Gennadi A. Leonov und Volker Reitmann

Zum Wirken Leonhard Eulers in St. Petersburg aus der Sicht der Stabilitätstheorie elastischer Systeme

1. Leonhard Euler in St. Petersburg

Die Autoren LEONOV[1] [2] *und REITMANN*[3] *forschen und lehren an der einstigen langjährigen Wirkungsstätte Eulers in St. Petersburg.*

Im Jahre 1724 wurden durch den russischen Imperator Peter dem Großen die Petersburger Akademie und die Akademische Universität gegründet. Als eine der ersten Akademiemitglieder wurden die beiden älteren Söhne von Johann Bernoulli, Nikolay und Daniel Bernoulli, nach St. Petersburg eingeladen. Leonhard Euler, der im Jahre 1723 zusammen mit dem dritten Sohn von J. Bernoulli, Johann Bernoulli (II), die Fakultät der freien Künste der Baseler Universität beendet hatte, und unter Anleitung von J. Bernoulli Studien zur Mathematik betrieben hatte, erhielt 1726, nach Fürsprache durch D. Bernoulli, vom Präsidenten der Petersburger Akademie L.L. Blumentrost eine Einladung zur Mitarbeit an der Akademie. Schon 1727 traf Euler in Russland ein und arbeitete an der St. Petersburger Akademie bis zum Jahre 1741 an den verschiedensten Themen aus Mathematik, Mechanik und anderen Gebieten. Erst 1741, als sich nach dem Tode der russischen Imperatorin Anna die gesellschaftlichen Bedingungen für die Akademie radikal verschlechterten, übersiedelte Euler von St. Petersburg nach Berlin, um sich dort unter Fried-

1 Korrespondierendes Mitglied der RAW, Professor der Staatsuniversität St.Petersburg, Leonov@math.spbu.ru

2 Die Teilnahme an der Plenarsitzung der Leibniz-Sozietät e.V. aus Anlass des 300. Geburtstages von LEONHARD EULER am 12.4.07 in Berlin wurde durch die finanzielle Unterstützung der Leibniz- Sozietät e.V. und des Deutschen Akademischen Austauschdienstes (DAAD) ermöglicht, wofür an dieser Stelle herzlich gedankt sei.

3 Professor der Staatsuniversität St.Petersburg, DAAD-Langzeitdozent, vreitmann@math.spbu.ru

rich dem Großen als Vizepräsident und Direktor der mathematischen Klasse wesentlich an der Organisation der Berliner Akademie zu beteiligen. In Berlin arbeitete Euler bis zum Jahre 1766, blieb aber auch ausländisches Mitglied der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften. In wissenschaftlicher Hinsicht waren diese Jahre äußerst fruchtbar für ihn. Viele seiner Arbeiten aus dieser Zeit veröffentlichte Euler in den Schriften der St. Petersburger Akademie.

Nachdem sich seine Beziehungen zu Friedrich dem Großen verschlechtert hatten, nahm Euler die Einladung der russischen Imperatorin Katerina II. an und kehrte nach St. Petersburg zurück, wo er an der Akademie der Wissenschaften und an der Akademischen Universität bis zu seinem Tode im Jahre 1783 wirkte. Begraben wurde Euler auf dem evangelischen Smolensker Friedhof auf der Wassiliewskii-Insel, wo er in einem Haus am Leutnant-Schmidt-Ufer mit seiner Familie gelebt hatte. Im Jahre 1957, anlässlich der Feierlichkeiten zum 250.Geburtstag, wurde Eulers Grab in die Nekropole des Alexander-Newskii-Klosters überführt.

Die hervorragenden wissenschaftlichen Leistungen Eulers wurden durch die St. Petersburger Akademie und die St. Petersburger Staatliche Universität hoch gewürdigt. Davon zeugen auch die Skulptur Eulers im Gebäude der Akademie und die große Freske über dem Haupteingang der Mathematisch-Mechanischen Fakultät. Auf der Freske ist Euler dargestellt, zusammen mit anderen bedeutenden Mathematikern und Mechanikern wie Euklid, Lobachewsky, Lyapunov, Archimedes, Gauss, Galilei,Kopernikus und Newton.

Euler hat sich in seinen Arbeiten mit sehr unterschiedlichen mathematischen Themen beschäftigt. Dazu gehören u.a. wichtige Ergebnisse auf den Gebieten Analysis, Algebra, Geometrie, Differentialgleichungen, Zahlentheorie, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Hervorzuheben sind auch seine Arbeiten zur allgemeinen Mechanik, Hydromechanik, Akustik, Himmelsmechanik und Stabilität elastischer Systeme [18]. Gerade das letztere Gebiet hat ihn über Jahre hinweg ständig interessiert und durch ihn eine wesentliche Bereicherung erfahren. Im nächsten Abschnitt soll deshalb dieser Aspekt der Tätigkeit Eulers in St. Petersburg besonders hervorgehoben werden.

2. Euler und die Stabilitätstheorie elastischer Systeme

Schon J. Bernoulli hat sich in seiner Arbeit [2] mit den elastischen Gleichgewichtsformen eines Balkens beschäftigt und einzelne Lösungen ermittelt.

In seinem Brief an Euler ([1]) hat D. Bernoulli auf diese Aufgabe hingewiesen und die Möglichkeiten beschrieben, zur Lösung des Problems Energie-Integrale zu verwenden. Diese Methode wurde von Euler in seiner Arbeit [4] in voller Breite entwickelt.

Die Arbeit enthält 6 Kapitel (wir zitieren nach [8]):

1. De methodo maximorum et minimorum ad lineas curvas inveniendas applicata in genere.

2. De methodo maximorum et minimorum ad lineas curvas inveniedas absoluta.

3. De inventione currarum maximi minimive proprietate praeditarum, si in ipsa maximi minimive formula insunt quantitates indeterminatae.

4. De usu methodi hactenus traditae in resolutione varii generis quaestionum.

5. Methodus, inter omnes curvas eadem proprietate praeditas, inveniendi eam quae maximi minimive proprietate grudeat.

6. Methodus, inter omnes curvas pluribus proprietatibus communibus gaudentes, eam determinandi quae maximi minimive proprietate praedita sit.

Außer den 6 Kapiteln finden sich noch 2 Additamenta:

I. De curvis elasticis.

II. De motu projectorum in medio non resistente, per methodum maximorum ac minimorum determinando.

In der Arbeit [4] wurden durch Euler die Grundlagen der modernen Variationsrechnung gelegt und notwendige Bedingungen für das Extremum von Funktionalen formuliert, die später als Euler-Lagrange-Gleichungen bezeichnet wurden.

Euler verwendet zur Untersuchung des elastischen Problems einen Stabilitätsbegriff, der sich an experimentellen Erfahrungen orientiert. Er bezeichnet (siehe z.B. [19]) das Gleichgewicht eines elastischen Systems als stabil bei gegebenen äußeren Kräften, wenn nach dem statischen Anlegen und anschließenden Aufheben einer kleinen Anregung das System zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Ist das nicht der Fall, nennt Euler das System instabil. Der kleinste Parameterwert der äußeren Anregung, bei dem das System erstmalig instabil wird, nennt Euler Bifurkationswert, da bei diesem Wert auch eine Verzweigung der Lösungen zu beobachten ist.

Für das betrachtete Stabilitätsproblem wird erstmalig das Auftreten von Instabilitäten in Festkörpern, als Ausbeulen oder Knicken bezeichnet, als ein Bifurkationsproblem diskutiert. Für den kritischen Parameter der Stabknickung gibt Euler genaue Abhängigkeiten von den Parametern der (stationären) Stabgleichung an, die heute als Eulersche Knicklasten bezeichnet werden. Zur Analyse des Bifurkationsverhaltens wird von Euler das Ausgangsproblem linearisiert und, erstmalig in der Literatur, auf ein Spektralproblem zurückgeführt. Wie sich in neueren Untersuchungen herausstellte, sind die stationären Eulerschen Knicklasten für dynamische Probleme nur näherungsweise gültig und müssen deshalb durch Bifurkationswerte des zeitabhängigen Systems ersetzt werden.

Mit diesem Ziel wird der Ausbeulprozeß als Instabilität eines dynamischen Systems betrachtet und eine Stabilitätsauffassung im Sinne von A.M. Lyapunov [20] zugrunde gelegt. Damit können zahlreiche Kriterien der sogenannten ersten und zweiten Methode von Lyapunov zur Untersuchung der Stabilität eingesetzt werden. Der Nachteil der Übertragung des Lyapunov'schen Stabilitätsbegriffs auf die Untersuchung elastischer Probleme liegt darin, daß dieser für unendliche Zeitintervalle gilt, was den experimentellen Erfahrungen widerspricht. Naheliegend ist es deshalb, Stabilität auf einem endlichen Zeitintervall zu betrachten. Dieser Ansatz wurde erstmalig von N.Y. Chetaev [21] eingeführt und bedeutet in der Anwendung auf elastische Systeme wieder eine Annäherung an den Standpunkt von Euler. Für den Stab kann eine Variante des Stabilitätsproblems auf endlichem Zeitintervall folgendermaßen definiert werden: Gegeben sei ein endliches Zeitintervall $[0, T]$. Bestimmt werden sollen die kritischen Parameterwerte der Belastung, bei denen die maximale Durchbiegung des Stabes eine vorgegebene Größe nicht überschreitet.

Das von Euler und Bernoulli untersuchte Problem der möglichst vollständigen Beschreibung aller Gleichgewichtslagen eines elastischen Stabes wird auch in aktuellen Arbeiten von Mechanikern der St. Petersburger Universität weiter verfolgt. So konnten von N.F. Morozov und P.E. Tovstik in einer kürzlich veröffentlichten Arbeit [15] die Gleichgewichtslagen eines elastischen Stabes unter Nebenbedingungen für die Verschiebungen hergeleitet werden.

In einer weiteren Arbeit [5] untersucht Euler die Eigenschwingungen eines Fadens, wenn für den Schwingungsvorgang die Differentialgleichung

$$\frac{ddz}{dt^2} = aa\Big(\frac{ddz}{dx^2}\Big) + \frac{b}{x}\Big(\frac{dz}{dx}\Big) + \frac{c}{xx}z \tag{1}$$

betrachtet wird. Als physikalischer Hintergrund für Gleichung (1) kann beispielsweise der Stoß eines festen Rotationskörpers auf eine biegsame Membran dienen, wobei die Geschwindigkeit des Stoßes als konstant vorausgesetzt wird. In der Membran entstehen hierbei zylindrische Wellen mit Unstetigkeiten und rein elastische Wellen. Nimmt man an, dass in der Membran zwei Zonen mit rein radialen bzw. transversal radialen Bewegungen entstehen, so erhält man für die elastischen Wellen der radialen Bewegung eine Gleichung vom Typ (1), in der x die radiale Veränderliche ist.

In ähnlicher Weise hat Euler die Eigenschwingungen von Membranen mit rechteckigen oder kreisförmigen Umrissen untersucht, wobei er die rechteckige Membran als ein System von rechtwinklig zueinander verlaufenden biegeweichen Fäden betrachtet. Er kommt dabei in [22] zu der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{ddz}{dt^2} = ee\Big(\frac{ddz}{dx^2}\Big) = ff\,\frac{ddz}{dy^2}\,. \tag{2}$$

In diesen, in der Originalversion von Euler geschriebenen Differentialgleichungen (1) und (2) sind die partiellen Ableitungen durch einfaches d bezeichnet; aa, b, c, ee und ff sind Konstanten; z ist die Durchbiegung des Fadens bzw. der Membran.

Im Unterschied zu Euler interpretiert J. Bernoulli (II) in seiner, der Petersburger Akademie vorgelegten Arbeit [3], eine Platte schon als ein System von rechtwinklig zueinander angeordneten Balken (siehe dazu [17]). Die von ihm in [3] angegebene Gleichung für die Durchbiegung im stationären Fall lautet dazu

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \frac{z}{c^4}\,. \tag{3}$$

Hierbei ist z wieder die Durchbiegung; c ist eine Konstante. Bei steifen Platten muss (3) noch durch einen Torsionsterm ergänzt werden.

In moderner Auffassung als Anfangswert-Randwertproblem lautet die nach [3], [5] benannte Euler-Bernoulli'sche Balkengleichung dann ([23])

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = f(t,x)\,, \qquad 0 < x < l\,, \quad t > 0\,,\\
&z(t,0) = \frac{\partial z}{\partial x}(t,0) = 0\,,\\
&EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(t,l) = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)(t,l) = 0\,,\\
&z(0,x) = z_0(x)\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial t}(0,x) = z_1(x)\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Hierbei ist $z(t,x)$ die transversale Verformung des Stabes, $f(t,x)$ ist eine äußere Anregung, $EI(t,x)$ ist der Steifigkeitskoeffizient, $z_0(x)$ und $z_1(x)$ sind vorgegebene Anfangsfunktionen.

Die Euler-Bernoulli'sche Plattengleichung lässt sich aus heutiger Sicht als Anfangswert-Randwertproblem wie folgt formulieren ([23]). Sei Ω ein beschränktes glattes Gebiet in IR^n mit Rand Γ und sei $n \leq 3$. Gesucht wird eine Funktion $z(t,x)$ (aus einer bestimmten Klasse), die folgenden Bedingungen genügt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \triangle^2 z = f(t,x) \quad \text{in} \quad (0,T] \times \Omega\,, \\
&z = g_1 \qquad \text{auf} \qquad (0,T] \times \Gamma =: \Sigma\,, \\
&\triangle z = g_2 \qquad \text{auf} \qquad \Sigma\,, \\
&z(0,\cdot) = z_0\,, \qquad z_t(0,\cdot) = z_1 \quad \text{in} \quad \Omega\,.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Auch hier sind f, g_1, g_2, z_0 und z_1 vorgegebene Funktionen; $(0,T]$ ist ein Zeitintervall.

Die von Euler und Bernoulli vorgeschlagene Plattengleichung ist nur für kleine (im Vergleich zur Plattendicke) Auslenkungen geeignet. Die Vervollkommnung dieser Gleichungen erfolgte vor allem durch die Arbeiten von G. Kirchhoff ([10]). Es sei darauf hingewiesen, dass Kirchhoff als Professor für Physik der Universitäten Heidelberg (1854-1875) und Berlin (1875-1887), seit dem Jahre 1862 auch als Korrespondierendes Mitglied der St. Petersburger Akademie fungierte.

In seinen "Vorlesungen über mathematische Physik" ([10]) entwickelte Kirchhoff bereits eine Plattentheorie, in der die Verschiebungen nicht mehr als klein im Vergleich zur Plattendicke angesehen werden müssen. Ferner führte Kirchhoff das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ein.

Sowohl die auf Euler und Bernoulli als auch auf Kirchhoff zurückgehenden Plattengleichungen sind aus heutiger Sicht weit davon entfernt, eine abgeschlossene Theorie darzustellen. Vor allem Regularitätsprobleme, selbst für den linearen Fall, können nur mit großem Aufwand gelöst werden ([12, 13]). Ergänzt wird die durch Euler und Bernoulli initiierte Thematik in der Gegenwart durch solche Fragestellungen, wie die optimale Steuerung von Platten über den Rand ([12, 13]) oder die Absicherung bestimmter Formen von Stabilität, um ein Ausbeulen zu vermeiden. Verwendet werden dazu u.a. auch Frequenzmethoden für Differentialgleichungen in Hilberträumen ([12]-[14]).

3. Nachwuchsförderung im Sinne Eulers

Neben den starken Impulsen, die von Euler für die Forschung auf zahlreichen Gebieten der Mathematik und Mechanik ausgingen, soll auch auf sein äußerst umfangreiches Wirken in der mathematischen Ausbildung der Gymnasiasten und Studenten im damaligen Russland hingewiesen werden. Eine umfangreiche Studie zu dieser Thematik stellt das anlässlich des 300-jährigen Euler-Jubiläums erschienene Buch von G.S. Polyakova ([16]) dar.

Für einige junge Wissenschaftler der St. Petersburger Universität ist der Name Eulers auch mit der finanziellen Unterstützung für ihr Studium verbunden. So erhielten in den letzten Jahren folgende Studenten und Aspiranten der Mathematisch-Mechanischen Fakultät ein Euler-Stipendium des DAAD:

K. Pimenov (1998), S. Kryshevich (1998/99), D. Chelkak (1998/99), A. Kaschtanov (1999/00), N. Kusnetsov (2000/01), M. Nifontova (2000/01), S. Olenchuk (2000/01), E. Strigun (2000/01), O. Proskurnin (2004/05), A. Koslova (2005/06), P. Jakovlev (2006/07), A. Fedorov (2008).

Als eine weitere Form der Unterstützung für den wissenschaftlichen Nachwuchs wurden an der St. Petersburger Universität Euler-Fonds gegründet (www.euler-foundation.org).

Literatur

[1] Bernoulli, D., Correspondance math. et phys., Bd.2, Brief 26, St. Petersburg (1843).

[2] Bernoulli, J., Acta eruditorium, Opera, Bd.1, Leipzig (1694), s.576. (1789).

[3] Bernoulli, J. (II), Nov.Acta Petropolitina, 5 (1789).

[4] Euler, L., Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gandeutes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Apud Marcum-Michaelum Bousquest & socius, Lausannae & Genevae (1744). Deutsch: Methode, Curven zu finden, denen eine Eigenschaft im höchsten oder geringsten Grade zukommt oder Lösung des Isoperimetrischen Problems, wenn es im weitesten Sinne des Wortes aufgefaßt wird, Klassiker der exakten Wissenschaften, 46, Leipzig (1894).

[5] Euler, L., Recherches sur l'intégration de l'équation $(\frac{ddz}{dt^2}) = aa(\frac{ddz}{dx^2}) + \frac{b}{x}(\frac{dz}{dx}) + \frac{c}{xx}z$, Mélanges de philosophie et de mathématique de la société royale de Turin, 3 (1766), 60-91.

[6] Euler, L., De Sono Companarum, Nov. Comm. Petropolitanae, 10 (1776).

[7] Fuss, N., Eloge de monsieur Léonard Euler, L' Académie Impériale des Sciences, St. Pétersbourg (1783).

[8] Hagen, J.G., Index Operum Leonardi Euleri, Verlag Felix L. Dames, Berlin (1896).

[9] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Ergänzungsband 1: Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Bearbeitet von G. Eneström, B.G. Teubner, Leipzig (1910).

[10] Kirchhoff, G., Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik, 4. Auflage, B.G. Teubner, Leipzig (1897). Russische Übersetzung (2.Auflage): URSS, Moskau (2006).

[11] Krylov, A.N., Leonhard Euler, Verlag d. Akademie der Wissenschaften der UdSSR (1933). (Russisch)

[12] Lasiecka I. and R. Triggiani, Regularity theory for a class of nonhomogenous Euler Bernoulli equations: a cosine operator approach. Bollett. Unione Mathem. Haliana UMI, 7, 2 - B (1989), 199 - 228.

[13] Lasiecka I. and R. Triggiani, Exact controllability and uniform stabilization of Kirchhoff plates with boundary controls only in $\triangle$w$|\Sigma$. J. Diff.Equs., 93 (1991), 62 - 101.

[14] Likhtarnikov, A.I. and V.A. Yakubovich, The frequency theorem for equations of evolutionary type. Sibirian. Math.Journ., 17 (5)(1976), 1069 - 1085.

[15] Morosov, N.F. and P.E. Tovstik, Stability of a compressed rod under restrictions on the displacement, Doklady Physics, 52, 1(2007), 35 - 39.

[16] Polyakova, G.S., Leonhard Euler und die mathematische Bildung in Russland, URSS, Moskau (2007). (Russisch)

[17] Volt'mir, V.S., Stabilität deformierbarer Systeme, Nauka, Moskau (1976). (Russisch)

[18] Yakovlev, V.I., Anfänge der Mechanik, R&C Dynamics, Moskau (2005). (Russisch)

[19] Zubchaninov, V.G., Stabilität und Plastizität, Nauka, Moskau (2007). (Russisch)

[20] Lyapunov, A.M., Das allgemeine Stabilitätsproblem der Bewegung, Kharkov (1892). (Russisch)

[21] Chetaev, N.G., Stabilität der Bewegung, Izd-vo, Akad. Nauk SSSR, Moskau (1962).

[22] Euler, L., De motu vibratorio tympanorum, Novi comentarii Acad. Petropolit. 10 (1766), 243-260.

[23] Lagnese, J. and J.L. Lions, Modelling, Analysis and Control of Thin Plates, Masson, Paris (1989).