirieren, um Neues in der Mathematik zu schaffen und damit zugleich das Ausgangsproblem einer Lösung zuzuführen. Nicht zufällig war er es, der u.a. den Bedarf und die Möglichkeit einer allgemeinen Theorie linearer Differentialgleichungen zuerst erkannt und realisiert hat. Für mich ist das der Beginn dessen, was wir heute *Angewandte Mathematik* nennen.

---

8 R. Thiele: Leonhard Euler. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982, Seite 156.

9 Einleitung zur *Rechen = Kunst* zum Gebrauch des GYMNASII bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in St.Petersburg. Gedruckt in der Academischen Buchdruckerey 1738. Übersetzung von J.J. Burckhardt, Commentatio 790 C indicis Enestroemiani, S. 414.

Ich füge hier eine in der Mathematik des 20. Jahrhunderts dominante Auffassung ein[10]:
„Eine philosophische Dimension der Mathematik besteht darin, daß sie es erlaubt, Phänomene der uns umgebenden Wirklichkeit sehr präzise zu fassen ...Es ergeben sich nur wenige fundamentale Differentialgleichungen, in denen alle Informationen über den Verlauf der Naturprozesse verschlüsselt sind ... Die Aufgabe der Mathematik ist es, diese Differentialgleichungen zu lösen, d.h. die in den Gleichungen enthaltenen Informationen zu entschlüsseln. Dann beherrscht man den Naturprozeß ...".
Wird hier nicht auf moderner Ebene die Eulersche Ansicht von einer mathematischen Ordnung der Welt wiederholt, die es zu verstehen gilt, um prinzipiell verfügbare Möglichkeiten der Verbeserung zu entdecken und zu entwickeln?
Während Euler Zusammenhänge zu erkennen trachtete und Erkenntnis in einfacher Weise nutzen wollte, so wie es in der industriellen Revolution des 19.Jahrhunderts dann in großem Umfange geschah, griff im 20. Jahrhundert der Glaube um sich, man könne Naturprozesse umfassend beherrschen. Ich halte diesen Glauben für irreführend und gefährlich. Natur ist derart komplex, daß sie nicht beherrschbar sein kann, auch nicht mit zukünftigen mathematischen Methoden. Unsere mathematischen Modelle, so faszinierend vielschichtig und leistungsstark sie auch immer sind, werden grundsätzlich immer nur Modelle für bestimmte Vorgänge und Zusammenhänge bleiben. Zu den Grundbausteinen der Modelle mit Differentialgleichungen gehören u.a. Proportionalitätsaussagen und Kompartimentansätze aus den jeweiligen Anwendungsbereichen. Dort, wo die Grundbausteine zutreffend formuliert sind, kann man ein gutes mathematisches Modell erwarten. Bei komplexeren Prozessen sind jeweils viele Varianten denkbar. Ich kann nicht glauben, daß *alle Informationen* in den fundamentalen Differentialgleichungen veschlüsselt sind. Ein mathematisches Modell macht außerdem nur Sinn, wenn es behandelbar, d.h. auswertbar ist. Das zwingt uns, obwohl wir ständig lernen, eine gewisse Bescheidenheit bei der Modellierung auf. Mir klingt die obige Auffassung zu einseitig und anmaßend. Die berechtigte Freude über relevante mathematische Modelle sollte nicht dazu verführen, von der *Beherrschung* der modellierten Entwicklung durch das Modell zu sprechen.

10 E. Zeidler, Geschäftsführender Direktor, im Oktober 1996 beim Eröffnungsfestakt des Leipziger Max-Planck-Instituts für Mathematik in den Naturwissenschaften.

Die meisten Mathematiker nach Euler waren den Anwendungen weit weniger zugetan und konzentrierten sich überwiegend auf rein innermathematische Fragestellungen, die zum Teil auch aus von Euler unbeachteten Problemen herrührten. Der Zwist zwischen der *Reinen* und der *Angewandten* Mathematik flammte auf. Inspirationen und Ideen aus Anwendungsproblemen zu schöpfen, wie Euler das in großem Umfang getan hat, könnte sich heute negativ auf eine Karriere in der Mathematik auswirken. Euler hätte es gegenwärtig wahrscheinlich erheblich schwerer. Der englische Zahlentheoretiker Godfrey H. Hardy (1877-1947) hat mit seinem Bekenntnis[11]
„I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world.“
zahlreiche Anhänger gefunden, die die absolute Autonomie der mathematischen Forschung einfordern. Als Rechtfertigung gegenüber der Gesellschaft dient die Tatsache, daß in der Vergangenheit immer wieder völlig unvermutet mathematische Ergebnisse praktisch nützlich wurden, und daß z.B. hinter etlichen Nobelpreisen in Physik, Chemie und Ökonomie eigentlich Mathematik steht.

Andererseits sieht sich die Mathematik aber auch als *Schlüsseltechnologie*. Hierzu ein typischer Text zur Beschreibung eines entsprechenden größeren Projektes:
„Angewandte Mathematik ist... selbst eine Schlüsseltechnologie im globalen Wettbewerb um Resourcen und Marktanteile: als Querschnitts- und Strukturwissenschaft besitzt sie ein besonders hohes Potential zum effektiven Einsatz... Aber nur, wer sich als fähig erweist, das innovative Potential der Angewandten Mathematik effektiv zur Entwicklung neuer Produkte und moderner gesellschaftlicher Strukturen zu nutzen, wird im Zeitalter der globalen Informationsgesellschaft auf Dauer erfolgreich konkurrieren können. Dies gilt für lokal operierende Firmen und politische Einheiten genauso wie für Global Players.“ [12]
Um einen solchen Anspruch auch nur im angemessenen Umfange einlösen zu können, sind zweifellos kontinuierliche Industriepartnerschaften etc. und eine langfristige, systematisch an Anwendungen orientierte mathematische

11 G. H. Hardy: A Mathematician's Apology. Cambridge, 1967.

12 P. Imkeller, J. Kramer und E. Warmuth: Das DFG-Forschungszentrum MATHEON. humboldt spectrum 3, 2006, S. 22.

Forschung vonnöten. Hier wird der inhärente Widerspruch der Mathematik wieder offensichtlich.

Mit Euler rechnen

Leonhard Euler „*rechnete wie andere atmen*“[13] schwärmt einer seiner Biographen. Hierzu muß erklärt werden, daß in der Mathematik nicht nur das elementare Umgehen mit Zahlen als Rechnen bezeichnet wird, sondern auch das Umgehen mit variablen Größen sowie das Ableiten, das Produzieren von Beweisketten, Abschätzungen usw., das Lösen von Gleichungen, das Modellieren und auch insgesamt die Anwendung der Infinitesimalrechnung.
Eulers Fleiß bezieht sich auf beide Abteilungen, das einfache Rechnen und das Umformen von mathematischen Objekten. Mehr noch, er hat beides auf höherer Stufe vereint
Leonhard Euler hat nicht nur als erster den Weg von der Lösung spezieller einzelner Differentialgleichungen hin zu einer *allgemeinen Theorie (linearer) Differentialgleichungen* gefunden, sondern er hat auch erstmalig *allgemeine numerische Methoden* zur approximativen Lösung von Differentialgleichungen, also numerische Integrationsmethoden oder Diskretisierungsmethoden erdacht und selbst ausgiebig eingesetzt.

„Wenden Sie das Verfahren von Euler an!“ oder kurz *„Rechnen Sie mit Euler!“* sind Aufforderungen, die heute auf der ganzen Welt an Studenten in Numerik-Kursen gerichtet werden. Vermutlich ist Euler af diese Weise am häufigsten gegenwärtig, unabhängig davon, ob gerade ein Jubiläum gefeiert wird oder nicht. Allerdings wird die Tatsache, daß Euler das erste numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen erfunden hat, selten gewürdigt. Zwar wird das Eulersche Polygonzugverfahren in den langen Listen von nach Euler benannten mathematischen Kreationen mit aufgezählt (z.B. bei Wikipedia), aber die damit verbundene Leistung Eulers wird innerhalb der Mathematik kaum angesprochen. Ganz offensichtlich haben bisher Mathematiker und Mathematik-Historiker andere Resultate Eulers im Blick gehabt.
Die Beiträge der Mathematik-Vertreter im Euler-Gedenkband[14] von 1957, in-

13 R. Thiele: Leonhard Euler. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1982, S. 110.
14 M.A. Lavrent'ev, A.P. Yushkevich, A.T. Grigor'yan (Hrsg.): Leonard Ehjler. Sbornik statej v chest' 250-letiya so dnya rozhdeniya, predstavlennykh akademii nauk SSSR. Izd. Akademii Nauk SSSR, Moskva 1958.

besondere auch der Artikel von Kurt Schröder zu Eulers Leistungen auf dem Gebiet der Anwendungen[15], enthalten zu unserem Thema nichts. Auch die 1982 eschienene Euler-Biographie von Rüdiger Thiele ignoriert das allererste Diskretisierungsverfahren und die damit verbundenen grundlegenden Aussagen für die numerische Mathematik. Selbst im Mathematischen Wörterbuch von 1984[16] fehlen die Stichwörter *Diskretisierung*, *Finitisierung* und *Eulersches Polygonzugverfahren*. Und unter *'Euler, Leonhard'* lesen wir u.a.:
„Trotz geringen Interesses an Existenzfragen und unbekümmerter Verwendung phantasievoller, jedoch nur heuristisch brauchbarer Methoden erzielt E. auf zahlreichen Fachgebieten außerordentliche formale und grundsätzliche Fortschritte...“
Es sieht also ganz so aus, als verhielten sich nun Mathematiker ihrerseits in bezug auf die Anfänge der Numerik der Differentialgleichungen kaum umsichtiger als Friedrich II. in bezug auf die dorischen Säulen, die Mathematik und Euler. Zu den Hintergründen für diesen Sachverhalt der mangelnden Rezeption gehört sicher, daß sich Mathematiker im 19. Jahrhundert stärker mit Fragen der Existenz von Lösungen mathematischer Gleichungen und sehr viel weniger als Euler mit Anwendungsrechnungen befaßt haben. Das Interesse an numerischen Integrationsmethoden nahm erst sehr viel später, in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts, im Zusammenhang mit dem Aufkommen geeigneter Rechentechnik wesentlich zu. Lothar Collatz, der als Vater der Numerischen Mathematik in Deutschland angesehen wird, hat noch 1951 in einem Buch über die numerische Behandlung von Differentialgleichungen[17] bemerkt, daß nach seiner Erfahrung graduierte Mathematiker und Physiker zwar mit rein theoretischen Resultaten wohlvertraut wären, aber nichts über einfachste praktikable Approximationsmethoden wüßten.

Außerhalb der Mathematik, in der Astronomie, wo traditionell aufwendiger gerechnet wurde, war man umsichtiger. Der Astronom Mikhail F. Subbotin (1893-1966) diskutiert in einem Aufsatz über die astronomischen Arbeiten

15 ebenda, S. 20-33.
16 J. Naas, H.L. Schmid (Hrsg.): Mathematisches Wörterbuch.3.Auflage. Akademie-Verlag Berlin B.G.Teubner Stuttgart, 1984.
17 L. Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1951.

Leonhard Eulers[18] dessen Verdienste in der Modellierung und würdigt in einem extra Abschnitt ausführlich auch die numerischen Integrationsverfahren. Subbotin stellt fest, daß einige der Ideen Eulers ihrer Zeit so weit voraus waren, daß sie zunächst nicht aufgegriffen und in der Folge grundlegend (osnovatel'no) vergessen wurden. Erst in der heutigen Zeit, im Zusammenhang mit der Entwicklung der Rechentechnik, komme die Wissenschaft von neuem bei den schon von Euler so klar formulierten Gedanken an.
Das trifft auf Eulers Ideen zur Diskretisierung, zur numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zu.

Erwähnenswert in bezug auf das hier interessierende Eulersche Verdienst ist der Aspekt, daß andere, traditionell hochgeschätzte mathematische Ergebnisse Eulers, wie insbesondere auch die eingangs erwähnte berühmte *Eulersche Formel*, sich im Rahmen einer intensiven innermathematischen Diskussion herauskristallisieren konnten. Es gab Vorarbeiten anderer Mathematiker, Vorläufer dieser Formel, auf die sich Euler, der umsichtig und wißbegierig die Arbeiten anderer verfolgt hat, natürlich auch stützen konnte.
Der Ursprung des numerischen Integrationsverfahrens scheint dagegen ganz bei Euler selbst zu liegen. Wie schon erwähnt, hat er wie kein anderer unter den Wissenschaftlern seines Jahrhunderts durch Modellierung konkreter dynamischer Vorgänge nebst aufwendiger Rechnungen, u.a. in Mechanik und Astronomie, die Theorie der Differentialgleichungen wesentlich geprägt, sie zugleich unermüdlich in diese Anwendungsgebiete hineingetragen und wahrscheinlich hierbei das Bedürfnis nach einer praktischen Approximationsmethode für sich selbst entwickelt.
Man kann einwenden, es sei keine besondere Leistung, eine Funktion lokal durch ihre Tangente zu approximieren, darauf reduziere sich schließlich die Euler-Methode. Zunächst, in Eulers numerischer Integration verbirgt sich weit mehr als nur dieser einfache Approximationsgedanke, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden. Bedenkt man dazu, daß der Funktionsbegriff selbst damals erst im Entstehen war und gerade Euler zu seiner Formierung wesentlich beigetragen hat[19], daß es damals geradezu kühn war, stückweise

18 M.A. Lavrent'ev, A.P. Yushkevich, A.T. Grigor'yan (Hrsg.): Leonard Ehjler. Sbornik statej v chest' 250-letiya so dnya rozhdeniya, predstavlennykh akademii nauk SSSR. Izd. Akademii Nauk SSSR, Moskva 1958, S. 268-374.

19 Vgl. hierzu etwa: R. Thiele: Leonhard Euler, 15.April 1707-18.September 1783. Zur Erinnerung an seinen 300. Geburtstag. MDMV 15, 2007,S. 93-103.

zusammengesetzte Funktionen zu denken, so verwandelt sich der Einwand bald in tiefen Respekt.

Eulersche Polygonzüge: Eine dorische Säule in der Mathematik

Worum geht es genauer? In Eulers 1768 publiziertem Lehrbuch *Institutionum calculi integralis volumen primum*[20] trägt CAPUT VII die bemerkenswerte Überschrift

DE
INTEGRATIONE AEQUATIONUM DIFFERENTIALIUM PER APPROXIMATIONEM.

Darin soll im *Problem Nr. 85* zu gegebener Differentialgleichung ein Integral, d.h. eine Lösung, nahe approximiert werden. Wir folgen weitgehend der Problemlösung nebst Notation, wie sie Euler entwickelt hat.
Zur Differentialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = V$, mit der ein Vektorfeld beschreibenden Funktion $V(x, y)$, soll für diejenige Lösung, die durch die Position $x = a, y = b$ läuft, der zu $x = a + \omega$ gehörende y-Wert bestimmt bzw. approximiert werden. Die Funktion V liefert zu jedem Punkt (x, y) den Anstieg der Tangente der Lösungsfunktion, die durch diesen Punkt läuft. Speziell für den Punkt (a, b) ist das $A = V(a, b)$, also $\frac{\partial y}{\partial x} \mid_{(a,b)} = A$. Es liegt nun nahe, die Lösung durch ihre Tangente zu approximieren, also durch die Funktion $y = b + A(x - a)$, was für die Stelle $x = a + \omega$ auf $y = b + A\omega$ führt. Anschließend werden a, b und $A = V(a, b)$ durch $a' = a + \omega,\ b' = b + A(a' - a),\ A' = V(a', b')$ ersetzt, und es wird ein neuer, analoger Schritt ausgeführt. Dies wird sukzessive wiederholt bis das Intervall $[a, T]$, auf dem man die Lösung finden möchte, ausgeschöpft ist.
Diese Methode ist klar im Ansatz und extrem einfach in der Realisierung, sie ist allerdings recht ungenau und im Ganzen sehr aufwendig. Diese Methode trägt heute den Namen Euler-Methode, genauer *Explizite Euler-Methode*. Zuweilen wird sie noch heute in Simulationsprogrammen benützt, z.B. sind Fußball-Roboter-Hunde mit dieser Methode programmiert, durchaus mit Erfolg.

---

20 E342-Institutionum calculi integralis volumen primum in quo methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus pertractatur. Auctore Leonhardo Eulero acad. scient. Borussiae directore vicennali et socio acad. Petrop. Parisin, et London. Petropoli impensis academiae imperialis scientiarum 1768.

Als *Problem Nr. 86* stellt Euler die Aufgabe, genauere Näherungen als die obigen zu bestimmen. Er hatte offensichtlich ausreichend praktische Erfahrung gesammelt, insbesondere bei der Berechnung von Planeten- und Mondbewegungen, um die Unzulänglichkeit seiner ersten Methode zu erkennen und nach Verbesserung zu streben. Euler wählt nun statt des aus der Tangente resultierenden Ansatzes

$$y = b + A\omega$$

eine Näherung der Form

$$y = b + A\omega + \frac{1}{2}B\omega^2 + \frac{1}{6}C\omega^3 + \frac{1}{24}D\omega^4 + \frac{1}{120}E\omega^5 + etc.,$$

d.h. einen Taylor-Summen-Ansatz mit mehr als zwei Summanden. Es wird wie vorhin $\frac{\partial y}{\partial x} = A = V(a,b)$ gesetzt. Die übrigen Koeffizienten B, C, D, E werden durch Differentiation aus V bestimmt, in Eulers Notation als $\frac{\partial\partial y}{\partial x^2} = B = (\frac{\partial V}{\partial x}) + V(\frac{\partial y}{\partial x})$ usw. Diese Methode ist heute übrigens nicht nach Euler benannt, sie heißt Taylor-Reihen-Methode[21]. Wie in seinen Abhandlungen üblich, vertieft Euler die Angelegenheit anhand ausführlicher konkreter Beispiele, hier u.a. der sogenannten Riccati-Differentialgleichung $\partial y = \partial x(xx + yy)$, für die er die folgenden Koeffizienten errechnet:

$$\begin{aligned} A &= aa + bb, \\ B &= 2a + 2aab + 2b^3, \\ C &= 2 + 4ab + 2a^4 + 8aabb + 6b^4, \\ D &= 4b + 12a^3 + 20abb + 16a^4b + 40aab^3 + 24b^5, \\ E &= 40a^2 + 24b^2 + 104a^3b + 120ab^3 + 16a^6 + 136a^4b^2 \\ &\qquad + 240a^2b^4 + 120b^6. \end{aligned}$$

Bereits 1763, noch vor der Veröffentlichung dieses Lehrbuches, hat Euler seine neue Methode u.a. anhand von Berechnungen zum himmlischen Drei-Körper-Problem im Rahmen astronomischer Arbeiten eingeführt[22] (siehe auch

21 E. Hairer, G. Wanner: Analysis by Its History. Springer-Verlag New York, Inc. 1996, S. 155.

22 Nouvelle méthode dé determiner les dérangements dans le mouvement des corps célestes causés par ler action mutuelle. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 19,(1763) 1770, S. 141-179.

[23]) und sich dabei schon mit der Fehleranalyse der numerischen Integration befaßt. Euler führt aus, daß, je größer das durch ω gegebene Intervall eines Schrittes ist, umso schlechter konvergieren die erhaltenen Reihen, und umso mehr Summanden sind für eine vorgegebene Genauigkeit nötig. Verwendet man für die Approximation den obigen Ansatz mit k Summanden, so ergibt sich nach Euler ein Fehler der Größe $\lambda\omega^k$. Euler macht darauf aufmerksam, daß es keinen Nutzen bringt, ω kleiner zu wählen als so, daß das Produkt $\lambda\omega^k$ gerade die erforderliche Genauigkeit ausmacht. Ansonsten würde man nur vergeblich viel rechnen.
Hinter diesen Gedanken steht die damals übliche, aber unzutreffende Annahme, eine jede Funktion könne in eine Taylor-Reihe entwickelt werden. Jedoch wird dies hier nicht wirklich gebraucht, da nur mit endlichen Summen gearbeitet wird.
Um ausgehend von $x = a$ das Ende des Intervalls $[a, T]$ zu erreichen, hat man $n = (T - a)/\omega$ Schritte zu realisieren, von denen ein jeder mit einem gewissen neuen lokalen Fehler verbunden ist. Wählt man ω kleiner, so muß die Anzahl n der Schritte größer werden, d.h. man ist mit einer größeren Anzahl von lokalen Fehlern konfrontiert. Es ergibt sich die Frage, ob das Ganze sinnvoll ist, oder ob die Fehler sich so stark aufsummieren, daß das Gesamtergebnis unbrauchbar wird. Euler kalkuliert, daß, bei der Rechnung mit dem obigen Ansatz mit $k \geq 2$ Summanden, ein Gesamtfehler der Größe $n\omega^k\lambda = \omega^{k-1}(T - a)\lambda$ zustande kommt. Die einzelnen lokalen Fehler akkumulieren sich also nur moderat, und man kann den Gesamtfehler so klein halten, wie man möchte, indem man ω entsprechend klein wählt. Es ist klar, daß bei glatten Lösungen die Schrittweite ω umso größer bleiben darf, je größer k ist.

Auch heute noch bestehen Diskretisierungsverfahren für Differentialgleichungen in den Grundkomponenten Intervall- bzw. Gebietszerlegung, lokaler und globaler Fehler. Wie seinerzeit Leonhard Euler, allerdings mit wesentlich verbessertem Kalkül, richtet man die Sache so ein, daß bei möglichst geringem Rechenaufwand die erforderlichen Toleranzen eingehalten werden.

Euler war sich dessen bewußt, daß er etwas ganz Neuartiges entwickelt

23 M.A. Lavrent'ev, A.P. Yushkevich, A.T. Grigor'yan (Hrsg.): Leonard Ehjler. Sbornik statej v chest' 250-letiya so dnya rozhdeniya, predstavlennykh akademii nauk SSSR. Izd. Akademii Nauk SSSR, Moskva 1958, S. 350-357.

hatte. Er versuchte, für seine neue numerische Lösungsmethode zu werben. Er argumentierte u.a., daß sie auch in solchen Fällen nützlich ist, wenn Lösungsformeln zwar gefunden werden können, diese aber zu kompliziert sind, um praktisch verwertbar zu sein. Es ist erstaunlich, daß Euler dies alles schon wußte. Seine Argumente sind im Grunde noch heute gültig. Allein, sie wurden für lange Zeit vergessen.
Es dauerte etwa 120 Jahre, bis J.C. Adams und F. Bashforth 1883 als nächsten Schritt ihre Mehrschrittverfahren[24] offerierten. Um 1900 konstruierten dann C. Runge und W. Kutta sogenannte Einschrittverfahren mit Zwischenschritten, die ersten Runge-Kutta-Verfahren[25]. Man begann sich langsam etwas mehr für das numerische Lösen von Differentialgleichungen zu interessieren.
Aber erst ca 200 Jahre nach Eulers ersten Arbeiten setzte eine intensive und auch extensive Entwicklung der Numerik von Differentialgleichungen ein, nicht unabhängig von der Entwicklung elektronischer Rechenmaschinen[26] und industriellen Anforderungen, stimuliert insbesondere durch eine 1963 erschienene, tiefergehende theoretische Analyse von Germund Dahlquist[27], die u.a. die Bedeutung sogenannter *impliziter* Verfahren begründete. Die *Implizite Euler-Methode*, nach der y aus der impliziten Vorschrift

$$y = b + \omega V(a, y)$$

bestimmt werden muß, hat ihre explizite Schwester inzwischen weitgehend verdrängt, denn man kann mit impliziten Methoden das qualitative Stabilitätsverhalten von Lösungen erheblich besser widerspiegeln. Aber das sind Dinge, von denen Euler wahrlich noch nichts wissen konnte.

In der Mathematik ist die Meinung überliefert, Euler hätte sich keine Gedanken um eine Fehleranalyse gemacht, und erst Augustin L. Cauchy hät-

24 F. Bashforth: An attempt to test the theories of capillary action by comparing the theoretical and measured forms of drops of fluid. With an explanation of the method of integration employed in constructing the tables which give the theoretical form of such drops, by J.C. Adams. Cambridge Univ. Press, 1883.

25 C. Runge: Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. Mathematische Annalen, Band 46, 1895,S. 167-178.

26 Hierzu sei daran erinnert, daß die ersten elektronischen Rechner primär zum numerischen Lösen von Differentialgleichungungen gebaut wurden. Die berühmte ENIAC von 1945 trägt es im Namen: Electronic Numerical Integrator and Computer.

27 G. Dahlquist: A special stability problem for linear multistep methods. BIT, Band 3, 1963,S. 27-43.

te 1824 die Eulersche Polygonzugmethode durch einen Konvergenzbeweis mathematisch sauber begründet. Das ist eine klare Fehleinschätzung. Sicher, Cauchy hat die Existenz von Lösungen und, damit verbunden, die gleichmäßige Konvergenz der Polygonzüge bewiesen. Aber Euler hat sich mit vorhandenen Lösungen beschäftigt, diese approximiert und die entstandenen Fehler analysiert, was etwas ganz anderes ist.

Euler hatte fast ausschließlich mit skalaren Differentialgleichungen zu tun. Heute werden schwierige Mehrskalenprobleme und riesige Systeme mit Millionen von Gleichungen mittels ausgefeilter akademischer und industrieller Software numerisch gelöst. Auf der Tagesordnung stehen komplexe Systeme von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Auch stochastische Einflüsse spielen eine Rolle. Natürlich besitzen wir inzwischen unvergleichlich effizientere Methoden als das explizite Euler-Verfahren. Es gibt automatische Steuermechanismen, Fehleranalysen, die adaptive Bestimmung von Zerlegungen, Schrittweiten ω und Verfahrensordnungen k. Immer wieder kommt Neues hinzu, um Herausforderungen der Schaltungssimulation, der Mechatronik, der Simulation chemischer und biophysikalischer Prozesse, der Klimaforschung, der Materialforschung, der Medizintechnik usw. zu bewältigen. Hier wird Mathematik tatsächlich auch als Bestandteil von Schlüsseltechnologien entwickelt.

Vereinfacht funktioniert es aber so, wie Leonhard Euler es mit seiner neuen Methode erdacht und erprobt hatte. Seine klaren, eindrucksvollen Vorarbeiten, die so lange Zeit unbeachtet geblieben sind, stellen somit die Grundlage für diese modernen Entwicklungen dar. Es handelt sich also um eine wahre dorische Säule in der Mathematik.