Leibniz-Sozietät/Sitzungsberichte *61(2003)5, 95–98*

Fritz Gackstatter

Separation von Raum und Zeit beim eingeschränkten Dreikörperproblem mit Anwendungen bei den Resonanzphänomenen in Saturnring und Planetoidengürtel

§ l. Das Problem mit dem Resonanzbruch 3/7 in der Stabilitätstheorie

Das 3/7-Problem tritt in der Arbeit [l, 1955] von J. Moser auf. Im klassischen Werk „Lectures on Celestial Mechanics“ von C. L. Siegel und J. Moser [2, 1971] wird es in Mosers Anhang auf S. 249 beschrieben:

„For most of the observed asteroids the ratios of their frequencies ν_3 to that of Jupiter satisfy

(1) $\frac{1}{4} \leq \frac{\nu_1}{\nu_3} \leq \frac{1}{2}$.

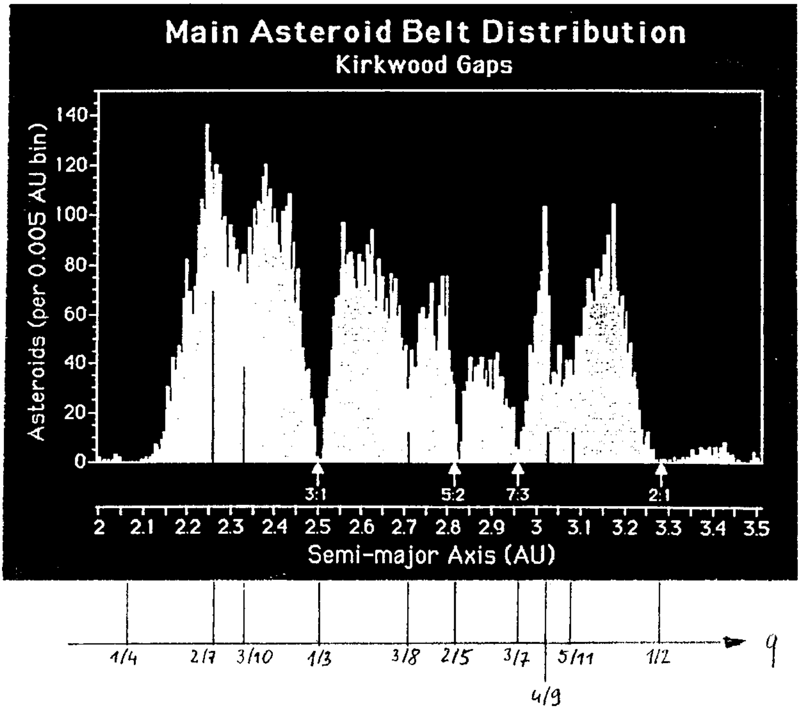
In this interval the values of ν_1/ν_3 that violate our criterion are 1/4, 2/5, 1/3, 1/2, and these are the values for which the asteroids are particularly sparse. Actually, for $\nu_1/\nu_3 = 3/7$ one finds a less pronounced gap which, however, corresponds to a stable periodic orbit. These gaps in the distribution of asteroids, which were observed as early as 1866 by Kirkwood, seem therefore to be due to an instability caused by Jupiter, if we ignore the exceptional value 3/7. Of course, this interpretation is only of a qualitative nature and does not allow any prediction about the width of the gaps, nor have we checked whether the mass parameter μ is small enough. However, the criterion does provide the correct frequency ratios for the most pronounced gaps.“

In [3, 1996] gibt J. Moser einen Überblick über die neueren Entwicklungslinien in der Himmelsmechanik. In den 80er Jahren sind vor allem numerische Untersuchungen zu den Resonanzproblemen angestellt worden:

„Zudem muß man betonen, daß es sich hier um numerische Experimente handelt und eine analytische Theorie noch nicht entwickelt ist.“

§ 2. Das Verteilungsdiagramm zum Planetoidengürtel

Bei Webmaster [4, 1999] findet man ein Verteilungsdiagramm für die zum Intervall (1) gehörigen Planetoiden (Bild 1):



§ 3. Resonanzphänomene und eingeschränktes Dreikörperproblem

Zum Studium der Resonanzphänomene in Planetoidengürtel und Saturnsystem werden die Methoden des eingeschränkten Dreikörperproblems benutzt: Im ersten Fall übernehmen Sonne und Jupiter die Rolle der beiden endlichen Massen, sie leiten die Bahn des Planetoiden, der mit vernachlässigbar kleiner Masse angesetzt wird. Im zweiten Fall leiten Saturn und Mimas die Bahn des Teilchens im Ring. Die Co-Resonanzen mit Enceladus, Tethys und Dione werden auf der ersten Näherungsstufe außer Acht gelassen.

§ 4. Eingeschränktes Dreikörperproblem und Keplersche Gesetze

Die nächste Fragestellung ist einfach zu skizzieren:

$$
\begin{array}{ccl}
Kepler\ I,\ II,\ III & \leftrightarrow & Keplerproblem \\
 & & der\ Newtonschen\ Gravitationstheorie \\
 & & \qquad\qquad \downarrow \\
 & & Verallgemeinerungen: \\
? & \leftarrow & das\ 3\text{–}\ und\ n\text{–}Körperproblem, \\
 & & insbesondere \\
 & & das\ eingeschränkte\ 3\text{–}Körperproblem
\end{array}
$$

Überraschenderweise hilft die Differentialgeometrie bei der Behandlung der unteren Umkehrfrage.

§ 5. Das I. Keplersche Gesetz und die Schwingungsgleichung für das eingeschränkte Dreikörperproblem

Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen – Keplers erstes Gesetz ist eine Aussage über die Ortskoordinaten, die Zeit t ist eliminiert. Erst das zweite Keplersche Gesetz nimmt die Zeit auf. Raum und Zeit sind separiert.

Die einfachste explizite Bahnformel für das erste Keplersche Gesetz erhält man, wenn man das Inertialsystern auf Polarkoordinaten mit reziprokem Radius $(\rho = 1/r, \varphi)$ und mit der Sonne im Zentrum bezieht:

$$(I_1^K) \qquad \rho = \frac{1}{p}\{1 + e\cos(\varphi - \varphi_o)\}.$$

Nicht weit entfernt davon ist die Formulierung als Schwingungsgleichung:

$$(I_2^K) \qquad \rho'' + \rho = \frac{1}{p}.$$

Beim eingeschränkten Dreikörperproblem sind nur wenige explizite Bahnen für den dritten Körper bekannt, darum muß man zufrieden sein, wenn man das Gegenstück zu (I_2^K) finden kann. Die Schwingungsgleichung für das eingeschränkte Dreikörperproblem lautet:

$$(I_2) \qquad \rho'' + \rho = \left(\frac{E_\rho}{2} - \frac{\rho'}{\rho^2}\frac{E_\varphi}{2}\right)\frac{\rho^2 + \rho'^2}{E} - 2\,\frac{\sqrt{1 + \frac{\rho'^2}{\rho^2}}^{\,3}}{\sqrt{E}}.$$

Es ist $E = 2\Omega - C$ mit dem Potential Ω und der Jacobischen Konstanten C. Formel (I_2) wird in [5] hergeleitet.

§ 6. Separation von Raum und Zeit und das Problem der kleinen Divisoren

Der Aufforderung Mosers folgend wird in [5] eine differentialgeometrisch-analytische Theorie zum Studium der Himmelsmechanik entwickelt, die auch bei den Resonanzproblemen angewandt werden kann. Eine wesentliche Rolle spielt die statische Gleichung (I_2), Raum und Zeit sind separiert. Mit der Zeit t wird auch das bei den Resonanzfällen auftretende Problem der kleinen Divisoren eliminiert. Der Resonanzbruch 3/7 und die folgenden Brüche im Verteilungsdiagramm spielen keine Ausnahmerolle mehr.

§ 7. Literatur

[l] J. Moser: Stabilitätsverhalten kanonischer Differentialgleichungssysteme. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1955, 87–120.

[2] C. L. Siegel und J. Moser: Lectures on Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.

[3] J. Moser: Ist das Sonnensystem stabil? DMV Mitteilungen 4, 1996, 17–28.

[4] webmaster@ssd.jpl.nasa.gov , 1999.

[5] F. Gackstatter: Separation of the Restricted 3-Body Problem in Kepler's Sense with Applications to Moon Theory, Resonance Phenomena and Gravitational Waves. In Vorbereitung.