Rainer Schimming

Über Gravitationsfeldgleichungen 4. Ordnung

1. Warum Alternative Theorien?

Einsteins *Allgemeine Relativitätstheorie* ist bis heute die empirisch erfolgreichste Theorie der Gravitation. Kaum war sie aber in der Welt, begann schon die Suche nach einer *Alternativen Theorie* – womit wir eine geometrische Gravitationstheorie verschieden von der Einsteinschen bezeichnen –, und dieses Streben hält bis heute an. Der Grund sind theoretische Unvollkommenheiten der Allgemeinen Relativitätstheorie von 1915/16:

- Nur ein Feld, das gravitative, wird geometrisiert. Die Idee *Physik = Geometrie der Raumzeit* ist also inkonsequent umgesetzt.
- *Gravitationsenergie* ist nicht in kovarianter Weise (d.h. unabhängig vom Bezugssystem) lokalisierbar.
- In physikalisch wichtigen Situationen, in der Kosmologie und der Astrophysik, treten unvermeidlich *Singularitäten* auf, was durch entsprechende Theoreme belegt wird.
- *Spinorfelder* gehen nur über aus ihnen zusammengesetzte Tensorfelder in die Einsteinschen Gleichungen ein. In der Quantentheorie sind aber Spinoren und nicht Tensoren die wesentlichen Größen.
- Quantisierung führt auf nicht renormierbare Gleichungen.

Die Liste theoretischer Mängel der Einsteinschen Theorie kann auch als Liste von Forderungen an eine Alternative Theorie gelesen werden. Eine solche Wunschliste kann natürlich noch verlängert werden, etwa durch die folgenden Punkte:

- Das *Machsche Prinzip* (Trägheit ist eine durch die im Kosmos vorhandenen Massen induzierte Führungskraft.) soll enthalten sein.
- Das *Einsteinsche Partikelprogramm* (Teilchen sind „Knoten“ von Feldern und ergeben sich aus den Feldgleichungen.) soll möglichst realisiert werden.
- Gravitationstheorie und Quantentheorie sollen durch eine geschlossene, einheitliche Theorie beschrieben werden.

Die Vielfalt der bis heute aufgestellten Alternativen Theorien ruft nach einer Systematik. Prinzipiell sind *rein metrische* und *erweiterte* Theorien zu unterscheiden. Eine *rein metrische Gravitationstheorie* hat eine Riemannsche Metrik g geeigneter Dimension und Signatur als einziges fundamentales geometrisches Objekt. Dies trifft zu auf

- Feldtheorien für g, welche aus einem Lagrangian folgen, der aus der Krümmung von g und eventuell aus Ableitungen der Krümmung zusammengesetzt ist.
- Theorien für g mit höherer Dimensionszahl: *Kaluza-Klein-Theorien* mit *„Zylinderbedingung"* oder mit der Vorschrift der *Dimensionsreduktion, Projektive Relativitätstheorien*.

Eine *erweiterte Gravitationstheorie* enthält dagegen Information zusätzlich zu einer Riemannschen Geometrie. Hier kann man die Grundobjekte *Metrik* + *Zusatzfeld* – wobei letzteres geometrisch interpretiert sein sollte – oder aber ein *Superobjekt*, welches eine Metrik g involviert, unterscheiden. Tatsächlich sind, unter anderem, Theorien mit folgenden Feldgrößen aufgestellt worden:

Metrik + Skalar (*Theorie von Jordan-Brans-Dicke, integrable Weyl-Theorie*, …),
Metrik + Vektor (*Weylsche Relativitätstheorie*, …),
Metrik + Torsion (*Einstein-Cartan-Theorien*, …),
Metrik + affiner Zusammenhang (*Eddington*, …),
Metrik + Metrik (*Rosen*, …),
4-Bein bzw. n-Bein (*Tetradentheorien von Treder, Möller*, …),
unsymmetrische „Metrik" (*Einstein-Strauss, Hlavaty*, …),
Finsler-Metrik (*Ikeda*, …).

Die meisten Alternativen Theorien überstehen allerdings die Tests an empirischen Befunden nicht, solche anhand der drei klassischen *Einstein-Effekte* und weiterer Tests im Sonnensystem bzw. anhand kosmologischer oder/und astrophysikalischer Fakten. Deshalb ist die Einsteinsche Theorie nach wie vor die allgemein bevorzugte relativistische Gravitationstheorie. Ferner ist geradezu typisch, daß eine neue Theorie eines oder mehrere der oben genannten Probleme löst, dafür aber wieder eines oder mehrere neue Probleme aufwirft. Schließlich ist noch *„Ockhams Rasiermesser"* als erkenntnistheoretisches Prinzip zu nennen: Man soll sparsam mit Grundbegriffen sein!

Trotz allem ist die Beschäftigung mit Alternativen Theorien, auch mit widerlegten, sinnvoll; sie hat zu vielen wesentlichen Einsichten verholfen. Der Vergleich mit anderen Theorien führt zu größerer Klarheit über die Einsteinsche Theorie. Die Mathematik, genauer die Höhere Differentialgeometrie, hat immens von der Theoriensuche der Physiker profitiert. Last not least bleiben immer noch die genannten Listen theoretischer Mängel bzw. Wünsche abzuarbeiten.

2. Theorien 4. Ordnung

Sehr naheliegende, rein metrische Gravitationstheorien ergeben sich, wenn man den *Einstein-Hilbert-Lagrangian* $L = \kappa R$ durch einen anderen Lagrangian ersetzt, der vom Riemannschen Krümmungstensor *Riem* abhängt: $L = F(Riem)$. Oder auch mit Einbeziehung kovarianter Ableitungen: $L = F(Riem, \nabla Riem, \ldots)$. Besonders naheliegend ist es, zu κR in der Krümmung quadratische Ausdrücke zu addieren, genauer

$$L = \kappa R + c_0 R^2 + c_1 \,|\, Ric \,|^2 + c_2 \,|\, Riem \,|^2$$

zu wählen. (R bezeichnet die Skalarkrümmung, *Ric* den Riccitensor, $|\ldots|^2$ bezieht sich auf die Metrik g.) Weil L von 2. Ordnung in g ist, sind Feldgleichungen 4. Ordnung für g zu erwarten. (Bekanntlich sind die Einsteinschen Gleichungen nur deshalb von 2. Ordnung, weil der Einstein-Hilbert-Lagrangian $L = \kappa R$ entartet ist, also ein mathematischer Ausnahmefall vorliegt.) Umarrangement zu

$$L = \kappa R + a_0 R^2 + a_1 B + a_2 \,|\, Riem \,|^2$$

stellt sich als zweckmäßig heraus; dabei bezeichne

$$B := R^2 - 4 \,|\, Ric \,|^2 + |\, Riem \,|^2$$

den sogenannten *Gauss-Bonnet-Ausdruck* und die neuen Kopplungskonstanten sind

$$a_0 := c_0 + \tfrac{1}{4} c_1, \quad a_1 := -\tfrac{1}{4} c_1, \quad a_2 := c_2 + \tfrac{1}{4} c_1 .$$

Wir setzen auch noch

$$b_0 := (n-1) a_0 + a_2 = 4(n-1) c_0 + n c_1 + 4 c_2 .$$

Die Fülle der Arbeiten über diese Klasse von Theorien für eine Lorentzsche Metrik g mit der Dimensionszahl $n = 4$ ist kaum noch zu übersehen. Wir haben das Studium auf allgemeines $n = 4$ erweitert und wollen folgende Ergebnisse hervorheben:

- Die Feldgleichungen sind von 4. Ordnung genau dann, wenn $a_0 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$.

- Wenn $a_2 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, so lassen sich die Feldgleichungen durch Hinzufügen geeigneter Eichbedingungen zu einem hyperbolischen semilinearen System 4. Ordnung vereinfachen.
- Wenn $\kappa > 0$, $a_0 + a_2 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, so gehört zur Theorie ein Teilchen mit Spin 0 und mit der Masse m_0 gegeben durch $4m_0^2 = (n-2)\kappa / b_0$. Dieses ist kein Tachyon genau dann, wenn $b_0 > 0$.
- Wenn $\kappa > 0$, $a_2 \neq 0$, so gehört zur Theorie ein Teilchen mit Spin 2 und mit der Masse m_2 gegeben durch $m_2^2 = -\kappa/(4a_2)$. Dieses ist kein Tachyon genau dann, wenn $a_2 < 0$.
- Wenn $\kappa = 0$, $a_2 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, so erlaubt die Theorie keine massiven Teilchen.
- Wenn $\kappa = 0$, $a_2 \neq 0$, $b_0 = 0$, so erlaubt die Theorie Teilchen mit Spin 0 und beliebiger Masse.
- Wenn $\kappa = 0$, $a_2 = 0$, $a_0 \neq 0$, so erlaubt die Theorie Teilchen mit Spin 2 und beliebiger Masse.
- Die *Einsteinsche Stärke* der Feldgleichungen hat in verschiedenen Fällen folgenden Wert:

$$a_2 \neq 0, \quad b_0 \neq 0: \quad 12\binom{n}{3},$$

$$\kappa \neq 0, \quad a_2 \neq 0, \quad b_0 = 0: \quad (n-1)(2n^2 + n - 2),$$

$$\kappa = 0, \quad a_2 \neq 0, \quad b_0 = 0, \quad n = 4: \quad 96,$$

$$a_2 = 0, \quad a_0 \neq 0: \quad (n-1)(2n^2 - 2n + 2).$$

Erklärungen der verwendeten Begriffe können wir nur skizzieren: *Hyperbolizität* bedeutet hier, daß das Hauptsymbol des Differentialoperators nur reelle (aber nicht notwendig verschiedene) charakteristische Richtungen hat. Der *Teilcheninhalt* bezieht sich auf die linearisierten Vakuumfeldgleichungen mit flachem Hintergrund. Masse m und Spin s ergeben sich aus einem ebene-Wellen-Ansatz; es gilt $m^2 = |k|^2$ mit dem Wellenvektor k, und s folgt aus den frei wählbaren Anteilen der Amplituden. Die *Einsteinsche Stärke* beschreibt das asymptotische Verhalten für $k \to \infty$ der Anzahl Z_k der frei wählbaren Taylorkoeffizienten k-ter Ordnung bei einem formalen Potenzreihenansatz für die allgemeine Lösung der Feldgleichungen.

Der Fall $n = 4, a_2 \neq 0, b_0 = 0$ ist von besonderer Bedeutung; er führt für $\kappa = 0$ auf die konforminvarianten *Bachschen Gleichungen*

$$Bach = 0$$

und für $\kappa \neq 0$ auf die *Bach-Einstein-Gleichungen*

$$Bach + k\ Ric = 0, \quad k = const \neq 0\,.$$

(*Bach* ist dabei das Pseudonym von Rudolf Foerster als Autor einer vielzitierten Arbeit von 1921.)

Folgende Aspekte der Bach-(Einstein-)Gleichungen wurden studiert:

- Linearisierung, Teilcheninhalt.
- Newtonscher Grenzwert.
- Exakte Lösungen aller drei wichtigen Klassen, d.h. astrophysikalische (genauer zentralsymmetrische, statische), kosmologische und Wellen-Lösungen.
- Stoßwellen.
- Cauchysches Anfangswertproblem.
- Quantengravitation.

Das folgende *„anti-Birkhoff-Theorem“* (so genannt, weil es eine zum *Birkhoff-Theorem* der Allgemeinen Relativitätstheorie entgegengesetzte Aussage macht.) sei besonders hervorgehoben: *Die Bach-Einstein-Gleichungen* $Bach + k\ Ric = 0$ *besitzen nicht-konform-flache statische zentralsymmetrische Lösungen g, welche in einem Zylinder* $B_r \times \mathbb{R}$ *reell-analytisch sind, wobei* B_r *eine Kugel vom Radius* $r > 0$ *im Raum* $\mathbb{R}^3$ *bezeichnet und* $\mathbb{R}$ *für die Zeitachse steht. Diese Lösungen bilden eine einparametrige analytische Schar* $g = g_\varepsilon$.

3. Motivationen

Die oben diskutierte Klasse von Gravitationstheorien 4. Ordnung läßt sich teils *a priori* (d.h. vor Lösen der Feldgleichungen), teils *a posteriori* (d.h. nach Vorliegen von Ergebnissen) motivieren:

- Von allen Alternativen Theorien steht sie in den Grundideen der Einsteinschen Theorie am nächsten.
- Materiefeldgleichungen 4. Ordnung wurden gelegentlich studiert: $\Box(\Box - m^2)\,u = 0$ für ein Skalarfeld u, *Bopp-Podolsky-Elektrodynamik* für ein Vektorfeld. Dazu passen konsequenterweise nur Gravitationsfeldgleichungen 4. Ordnung.
- Der Lagrangian für die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung ist jeweils quadratisch in der (Eichfeld-)Krümmung. Per Analogie wäre ein in der (Riemannschen) Krümmung quadratischer Gravitations-Lagrangian zu betrachten.
- Für bestimmte Zwecke – *Elementarlänge, 5. Kraft, Gravitonenmasse, …* – wird eine neue Naturkonstante benötigt. Die besagte Klasse von Theo-

rien stellt zusätzliche Konstante(n) zur Verfügung.

- Solche Theorien ergeben sich als semiklassische Approximation aus der Quantisierung der Einsteinschen Gleichungen.
- Theorien 4. Ordnung mit $\kappa \neq 0$ sind – im Gegensatz zur Einsteinschen Theorie – in der Ein-Schleifen-Näherung renormierbar.
- Inflation kann in diesem Rahmen (in einer rein metrischen Theorie!) modelliert werden.
- Singularitäten (sowohl kosmologische als auch astrophysikalische) können vermieden werden.
- Ein Spezialfall, die *Bachsche Theorie,* ist konforminvariant. Für Konforminvarianz gibt es eine Reihe physikalischer Argumente.

Für die Erweiterung der Betrachtungen auf allgemeine Dimensionszahl $n \geq 4$ können folgende Gründe angeführt werden:

- Nach dem *Kaluza-Klein-Paradigma* ist (i) die „wahre" physikalische Raumzeit hochdimensional, ist (ii) eine Riemannsche Metrik g der hochdimensionalen Raumzeit das einzige grundlegende geometrische Objekt, und sind (iii) alle fundamentalen physikalischen Felder (Gravitation, Elektromagnetismus, …) geeignete Projektionen von g. Dieses Paradigma verlangt das Studium rein metrischer Theorien in höheren Dimensionen.
- Die Einführung der Dimensionszahl n als variabler (diskreter) Parameter läßt den „Standardfall" $n = 4$ besser beurteilen, d.h. was an ihm speziell ist und was generisch bezüglich n ist. Man nähert sich der naturphilosophischen Frage: *„Warum ist die gemessene physikalische Raumzeit vierdimensional?"*.

Unsere Formeln

$$m_0^2 = \frac{(n-2)\kappa}{4(n-1)c_0 + nc_1 + 4c_2}, \quad m_2^2 = -\frac{\kappa}{c_1 + 4c_2}$$

für die *Massen der Gravitonen* mit Spin 0 und 2 sind bisher nur für $n = 4$ wohlbekannt, allgemein für n Dimensionen neu. Ebenso ist die *Einsteinsche Stärke* der Feldgleichungen 4. Ordnung vorher noch nicht für n Dimensionen berechnet worden.

Nach diesen objektiven Gründen möchte ich mich subjektiven Motivationen zuwenden. Meine Beschäftigung mit Allgemeiner Relativitätstheorie und mit Alternativen Theorien ist ganz wesentlich durch Hans-Jürgen Treders Werk angeregt worden. Sein Wirken hat seinerzeit die öffentliche Wertschätzung der relativistischen Physik erhöht, so daß letztere zunehmend als attraktives Arbeitsgebiet angesehen wurde. Grundlagenprobleme der Physik waren H.-J. Treders großes Thema. Von der profunden Analyse der Einsteinschen Theorie gelangte er folgerichtig zu Alternativen Theorien: Er hat die meisten dieser kritisch untersucht, Beiträge hinzugefügt sowie auch selbst neue Theorien aufgestellt. Wir heben die *Tredersche Tetradentheorie* und die *trägheitsfreie Gravodynamik* hervor. H.-J. Treder und Koautoren haben schon sehr frühzeitig zu Gravitationsfeldgleichungen 4. Ordnung und speziell zu den Bach-Einstein-Gleichungen publiziert.

Persönlich bin ich Professor Treder im Betriebspraktikum im Jahre 1968 an der Sternwarte Babelsberg begegnet (wo ich Computerrechnungen zu einem Sternmodell auf der Basis der Trederschen Tetradentheorie durchführte), bei meinem Forschungsaufenthalt im Sommersemester 1986 am Einstein-Laboratorium in Potsdam-Babelsberg, sowie bei Vorträgen und anderen Gelegenheiten.

Das oben zitierte, gemeinsam mit Bernd Fiedler gefundene *anti-Birkhoff-Theorem* ist konkret durch Hans-Jürgen Treder angeregt worden: Er hielt 1980 an der Universität Leipzig einen Vortrag über Alternative Theorien und äußerte darin die Vermutung, daß die Bach-Einstein-Gleichungen statische zentralsymmetrische Lösungen ohne Singularität (im Ursprung) besitzen. Als (für uns sofort nachvollziehbares) Argument führte er an, daß dies für die entsprechenden linearisierten Gleichungen mit flachem Hintergrund zutrifft. Eine gute Vermutung wirkt stimulierend; die Aussage konnte bewiesen werden.

Für das, was ich aus seinen Schriften und von ihm persönlich gelernt habe sowie für sein stets freundliches Entgegenkommen, möchte ich hier Hans-Jürgen Treder herzlich danken!

4. Arbeiten des Verfassers über Gravitationsfeldgleichungen 4. Ordnung

Mit Bernd Fiedler: Exact solutions of the Bach field equations of general relativity. Rep. Math. Phys. 17 (1980), 15–36.

Le probleme de Cauchy pour les equations de Bach de la relativite generale. Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 292 (1981), 975–977.

Zum Cauchyproblem der Bachschen Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Beitr. z. Analysis 18 (1981), 77–84.

Cauchy's problem for Bach's equations of general relativity. Banach Center Publ. 12 (1983), 225–231.

Mit Bernd Fiedler: Singularity-free static centrally symmetric solutions of some fourth-order gravitational field equations. Astron. Nachr. 304 (1983), 221–229.

Mit Hans-Jürgen Schmidt: On the history of fourth-order metric theories of gravitation. NTM-Schriftenr. Gesch. Naturw., Techn., Med. Leipzig 27 (1990), 41–48.

On the Bach and the Bach-Einstein gravitational field equations. In: H.-J. Schmidt and M. Rainer (eds.): Proc. Symp. Mathematical Cosmology Potsdam 1998, World Scientific, Singapore 1999, 39–45.

Mit M. Abdel-Megied und F. Ibrahim: Matter field equations derived from fourth-order gravity by the Kaluza-Klein principle. Chaos, Solitons & Fractals 14 (2002), 1255–1261.

Mit M. Abdel-Megied und F. Ibrahim: Cauchy constraints and particle content of fourth-order gravity in *n* dimensions. Chaos, Solitons & Fractals 15 (2003), 57–74.

Mit Janusz Garecki: A possible theoretical test for quadratic gravity in $d \geq 4$ dimensions. Rep. Math. Phys. 51 (2003), 197–203.

5. Arbeiten von Hans-Jürgen Treder über Gravitationsfeldgleichungen 4. Ordnung

Unified Field Theory with Einsteinian Photons and Heavy Bosons as Field Quants. Annalen der Physik 32 (1975), 375–382.

Zur unitarisierten Gravitationstheorie mit lang- und kurzreichweitigen Termen (mit ruhmasselosen und schweren Gravitonen). Annalen der Physik 32 (1975), 383–400.

Konform-Invarianz, Skalen-Invarianz, Eichtransformationen und allgemeine Relativität. In: 75 Jahre Quantentheorie. Akademie-Verlag, Berlin 1977, 281–293.

Zur Struktur der allgemein-relativistischen Gravitationsgleichungen. Tensor 32 (1978), 51–61.

Mit H. v. Borzeszkowski und W. Yourgrau: Gravitational Field Equations of Fourth Order and Supersymmetry. Annalen der Physik 35 (1978), 471–480.

Mit H. v. Borzeszkowski und W. Yourgrau: On Singularities in Elektrodynamics and Gravitational Theory. Astronomische Nachrichten 300 (1979), 57–62.