Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät *94(2008), 57–65*

Fritz Gackstatter

Eulers Beiträge zu Variationsrechnung und Himmelsmechanik

Leonhard Euler (1707–1783) ist von seinen Zeitgenossen als *Mathematicus acutissimus* geehrt worden. Der Schweizer Gelehrte ist einer der führenden Mathematiker des 18. Jahrhunderts. Seine Beiträge zu Astronomie und Physik weisen ein breites Spektrum auf. In den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1755, in denen Euler seine Gleichungen für die Hydrodynamik entwickelt, lernen wir ein Grundprinzip seiner Arbeitsweise kennen: „Es sind zwar die Untersuchungen über Flüssigkeiten, die wir den Herren Bernoulli, Clairaut und d'Alembert verdanken, äußerst scharfsinnig, doch folgen ihre Ergebnisse auf solch natürliche Weise aus unseren zwei allgemeinen Formeln, dass man nicht umhin kann, die Übereinstimmung zu bewundern, die zwischen ihren tiefgründigen Überlegungen und der Einfachheit meiner Prinzipien besteht, aus denen sich meine zwei Gleichungen ergeben. Und diese Prinzipien erhalte ich durch unmittelbare Anwendung der grundlegenden Axiome der Mechanik." Auf der Suche nach der Einheit der Physik kann Eulers Methode Vorbild sein.

Im Jahre 1744 konstruiert Euler die erste Minimalfläche, die Kettenfläche, seit Plateau auch Katenoid genannt. 1767 findet Euler die erste exakte Lösung zum Dreikörperproblem. Wir suchen nun das einfache und gemeinsame Prinzip hinter diesen beiden – im Zeitalter der Spezialisten weit auseinender liegenden – Entdeckungen. Eulers Beiträge zu Variations-Rechnung und Himmelsmechanik müssen studiert werden.

§ 1. Die Differentialgleichungen von Euler und Lagrange

Nach Leibniz ist unsere Welt die bestmögliche aller Welten, und daher lassen sich die Naturgesetze durch Extremalprinzipien beschreiben.

Wir betrachten nun folgende Aufgabe der Variationsrechnung: Man bestimme Funktionen $x_k = x_k(t)$, so dass das Integral

(1) $$I = \int_{t_1}^{t_2} h(x, \dot{x}, t)\,dt$$

zum Extremum wird. Auf dem üblichen Weg, der besonders schön in C.L. Siegels *Himmels-Mechanik* erklärt wird, finden wir zu den DGLn von Euler und Lagrange, nämlich

(EL) $$\frac{\partial h}{\partial x_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial h}{\partial \dot{x}_k}\right) = 0\,.$$

Wichtige Naturgesetze folgen auf natürliche Weise aus diesen Extremalgleichungen. Dazu einige Beispiele.

Die Geodätischen

Durch Einsetzen der metrischen Funktion $h = \sqrt{g_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}$ in (EL) erhält man das DGL-System der Geodätischen

(2) $$\frac{d^2u^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{d\tau}\frac{du^\gamma}{d\tau} = 0\,.$$

Mit diesen DGLn 2. Ordnung kann man die Kürzesten auf Flächen im R^3 berechnen, oder allgemeiner, die Kürzesten in n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Bei den 4-dimensionalen Lorentzschen Mannigfaltigkeiten der Relativitätstheorie beschreiben die Bewegungsgleichungen (2) die Bahnen der Planeten und die Lichtbahnen (Nullgeodätische).

Bei konkreten Rechnungen setzt man zweckmäßig $T = \frac{1}{2}h^2$ in (EL) ein. Die Einstein-Schwarzschild-Geometrie erhält man beispielsweise mit

$$T = \frac{1}{2}\left(-\left(1-\frac{2M}{r}\right)c^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}{1-\frac{2M}{r}} + r^2\left(\frac{d\vartheta}{d\tau}\right)^2 + r^2\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2\right),$$

sie beschreibt die Periheldrehung des Planeten Merkur und die Lichtablenkung an der Sonne.

Himmelsmechanik

Durch Einsetzen von $h = \sum_{k=1}^{n} \dot{x}_k y_k - E(x, y, t)$ in (EL) erhält man die Hamiltonschen DGLn

$$(3) \qquad \dot{x}_k = E_{y_k}, \; \dot{y}_k = -E_{x_k},$$

und die DGLn der Himmelsmechanik treten auf, wenn wir $E = T - U$ wählen.

In den Berliner Memoiren vom Jahre 1752 findet man eine Arbeit Eulers mit dem Titel *Die Entdeckung eines neuen Prinzips der Mechanik.* Das neue Prinzip, von dem hier die Rede ist, ist genau das, was wir heute als Newtonsche Bewegungsgleichungen bezeichnen. In Newtons *Principia* werden die Bewegungsgleichungen nicht in der allgemeinen analytischen Form, sondern lediglich für den Fall eines einzelnen Körpers verbal dargestellt.

Minimalflächen

Nun betrachten wir eine 2-dimensionale Aufgabe der Variationsrechnung: Man bestimme eine Fläche $z = z(x, y)$, so dass das Integral über das Flächenelement

$$(4) \qquad I = \iint_U \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$$

zum Minimum wird. Als Ergebnis erhält man die Minimalflächengleichung

$$(5) \qquad (1 + z_y^2) z_{xx} - 2 z_x z_y z_{xy} + (1 + z_x^2) z_{yy} = 0 .$$

Ein einfaches Prinzip führt zu Minimalflächentheorie und Himmelsmechanik.

Zusammenfassung: Mit den Variationsgleichungen von Euler und Lagrange finden wir Naturgesetze zur Beschreibung unserer Welt – der bestmöglichen aller Welten.

§ 2. Historische Bemerkungen

Leonhard Euler (1707–1783) hat nach seiner Basler Zeit drei Schaffensperioden durchlaufen:

1727–1741 die erste Petersburger Periode,
1741–1766 die Berliner Periode,
1766–1783 die zweite Petersburger Periode.

Zu den DGLn von Euler und Lagrange

Eulers Hauptwerk zur Variationsrechnung erscheint 1744 und trägt den Titel *Methodus inveniendi*. Der Briefwechsel zwischen Euler und Lagrange (1736–1813) beginnt 1754. In einem Brief vom 12. August 1755 beschreibt Lagrange, mit welchem Eifer er Eulers Werk studiert habe *(„meditanti mihi assidue praeclarissimum librum tuum“),* und teilt Euler sodann die Hauptergebnisse seiner eigenen neuen Methode mit. Lagranges Arbeit *Nouvelle methode* wird 1762 in Turin veröffentlicht. Euler legt das Fundament zur Variationsrechnung, sein „Schüler“ Lagrange führt die Entwicklung weiter. Im Titel der Arbeit *Elementa calculi variationem*, die Euler 1760 der Petersburger Akademie vorlegt, erscheint erstmals der Terminus *Variationsrechnung*.

1744 konstruiert Euler die erste Minimalfläche, das Katenoid,
1767 findet Euler die erste exakte Lösung zum Dreikörperproblem

Im zweiten Teil des Vortrages werden nun folgende Themenkreise weiter besprochen: die Theorie der Minimalflächen, das Dreikörperproblem und die Mondtheorie. Nach § 1 haben diese verschiedenen Gebiete in der Variationsrechnung einen gemeinsamen Überbau.

§ 3. Minimalflächen und Topologie

Eulers Katenoid findet man als *Exemplum V* im oben genannten Werk *Methodus inveniendi,* die Überschrift lautet: „Inter omnes curvas az aequales areas aAZz continentes determinare eam, quae circa axem AZ rotata generet solidum minimae superficiei“.

Die nächste Minimalfläche wird erst 1776 entdeckt, Meusnier findet die Wendelfläche, auch Helikoid genannt. Jacobis Bemerkung, „es ist immer ein Fortschritt, wenn man den Beispielen Eulers ein wirklich neues hinzuzufügen weiß“, bestätigt sich. In der Zwischenzeit sind viele Minimalflächen konstruiert worden, eine Sammlung klassischer Minimalflächen findet man im Internet unter http://www.ugr.es/~fmartin/dibujos-clasicos.htm.

F. Martin aus Granada hat Computergraphiken zu folgender Liste geschaffen:

1744 L. Euler: Katenoid,
1776 J.B.M.C. Meusnier: Helikoid,
1831–1835 H.F. Scherk: die 5 Scherkschen Flächen,
1860 B. Riemann: eine einfachperiodische Fläche,
1863 A. Enneper: die Ennepersche Fläche,
1864 H.A. Schwarz: doppeltperiodische Labyrinthflächen,
1980 C.C. Chen, F. Gackstatter: Flächen vom Enneperschen Typ mit p = 1 und p = 2,
1982 Costa: eine eingebettete Fläche mit p = 1,
1993 D. Hoffman, H. Karcher, F. Wei: eine Fläche vom Typ des Helikoids mit p = 1.

Bei den ab 1980 durchgeführten Konstruktionen kommt ein weiteres von Euler begründetes Gebiet der Mathematik zur Anwendung, die Topologie. Das Geschlecht p einer Fläche und die Euler-Charakteristik $\chi = e - k + f$ sind vergleichbare topologische Größen, es gilt $\chi = 2 - 2p - N$, wobei mit N die Anzahl der Randkomponenten eingeht. Mit seinen Studien zum Königsberger Brückenproblem legt Euler den Grundstein zu Topologie und Graphen-Theorie. Zu zitieren ist die in den Comm. Acad. Petropoltanae im Jahre 1736 veröffentlichte Arbeit *Solutio problematis ad geometriam situs perteniensis*.

In seinem Werk *Nouvelle methode* leitet Lagrange eine Vorstufe zur Minimalflächen-gleichung (5) her. Euler und Lagrange legen das Fundament zur Theorie der Minimalflächen. Johannes C.C. Nitsche hat in seinen Büchern über Minimalflächen die historischen Zusammenhänge wunderbar geschildert. Empfehlenswert ist auch Nitsches Beitrag zum Sammelband *Mathematik in Berlin,* herausgegeben von H. Begehr aus Anlass der 750-Jahr-Feier Berlins und erschienen 1997 im Weidler Buchverlag Berlin.

§ 4. Das Dreikörperproblem

Das Dreikörperproblem ist das berühmteste Problem der Dynamik. Es lässt sich folgendermaßen aussprechen: Drei Massenpunkte ziehen einander nach dem Newtonschen Gesetz an; sie können sich im Raum frei bewegen und sollen ursprünglich in einem beliebigen Bewegungszustand sein. Ihre weitere Bewegung ist zu ermitteln.

Mit der Veröffentlichung von Newtons *Principia* im Jahre 1687 beginnen die Studien zur Dreikörperbewegung, die Großen der Naturwissenschaft beteiligen sich, die Möglichkeiten der neu geschaffenen Analysis kommen zum Tragen.

Im Jahre 1767 findet Euler die erste exakte Lösung für den Fall, dass die drei Massenpunkte sich auf einer festen Geraden bewegen: *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium*, Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropoltanae 11. Euler wählt den Ansatz $x_k(t) = x_k(0) \cdot q(t)$ und zeigt, dass die Newtonschen Bewegungsgleichungen erfüllt werden, wenn das Abstandsverhältnis der drei Massenpunkte einer algebraischen Gleichung 5. Grades genügt und die Abstandsfunktion q eine gewöhnliche DGL erfüllt, die in geschlossener Form lösbar ist. Grundidee bei Eulers Lösungsansatz ist die *Separation von Raum und Zeit*. Im Falle des Zusammenstoßes der Massen entsteht eine Bewegungssingularität im Schwerpunkt, die durch eine Zeittransformation behoben werden kann. Das erste Beispiel zur Regularisierungs-theorie liegt vor.

Im Jahre 1772 teilen sich Euler und Lagrange einen Preis der Pariser Akademie. Euler erhält seinen Anteil für die *Zweite Mondtheorie*, in der das eingeschränkte Dreikörperproblem formuliert und das rotierende oder synodische Koordinatensystem eingeführt wird. Lagrange bestimmt in seiner Preisarbeit die Gleichgewichtslösungen im rotierenden System und findet so seine 5 Librationspunkte, nämlich die kollinearen Punkte L_1 bis L_3 und die Dreiecks-Punkte L_4 und L_5. Die Lage der drei kollinearen Punkte wird wieder wie bei Euler durch eine algebraische Gleichung 5. Grades festgelegt. Lagrange meinte, die von ihm gefundenen Lösungen seien ohne astronomische Bedeutung. Doch hat sich in neuerer Zeit herausgestellt, dass die kleinen Planeten der Trojaner-Gruppe Librationsbewegungen um die Dreieckspunkte zu Sonne und Jupiter ausführen. Der 1990 entdeckte Planetoid (5261) Eureka ist der erste Marstrojaner.

Wie schon bei den Minimalflächen ist wieder ein Zusammenwirken der beiden Großen zu erkennen, Euler und Lagrange liefern grundlegende Beiträge zur Dreikörperanalysis.

§ 5. Mondtheorie

Eulers Arbeiten zur Astronomie weisen ein breites Spektrum auf, wir beschränken uns vorerst auf die beiden Hauptwerke zur Mondtheorie:

Erste Mondtheorie: Theoria motus lunae (1753),
Zweite Mondtheorie: Theoria motuum lunae (1772).

Das zweite Werk wurde bereits im Zusammenhang mit dem Dreikörperproblem besprochen. Auslöser zur ersten Mondtheorie war das Apsidenproblem beim Erdmond. Benutzt man, wie viele ältere Autoren, die Newtonsche

Theorie auf der ersten Näherungsstufe, dann erhält man für die Umlaufszeit des Perigäums den theoretischen Wert 17,8 Jahre, also rund doppelt so viel wie die beobachtete Dauer von 8,85 Jahren. Clairaut konnte durch zusätzliche Berücksichtigung der beiden Hauptungleichheiten der Mondbewegung, Variation und Evektion, die Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis erklären. Für diese Leistung erhielt er 1752 auf Eulers Empfehlung den Preis der Petersburger Akademie. Euler war aber mit Clairauts Vorgehensweise nicht ganz zufrieden und entwickelte daraufhin seine erste Mondtheorie, in welcher er eine grundlegende Methode zur näherungsweisen Lösung des Dreikörperproblems darlegte.

Eulers erste Mondtheorie hatte eine wichtige praktische Konsequenz: Nach einer Schiffs-Katastrophe im Jahre 1707 wurde im englischen Parlament eine Petition eingebracht, man möge einen Preis für die Längenbestimmung auf hoher See ausschreiben. Der Göttinger Astronom Tobias Mayer (1723–1762) stellte 1755 nach Eulers Formeln Mondtafeln zusammen, die gestatteten, die Position des Erdtrabanten und damit die geographische Länge eines Schiffes mit einer damals in der Navigationslehre noch nie erreichten Genauigkeit zu bestimmen. Im Jahre 1765 wurde der Längenpreis erstmals vergeben: Die Witwe Mayers erhielt 3000 Pfund, und Euler für die den Mayerschen Tafeln zugrunde gelegte Theorie 300 Pfund. 10.000 Pfund gingen an J. Harrison für seine bei der Längenbestimmung benutzte Seeuhr. Mehr als ein Jahrhundert wurde diese Methode in der Seefahrt angewandt. Beispielsweise findet man in den Bordbüchern von James Cook (zweite Reise in die Antarktis, 1772–73) folgenden Auszug: „Wir sind sicher, den Standort eines Schiffes auf See bis auf einen Grad und einen halben genau zu bestimmen, ja sogar auf weniger denn einen halben Grad, so groß ist der Nutzen, den die Navigation durch die Astronomen in dieser Zeit erfuhr."

Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Tobias Mayer (1751–1755)

Wir beschließen den Abschnitt mit einem Brief, den Euler am 27. Mai 1755 an Mayer richtet. Euler erkennt darin die Leistung seines jungen Kollegen an, von Herzen würde er ihm den vollen Preis für die Längenbestimmung auf hoher See gönnen. Wir erkennen einen Wesenszug, der in der forschenden Gemeinschaft nicht üblich ist. Eulers Brief lautet:

„Daß Ew. Hochedelgb. Monds Tabellen in Engelland einen so großen Beyfall gefunden, darüber habe ich Ursach Denselben von Hertzen zu gratuliren, da diese Nation fremden Erfindungen sehr spät das gebührende Recht widerfahren lässt. … Da nun Ew. Hochedelgb. Mittel gefunden dieselben noch mehr zu verbeßern, und in Stand zu setzen dadurch die Longitudinem zur See bestimmen zu können, so ist so viel gewiß, daß bißher noch niemand einen so gegründeten Anspruch auf den gesetzten Preiß hat machen können, … so wünsche ich von Hertzen, daß auch dieses in Engelland nach Würden möge erkannt und Denselben der völlige Preiß zugesprochen werden, welche Gerectigkeit gewiß bey mir die empfindlichste Freude erwecken würde."

Erwin Roth hat den Briefwechsel im Jahre 1993 in der Schriftenreihe des Tobias-Mayer-Museum-Vereins in Marbach am Neckar herausgegeben. Mit seinen Erläuterungen zum Umfeld des Briefwechsels eröffnet Roth einen wunderbaren Zugang zum Gedankenaustausch der beiden Großen der Naturwissenschaft.

§ 6. Epilog

Zum Schluss besprechen wir noch Interessensgebiete Eulers mit Bezug zu den bisherigen Themen.

Refraktion

Die Lichtbrechung in der Erdatmosphäre beeinflusst die astronomischen Beobachtungen. Da die Refraktionsabweichung bei der Längenbestimmung auf hoher See ausgeglichen werden muss, spielt das Thema im Briefwechsel zwischen Euler und Mayer eine Rolle. In seinem Buch mit dem Titel *Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwicklung* beschreibt der Leipziger Astronom C. Bruhns 1861 den Eulerschen Beitrag: „Die Refraction beschäftigte im vorigen Jahrhundert nicht nur die Astronomen; die ausgezeichnetsten Mathematiker haben sich fast alle daran gewagt und alle möglichen Hülfsmittel der Analyse wurden angewandt, um das Problem zu lösen. Der grosse Mathematiker, den man die verkörperte Analyse nennt, der berühmte Leonhard Euler, versucht in den Berliner Memoiren vom Jahr 1754 das Problem zu lösen, er ist so glücklich, die wirkliche Differentialgleichung der Curve des Lichtes zu finden und stellt sie zuerst in analytischer Form dar." Bruhns' gekrönte Preisschrift ist 1861 bei Voigt & Günther in Leipzig erschienen.

Das eingeschränkte Dreikörperproblem

Die Geschichte des eingeschränkten Dreikörperproblems beginnt im Jahre 1772 mit Euler und Lagrange. Ihre Ideen werden weiterentwickelt von Jacobi (1836), Hill (1878), Poincare (1899), und anderen. Einen guten Überblick findet man in V. Szebehelys Buch *Theory of Orbits* vom Jahre 1967.

Ein erstes zentrales Resultat ist das Jacobische Integral (J) $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C$, das seine volle Bedeutung im Eulerschen synodischen Koordinatensystem gewinnt. Offensichtlich erhält man (J) durch die „Energie-Kombination“ der Newtonschen Gleichungen. (J) entspricht dem Zweiten Keplerschen Gesetz, dem Flächensatz. Der Verfasser dieses Berichtes hat durch eine „Krümmungs-Kombination“ das Analogon zum Ersten Keplerschen Gesetz hergeleitet: *im Eulerschen synodischen System können Raum und Zeit im Keplerschen Sinne separiert werden*. Näheres dazu in diesen *Sitzungsberichten: Band 61 (2003) 5, 95–98*. Eine Formel für die geodätische Krümmung κ_g, die bei den Minimalflächenkonstruktionen in § 3 eine Rolle spielt, legt die Krümmungs-Kombination nahe.

Ebbe und Flut

Im Jahre 1738 hat die Pariser Akademie durch ein Preisausschreiben Studien über die Ursachen von Ebbe und Flut angeregt. Euler hat für seinen Beitrag *Inquisitio Physica in causam fluxus ac refluxus maris* einen Teil des Preises erhalten, die Mitpreisträger waren D. Bernoulli und C. Maclaurin.

Die Evektionsungleichheit in der Mondbewegung, die im Zusammenhang mit dem Apsiden-Problem in § 5 erwähnt worden ist, spielt eine wichtige Rolle in der Gezeitendynamik. Diese periodische Störung kann den Mondabstand um 4500 km verkleinern und die Gezeitenkraft entsprechend vergrößern. Im Werk von Fergus J. Wood, das 2001 im *Journal of Coastal Research* erschienen ist, findet man neue Erkenntnisse über Mondtheorie und Gezeiten-Dynamik. Der Verfasser dieses Berichtes hat im März 2007 im genannten *Journal* einen Anhang zu den Ergebnissen von F.J. Wood geschrieben.

Dieter B. Herrmann

Diskussionsbemerkung zum Vortrag von Herrn Gackstatter

Der vom britischen Parlament im Jahre 1714 ausgesetzte Preis ist zum großen Teil, wie dem Vortrag zu entnehmen war, an John Harrison (1693–1776) gegangen und zwar für die Konstruktion und den Bau eines Timekeepers. Das hängt mit dem Umstand zusammen, dass man auf diese Weise auch ohne die Verwendung von Mondtafeln die geographische Länge auf See bestimmen konnte. Die Längendifferenz zwischen irgendeinem Ort auf See und dem Heimathafen des jeweiligen Schiffes spiegelt sich nämlich letztlich in einer Ortszeitdifferenz wider. Während man jedoch die Ortszeit auf See durch Sonnenbeobachtungen relativ leicht bestimmen kann, ist die Kenntnis der Ortszeit im Heimatshafen zur selben Zeit ein Problem der Ganggenauigkeit der Uhren. Harrison, ein Amateur, verwendete viel Mühe und Zeit auf die Herstellung einer Uhr, die bei einer entscheidenden Probefahrt von Portsmouth nach Bridgetown unweit des südamerikanischen Kontinents nur 39,2 Sekunden falsch ging. Das entsprach einem Fehler der Längenmessung von weniger als zehn nautischen Meilen. Eigentlich hätte Harrison demnach das volle Preisgeld erhalten müssen. Da er jedoch nicht alle Konstruktionsunterlagen übergeben hatte, die es ermöglicht hätten, die Uhren in Serie herzustellen, wurde ihm nur die Hälfte des Preises zugesprochen.

Es verdient noch Erwähnung, dass Mayer sich unabhängig von Euler auch selbst mit der Mondtheorie beschäftigt hatte und seine Tafeln insofern nicht ausschließlich auf Eulers Ergebnissen beruhen. Die umfangreichen Rechenarbeiten, die mit dem Gebrauch der Tafeln verbunden waren, empfanden sowohl die Vertreter des britischen Board of Longitude als auch die Schiffskapitäne als störend. Deshalb wurde auf Vorschlag des britischen Astronomer Royal, Nevil Maskelyne (1732–1811), ein Tabellenwerk entwickelt, das weltberühmt wurde: das englische Seefahrtsjahrbuch „Nautical Almanac“, das 1766 erstmals erschien.