Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät *85(2006), 91–99*

Wilfried Schröder und Hans-Jürgen Treder

Hans Ertel und die Kosmologie

Vorgelegt in der Klasse für Naturwissenschaften am 9. Februar 2006

1. Vorbemerkung

Die grundlegende These der auf die Ansätze von Einstein, Eddington und Weyl zurückgehenden Arbeiten von Hans Ertel über den Zusammenhang von Atom- und kosmischen Konstanten ist heute mit Einsteins abschließendem Satz zu seinen Bemühungen um eine einheitliche Feldtheorie von Raum, Zeit und Materie ausdrückbar. Sie ist die Erkenntnis: „From the quantum phenomena it appears to follow with contents that a finite system of finite energy can be completely described by a finite set of numbers (quantum numbers).“ (Einstein, 1955)

Die kosmologischen Weltmodelle mit einem geschlossenen dreidimensionalen (sphärischen) Raum ($\varepsilon = +1$ und mit $\lambda > 0$) behaupten, dass das Universum ein solches System ist. Die damit implizierte Problematik nannte Einstein auch die Frage nach einer möglichen „Algebraisierung“ der Physik (anstelle ihrer Geometrisierung gemäß dem Programm der allgemeinen Relativitätstheorie).

Die relativistische Kosmologie vereinfacht die Einsteinschen Gravitationsgleichungen und ihre Anwendung auf sehr große Systeme – nämlich auf das Universum selbst – durch die Forderung eines „perfekten Kopernikanismus“. Nach diesem gibt es „im Großen“ keine ausgedehnten Inhomogenitäten im Weltall und es hat auch nie solche gegeben. Dies ermöglicht es überhaupt erst, die astronomischen Informationen, die ja den elektromagnetischen Wellen zu entnehmen sind, zu interpretieren. H. Weyl and H. P. Robertson zeigten, dass dieser „perfekte Kopernikanismus” zu den Aussagen führt, dass die kosmologische Raum-Zeit-Welt V_k konform zur Minkowskischen Raum-Zeit der speziellen Relativitätstheorie ist. Genau dann folgt aus den Maxwellschen Gleichungen für das elektromagnetische Feld dieselbe Wellenoptik wie in der speziellen Relativitätstheorie (Weylsches kosmologisches Prinzip).

2. Weltmodelle

Die Kosmologie verlangt aber auch noch die Existenz einer universellen Synchronität im Sinne Einsteins: Die Welt V_4 ist dann das imprimitive topologische Produkt von dreimdimensionalen Raumkoordinaten mit der Zeit t

$$V_4 = V_3 x \ ct \tag{1}$$

Für einen konformen ebenen V_4 bedeutet dies, dass V_3 wieder eine konstante Krümmung $\varepsilon = +1,0,-1$ hat. Dies ist die Robertson-Walkersche Metrik

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - R^2(t) d\sigma^2 \\ &= c^2 dt^2 - R^2(t) \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{\left(1 + \varepsilon r^2 / 4\right)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

ε = +1 bedeutet einen geschlossenen (sphärisch gekrümmten) dreidimensionalen Raum V_3. Für ε = –1 und ε = 0 (flach) ist der Kosmos räumlich unendlich.

Weyls Prinzip und der universelle Einsteinsche Synchronizismus (2) definieren gemäss den Einsteinschen Gravitationsgleichungen eine homogene und isotrope kosmische Materie, die eine reine Funktion der kosmischen Zeit t ist. Es gelten die Friedmannschen Gleichungen.

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\lambda c^2}{3} - \frac{\varepsilon c^2}{R^2} + \frac{8\pi}{3} G\rho \tag{3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G}{3c^2}\left(\varsigma c^2 + 3p\right) \tag{4}$$

Hier ist $\rho\varsigma(t)$ die Massendichte, ρc^2 also die Energiedichte, und $\rho(t)$ der Druck. Zwischen ρ und ρ besteht die dynamische Gleichung

$$R\dot{\rho} = -3\left(\rho + \frac{\rho}{c^2}\right)\dot{R} \tag{5}$$

die für reine, druckfreie Materie ($\rho = 0$) einfach die Erhaltung der Masse besagt

$$\rho_0 R_0^3 = \rho R^3 = const.$$

Aus (4) folgt, dass für $\lambda \leq 0$ der Weltradius $R(t)$ kein Minimum besitzt und immer $R < 0$ ist. Ist dagegen $\lambda > 0$, so kann es einen minimalen Weltradius geben und die Beschleunigung $\ddot{R}$ der Expansionsgeschwindigkeit $\dot{R}$ des Kosmos kann auch Null werden.

Das sachgerechte Modell eines solchen Kosmos ist dann der sphärische, finite Kosmos, den Einstein 1917 in die Physik einführte. Die Masse dieses Kosmos ist beschränkt und beträgt $M = 2\pi\rho R^3 = const.$

Eddington nahm an, dass der Anfangzustand des Kosmos dann ein instabiler Einstein-Kosmos war, der vor „unendlich langer Zeit" existierte. In ihm war damals (d. h. z. Z. $t \to -\infty$)

$$\ddot{R}_0 = 0 \leftrightarrow \rho_0 = \frac{\lambda c^2}{4\pi} \quad \text{und auch } \dot{R}_0 = 0$$

was $R_0 = \lambda^{-\frac{1}{2}}$ bedeutet. Daher ist die Masse eines solchen Kosmos, wenn er auf Grund seiner Instabilität zerfällt, immer gleich der Einstein-Masse

$$M = M_{Einstein} = \frac{\pi}{2} c^2 G^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Dieser Eddington-Lemaitre-Kosmos hatte dabei zur Zeit $t = -\infty$ seine maximale Dichte g_0 und er geht für $t \to \infty$ in den de Sitter-Kosmos

$$R = \lambda^{-\frac{1}{2}} \exp.\left(\sqrt{\frac{\lambda}{3}} ct\right)$$

von verschwindender Massedichte $\rho \sim R^{-3} \sim c^{-3\sqrt{\frac{\lambda}{3}}ct}$ über.

Eddington bezog seine Zahlen-Relationen auf dieses Weltmodell, in dem es niemals einen singulären Zustand mit unendlich großer Energiedichte und daher auch keinen „Urknall" gab.

Ertel dagegen betrachtet den allgemeinen Fall eines „Friedmann-Lemaitre-Kosmos" mit $\varepsilon = +1$ und einer Gesamtmasse

$$M > \frac{\pi}{2} c^2 G^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Dieser Kosmos beginnt mit einem Zustand unendlich großer Dichte $\rho \sim 1/R^3 \sim 1/t^2$ zur Zeit $t \to 0$ also mit einem big bang (bei dem auch eine Strahlungsenergie und $\rho \sim \frac{1}{R^4}$ existiert haben kann, die gegenüber $\rho \sim \frac{1}{R^3}$ später klein werden). (Vgl. hierzu Ertel [1-10]).

Dann gelangt der Kosmos zu einer Zeit $t = t_0 > 0$ zu einem Wendepunkt $\ddot{R}_0 = 0$, an dem $\rho_0 = \frac{\lambda c^2}{4\pi}$ ist. Dies ist dann der Fall, wenn mit der Masse

$$M = \frac{\pi}{2} G^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}} c^2 \left(1 + \frac{\dot{R}_0^2}{c^2} \right)$$

der Radius der Welt

$$R_0 = \lambda^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\dot{R}_0^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

beträgt. Die Zeitdauer dieses Zustandes minimaler Expansionsgeschwindigkeit kann sehr groß sein.

Für $\ddot{R}_0 = 0$ beträgt die Hubble-Zahl

$$H_0^2 = \lambda c^2 - \frac{c^2}{R_0^2}$$

Je kleiner die Differenz $\lambda - \frac{1}{R_0^2}$ ist, umso länger besteht der quasi-stationäre Zustand mit einer sehr langsamen Expansion. Die quantenphysikalischen Eigenzustände, die sich nach Eddingtons kosmologischen Szenarium (1933) im primären Einstein Kosmos vor unendlich langer Zeit herausbildeten, entstanden nach Ertels Ansicht von 1935 vor endlicher Zeit in der quasi-stationären Phase des Friedmann-Lemaitre-Kosmos. Danach sind die kosmologischen Zahlenwerte „eingefrorene Quantenzahlen“ dieses, nach dem big bang bei $t = 0$ herausgebildeten Zustandes langsamer Expansion mit $\dot{R}_0 \langle\langle c$ und $\ddot{R}_0^2 \approx 0$.

Nach dieser Phase, die G. Lemaitre später im Jahre 1948 als „atome primitive“ bezeichnete, beschleunigte sich die Expansion wieder und schließlich geht auch der Friedmann-Lemaitre-Kosmos für $t \to +\infty$ asymptotisch in einen de Sitter-Kosmos über.

Ertels Szenarium überträgt, also die quanten-kosmologische Argumentation aus dem Eddington-Lemaitre-Modell mit $M = M_0 = \frac{\pi}{2} G^{-1} \lambda^{-\frac{1}{2}} c^2$ auf die Friedmann-Lemaitre-Kosmen, in dem $M > M_0$ ist und betrachtet zur Zeit $t \to -\infty$ einen quasi-stationären Zustand mit $H_0^2 \approx \left(\lambda - \frac{1}{R_0^2} \right) c^2$, $\ddot{R}_0 \approx 0$ als

Grund für die kosmischen Zahlenrelationen. Damit vereinigte Ertel Eddingtons Quanten-Kosmologie mit der Vorstellung eines primären „big bang".

3. Theoretische Konsequenzen und Ansätze

Die vollständigen allgemeinen-relativistischen Feldgleichungen Einsteins enthalten drei universelle Konstanten: die Lichtgeschwindigkeit c, welche die Zeit t in der speziellen Relativitätstheorie (SRT) in eine vierte Koordinate der Minkowskischen Raum-Zeit-Welt überträgt, $x^4 = ct$, die Einsteinsche Gravitationskonstante $\kappa = \frac{8\pi}{c^4} G$ in der G Cavendisch-Newtonsche Konstante im Newtonschen Gravitationsgesetz ist und Einsteins kosmologische Konstante λ von der Dimension einer reziproken Fläche, die ein Maß für die mittlere Krümmung der Raum-Zeit-Welt angibt.

Die Einsteinschen Gleichungen lauten somit

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \lambda g_{ik} = kT_{ik} \ ,$$

worin R_{ik} der einmal kontrahierte Krümmungstensor (der Ricci-Tensor), $R = R_l^l$ der Krümmungsskalar und g_{ik} der metrische Tensor einer vierdimensionalen Riemannschen Raum-Zeit-Welt ist. Der Tensor auf der rechten Seite hält die übrige Physik, die Energie- und Spannungs-Verteilung der materiellen Teilchen und Felder als „Materie-Tensor" T_{ik} zusammen. Die Zusammensetzung dieser Materie und die Existenz stabiler Körper und Vorgänge, die als Maß bei Raum- und Zeit-Messungen verwendbar sind, werden durch die Existenz des Planckschen Wirkungsquantums h gesichert.

Sowohl mit der Hilfe von G und c als auch mit Hilfe von h und c kann jeder Masse M eine Länge zugeordnet werden. Diese sind der Gravitationsradius $GM/c2$ einerseits und die Compton-Wellenlänge h/Mc andererseits. Max Planck, der sich mit diesem Komplex frühzeitig befasste, sah in h, G und c die Fundamentalkonstanten der Physik. Diese, heute als Planckionen genannten hypothetischen Teilchen mit der Masse $M_P = \sqrt{hc/G}$ bilden nach ihm die idealen Testkörper der Physik. Alle anderen physikalischen Konstanten sollten nach dem Programm einer relativistischen Gravitationstheorie als Vielfache der Planckschen Größen berechenbar sein.

Schon Planck bemerkte, dass die Elementarladung e von derselben physikalischen Dimension wie $\sqrt{hc}$ ist. Es gilt

$$e^2 = \alpha hc \ ,$$

wobei $\alpha \approx \frac{1}{137}$ die in der Quantentheorie verwendete Sommerfeldsche Feinstruktur-Konstante ist. Einstein forderte schon 1908 die Berechenbarkeit aus h und c als Ziel einer Quantentheorie des Elektrons und des Maxwellschen Feldes. Die linearen Gleichungen sind aber nicht in der Lage, die Elementarladung e zu bestimmen.

Für die Gravitation ist die große Zahl $\omega = hc / Gm^2 = 10^{39}$ die reziproke Sommerfeld-Zahl. Mit Eddingtons „großer kosmischer Zahl"

$$N = \frac{c^3}{Gh\lambda} \approx \omega^3 = 10^{117}$$

gilt

$$M \approx \frac{c^2}{G\sqrt{\lambda}} = \sqrt{NM_P} = N^{2/3}m$$

wobei m die Masse eines Protons (allgemeiner die des stabilen Baryons) ist. Die totale „Wirkung des Kosmos" beträgt dann definitionsgemäß

$$Mc\lambda^{-\frac{1}{2}} = \frac{c^3}{G\lambda} = Nhc \quad \text{(Haas-Relation).}$$

Damit ist die Masse m der stabilen schweren Elementarteilchen durch den Kosmos bestimmt (was Einsteins Interpretation des Machschen Prinzips entspricht). Es ist $m = h^{\frac{2}{3}}G^{-\frac{1}{3}}\lambda^{\frac{1}{6}}$, so dass für $\lambda \to 0$ die Ruhemasse der Elementarteilchen verschwinden würden. – Die Haas-Relation kann gemäss H. Weyl auch geschrieben werden

$$GM^2 = G^{-1}c^4\lambda^{-1} = Nhc \; .$$

Sie ist das kosmologische Pendant zur Planckschen Beziehung

$$GM\frac{2}{P} = hc$$

Eddingtons Vorstellung war, dass diese algebraischen Zahlenrelationen zu dem instabilen stationären Einstein-Kosmos gehören. Die Zahlen-Relationen von Eddington, Weyl und Haas sollten Eigenwerte einer allgemein-relativistischen Quantentheorie in dem geschlossenen stationären Einstein-Raum sein, der vor „unendlich langer Zeit" über eine „unendlich lange Zeitdauer" bestimmt ist, wie es das Eddington-Haas-Modell voraussetzt. Dann sind diese Relationen „eingefrorene Quanten-Zustände".

Ertels Arbeiten zeigten nun, dass diese speziellen Modelle für die Eddington-, Weyl- und Haas-Relationen zwischen Makro- und Mikrokosmos nicht notwendig sind. Bis auf Zahlenfaktoren von Größenordnungen eins kann man dieselben Relationen auch aus dem allgemeinen Friedmann-Lemaitre-Modell des Kosmos ($\varepsilon = 1$, $\lambda > 0$) herleiten. Sie sind also eingefrorene Quantenzustände aus der Phase des Kosmos, in der die Expansion der Welt sehr langsam verlief

$$H^2 = \lambda c^2 - \frac{c^2}{R_0{}^2} \qquad \text{mit} \qquad R_0^2 = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\dot{R}_0^2}{c^2}\right)$$

Auch dieser Zustand war quasi-stationär. Vor ihm entstand die Welt aus einem big bang, und nach dem quasi-stationärem Zustand geht die Welt wie beim Eddingtonschen Modell asymptotisch in den de Sitter-Kosmos mit $H^2 = \dfrac{\lambda c^2}{3}$ über. Nach Ertel sind die Eddington-Haas-Relationen also nicht grundsätzlich mit dem primären Einstein-Kosmos verbunden und wären auch mit einem „Urknall“ verträglich.

Einstein hat später bemerkt, dass in der allgemeinen Relativitätstheorie der kosmologische Term λg_{ik} ein überflüssiges „Übel“ wäre. Hingegen ist λ ein notwendiger Bestandteil der rein-affinen Feldtheorie von Eddington und Einstein und der Einstein-Schrödingerschen Relativitätstheorie des unsymmetrischen Feldes. In dieser unitären Feldtheorie von Raum, Zeit und Materie wird Metrik überhaupt erst durch das kosmische Krümmungsmaß $R = 4\lambda$ definiert.

Die Arbeiten von Eddington und von Ertel setzen implizite eine solche einheitliche Feldtheorie voraus. Diese will Kosmologie und Elementarteilchenphysik zu einer einheitlichen „Quanten-Kosmologie“ zusammenfassen. Die Zahlen-Beziehungen von Eddington, Weyl und Haas erscheinen dann als vorweggenommene Lösungen zum Einsteinschen Problem einer „Algebraisierung der Physik“ als Konsequenz der Quantenfeldtheorie eines endlichen Universums. Sie geben ein kosmisches Szenarium als Begründung für die Struktur des Kosmos, die letztendlich auf reiner Algebra beruhen sollte.

Die Zahlenwerte bei Eddington und bei Ertel sind dabei nur größenordnungsgemäss richtig und implizieren Ableitungen von exakten Zahlenwerten aus den verschiedenen Ansätzen zu unitären Feldtheorien wie Eddingtons Fundamental-Theorie oder der nichtlinearen Elektrodynamik von Max Born und L. Infeld (oder auch aus der rein-affinen Feldtheorie von Eddington und Einstein). Auch diese haben nur die Bedeutung von Beispielen für den möglichen Gang solcher Rechnungen. Es ist daher nicht wesentlich, dass die von Ertel verwendeten experimentellen Werte der Fundamental-Konstanten nicht genau den heutigen Werten entsprechen und der kosmologische Hubble-Parameter $\dot{R}/R_0$ sogar zehnfach größer als der heute bestimmte Wert angenommen wurde.

4. Schlussbemerkungen

Zwei Aspekte sind noch bemerkenswert bezüglich der Ertelschen Arbeiten. Einmal, dass er in den dreißiger Jahren als Student bereits durch seinen Lehrer Heinrich Fikker, der seinerzeit Sekretär der Preußischen Akademie der Wissenschaften war, mit Einstein sowie anderen leitenden Gelehrten (Von Laue, Schrödinger, Planck) bekannt wurde. Diese schätzten die ungewöhnliche Begabung Ertels und taten alles, um ihn zu fördern. Interessant ist auch, dass die theoretische Meteorologie bei der Entstehung der Kosmologie eine beachtliche Rolle spielte. A. A. Friedmann (1888–1925), G. Lemaitre (1894–1966) und H. Ertel (1904–1971) arbeiteten an meteorologischen Instituten bzw. Observatorien. Allen diesen Physikern verdankt man zugleich wichtige Beiträge in der theoretischen Meteorologie und geophysikalischen Hydrodynamik, die übrigens inzwischen vielfach auch für die Plasmaphysik und theoretische Astrophysik wichtig wurden. Im Übrigen ist interessant, dass Ertel bis kurz vor Einsteins Tod einen Briefwechsel mit diesem hatte. Es fällt auf, dass Einstein gegenüber Ertel in einer ungewöhnlich herzlichen und verbindlichen Weise schrieb. Ertel war Einstein noch bestens bekannt und so ist es verständlich, dass er diesem gegenüber in dieser sehr herzlich-verbindlichen Art auftrat. Diese Briefe sind übrigens die letzten, die Einstein mit deutschen Physikern wechselte und widerspiegeln eine einvernehmliche freundschaftlich zu nennende Art, wie sie sonst nur bei von Laue und Max Born bekannt wurde.

Hinzuweisen ist noch darauf, dass die gesamten kosmologischen Erörterungen Ertel stets beschäftigt haben. So wundert es nicht, dass er noch 1971 zusammen mit Hans-Jürgen Treder eine Studie zum potentialtheoretischen Aspekt der Kosmologie im Rahmen der Vorstellungen einer klassischen Feldtheorie veröffentlichte (Ertel und Treder, 1971). Auch an Treders Studien zum Machschen Prinzip nahm er regen Anteil.

Literatur

(1) A. Einstein , The Meaning of Relativity. 3.ed. Princeton, 1955, p. 165ff
(2) H. Ertel, Einsteins kosmologische Konstante und der Zusammenhang von Atom- und kosmischen Konstanten im expandierendem Universum. SB Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Phys. math. Kl. 1935/I.
(3) H. Ertel, Über den Zusammenhang zwischen Atom- und kosmischen Konstanten im expandierenden Universum. Naturwiss. 23 (1935), 36.
(4) H. Ertel, Der Zusammenhang der universellen pysikalischen Konstanten mit der kosmologischen Konstante der Einsteinschen Feldgleichungen. Naturwiss. 23 (1935), 70.
(5) H. Ertel, Die absolute Feldkonstante in der Bornschen neuen Feldtheorie. Naturwiss. 23 (1935), 512.
(6) H. Ertel, Über die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante. Z. f. Physik 95 (1935), 775.
(7) H. Ertel, Über das Massenverhältnis von Proton und Elektron. Physik. Z. 36 (1935), 464.
(8) H. Ertel, Gravitationskonstante und Zahl der Massenteilchen im Weltall. Physik. Z. 37 (1936), 138.
(9) H. Ertel, Zur Frage des Zusammenhangs der universellen physikalischen Konstanten. Naturwiss. 26 (1938), 463.
(10) H. Ertel, Gravitationskonstante spezifische Ladung und Massenverhältnis von Proton und Elektron. Naturwiss. 26 (1938), 498.
(11) H. Ertel, Quantenmechanisch-relativistische Begründung des Zusammenhangs der universellen physikalischen Konstanten. Naturwiss. 26 (1938), 499.
(12) H. Ertel und H.J. Treder, Quellen und Senken des universellen Schwerefeldes. Ann. Physik 7. Folge, Bd. 26 (1971), 23.