

Hannelore Bernhardt

Leonhard Euler – Leben und Werk. Eine Einführung

Der Schweizer Mathematiker, Generaldirektor der Euler-Kommission der Jahre 1928–1965 und Herausgeber von 37 Bänden der Eulerschen Werke, Andreas Speiser, schrieb 1939:

„Wenn man das geistige Panorama, das Euler offen stand und den immerwährenden Erfolg in seiner Arbeit ermisst, so müsste er der glücklichste aller Sterblichen gewesen sein, denn niemand hat je derartiges erlebt. ... Seine Auffassung der Mathematik hat das meiste, was im 19. Jahrhundert galt, überdauert und wird mit jedem Tag moderner.“ (zit. nach Fellmann, 144)

In der Tradition der vom dezimalen Positionssystem bestimmten Säkularfeiern begeht die wissenschaftliche Welt und mit ihr die Leibniz-Sozietät in diesem Jahr den 300. Geburtstag von Leonhard Euler. Für vorausgegangene Euler-Jubiläen in Berlin erinnern wir an die Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages, die von der Berliner Mathematischen Gesellschaft im Jahre 1907 herausgegeben wurde; eine zu diesem Anlass angebrachte Gedenktafel in der Behrenstraße gegenüber der Komischen Oper verweist noch heute auf den Wohnsitz des großen Gelehrten ab 1743 während des Vierteljahrhunderts seines Berliner Aufenthaltes von 1741–1766. Zu nennen sind die Würdigung Eulers mit einer Jubiläumsveranstaltung der Deutschen Akademie der Wissenschaften in Kooperation mit der Akademie der Wissenschaften der UdSSR im Jahre 1957 und der Festakt und die anschließende wissenschaftliche Konferenz der Akademie der Wissenschaften der DDR im September 1983 anlässlich des 200. Todestages Eulers, u. a. mit einem Festvortrag von Adolf Pawlowitsch P. Juschkewitsch und einem Beitrag unseres unvergessenen Akademiehistorikers Conrad Grau über „Leonhard Euler und die Berliner Akademie der Wissenschaften“, den er wenig später auf einem Symposium der sowjetischen Akademie der Wissenschaften vorgetragen hat. Die aus den genannten Anlässen von den Akademien der Wissenschaften gestifteten Euler-Medaillen sind in dem soeben erschienenen Band „Die Berliner Akademie der Wissenschaften und ihre Auszeichnungen 1946–2006“ abgebildet.¹

1 H. Heikenroth: Die Berliner Akademie der Wissenschaften und ihre Auszeichnungen 1946–2006. Berlin 2007, 295–310.

In der Stadt Basel, deren Bürger Euler Zeit seines Lebens blieb, war der 200. Geburtstag im Jahre 1907 Anlass gewesen, die „Leonhardi Euleri Opera Omnia“ zu initiieren. Auch in diesem Jahr findet in seiner Vaterstadt zu seinen Ehren eine Vielzahl wissenschaftlicher Veranstaltungen statt.²

Der Lebensweg Eulers

Am 1. Dezember des Jahres 1767 diktierte der 60jährige Leonhard Euler seinem ältesten Sohn Johann Albrecht „einen Lebens-Lauf“ in die Feder: Wir lesen dort:

„Ich, Leonhard Euler bin A. 1707 den 15^{ten} April ... zu Basel geboren. Mein Vater war Paulus Euler, damals designirter Prediger nach dem eine Stund von Basel gelegenen Dorf Riehen: und meine Mutter hiess Margaretha Bruckner. Bald hierauf begaben sich meine Eltern nach Riehen, wo ich bey Zeiten von meinem Vater den ersten Unterricht erhielt; und weil derselbe einer von den Discipeln des weltberühmten Jacob Bernoulli gewesen, so trachtete er mir sogleich die erste Gründe der Mathematic beizubringen, und bediente sich zu diesem End des Christophs Rudolfs Coss³ mit Michaels Stiefels Anmerkungen, wo rinnen ich mich einige Jahr mit allem Fleiß übte. Bey zunehmenden Jahren wurde ich in Basel bey meiner Grossmutter an die Kost gegeben, um theils in dem Gymnasio daselbst, theils durch Privat Unterricht den Grund in den Humanoribus zu legen und zugleich in der Mathematic weiter zu kommen. A. 1720 wurde ich bey der Universität zu den Lectionibus publicis promovirt: wo ich bald Gelegenheit fand dem berühmten Professori Johanni Bernoulli bekannt zu werden. ... Privat Lektionen schlug er mir ... ab, gab mir aber einen weit heilsameren Rath, welcher darin bestund, dass ich selbst einige schwerere mathematische Bücher ... mit allem Fleiss durchgehen sollte und ... gab mir alle Sonnabend Nachmittag einen freyen Zutritt bey sich, und hatte die Güte mir die gesamten Schwierigkeiten zu erläutern, welches mit so erwünschtem Vortheile geschah, dass ... dadurch zehn andere

- 2 Öffentlicher Festakt am 20. April 2007 mit einer Festrede des Vorstehers des Mathematischen Instituts der Universität Basel; Jahreskongreß 2007 der Akademie der Wissenschaften der Schweiz am 13./14. September; Ringvorlesung im Sommersemester 2007 zu Leonhard Eulers Leben und Werk an der Universität Basel; mehrere Ausstellungen.
- 3 Mit *coß* (lat. res, ital. cosa – Ding, Sache) bezeichneten die Rechenmeister des 15. Jahrhunderts (Cossisten) die Unbekannte und ihre einfachsten Wurzeln und Potenzen. Die von Rudolff 1525 in Strasburg veröffentlichte *Coß* wurde von Michael Stifel 1553 durch wichtige Erkenntnisse erweitert und verbessert (u. a. durch einen Lösungsweg für kubische Gleichungen).

auf einmal verschwanden, welches gewiss die beste Methode ist, um in den mathematischen Wissenschaften glückliche Progressen zu machen.

1723 wurde ich zum Magister promoviert, nachdem ich anderthalb Jahr vorher ... primam lauream erhalten hatte. Nachdem musste ich mich auf Gutbefinden meiner Familie bey der Theologischen Fakultät einschreiben lassen, da ich mich denn ausser der Theologie besonders auf die griechische und Hebräische Sprache appliciren sollte, womit es aber nicht recht fort wollte, weil ich meine meiste Zeit auf die mathematische Studia verwendete. ... Um dieselbige Zeit wurde die neue Academie der Wissenschaften in St. Petersburg errichtet, wohin die beyden ältesten Söhne des H. Johannis Bernoulli beruffen wurden; da ich denn eine unbeschreibliche Begierde bekam mit denselben zugleich A. 1725 nach Petersburg zu reisen. ... Die gemeldten jüngeren Bernoulli gaben mir ... die feste Versicherung, dass sie mir ... in Petersburg eine anständige Stelle daselbst auswürcken wollten, welches auch würcklich bald darauf erfolget, da ich um meine mathematische Kenntnüss auf die Medizin zu appliciren bestimmt wurde. Weil ... ich meine Abreise nicht vor dem künftigen Frühjahr vornehmen konnte, so liess ich mich inzwischen bey der medicinischen Facultät in Basel immatriculiren und fing an mit allem Fleiss auf das Studium medicum zu appliciren: inzwischen wurde in Basel die Professio Physica erledigt, und weil sich dafür eine Menge Competenten meldete, so liess ich mich auch in die Zahl derselben aufschreiben, und hielt bey dieser Gelegenheit als Praeses meine Disputationem de Sono. Inzwischen rückte das Frühjahr A. 1727 heran und ich trat meine Abreise von Basel ... an. ... Weil die Reise gegen vier Wochen daurete, so ... kam ich an eben demjenigen Tage an, da die hochsel: Kayserin Catherina I. Alexievna Todes verblichen war, und fand also in Petersbug bey der Academie alles in der grössten Consternation. Doch hatte ich das Vergnügen, ausser den jüngeren H. Daniel Bernoulli, indem sein älterer Herr Bruder Nicolaus inzwischen verstorben war, noch den sel. H. Prof. Hermann ... anzutreffen, welche mir allen nur ersinnlichen Vorschub thaten. Meine Besoldung war 300 Rbl. ... und da meine Neigung ... allein auf die mathematischen Studien gerichtet war, so wurde ich zum Adjuncto Matheseos sublimioris bestellt. ... Wobey mir die Freiheit erteilt wurde den academischen Versammlungen beyzuwohnen, und daselbst meine Ausarbeitungen vorzulesen, welche auch schon damals den academischen Commentarien einverleibt wurden. ... A. 1730 ... wurde ich ... zum Professor Physices ernannt, und machte einen neuen Contract auf 4 Jahre, nach welchem mir die zwey ersteren Jahre 400 Rbl., die zwey letzteren Jahre aber 600 Rbl. nebst 60 Rbl. für Wohnung, Holz und Licht accordiert wurden. Zur Zeit dieses Contractes verheyratete ich mich A.

1733 um Weyhnachten mit meiner Frau Catherina Gsell, und da um dieselbe Zeit der Hr. Prof. Daniel Bernoulli auch nach seinem Vaterlande zurückgereiset, so wurde mir seine Professio Matheseos sublimioris aufgetragen. Als ...A. 1740 Seine noch glorreich regierende Königl. Majestät in Preussen zur Regierung kamen, so erhielt ich eine allergnädigste Vocation nach Berlin, welche ich auch, nachdem die gloriwürdige Kayserin Anne verstorben war, und es bey der darauffolgenden Regentschafft ziemlich misslich auszusehen anfang, ohne einiges Bedenken annahm, und ... A. 1741 mich mit meiner ganzen Familie zu Wasser nach Berlin verfügte, wo seine Königl. Majestät mir meine Besoldung von 1600 Thl. ... als Gage festzusetzen geruhete.⁴

Die wissenschaftliche Arbeit Eulers während der anschließenden 25 Jahre hier in Berlin und sein Wirken für die Berliner Akademie können nicht hoch genug bewertet werden. Nicht nur, dass er während dieser Zeit etwa den Drittelteil seines gesamten wissenschaftlichen Werkes verfasst bzw. publiziert hat, enge Verbindung mit der Petersburger Akademie aufrecht erhielt, von der er jährlich noch ein Salär von 200 Rubeln erhielt, russische Schüler bei sich aufnahm und einen umfangreichen Briefwechsel pflegte, war seine Tätigkeit eng mit der Entwicklung der akademischen Einrichtung verbunden, die sich bei seinem Eintreffen in Berlin noch Kurfürstlich-Brandenburgische Sozietät der Wissenschaften nannte, jedoch keine große Bedeutung besaß. Wie Harnack berichtet⁵, war auch Euler mit den veralteten Zuständen unzufrieden, die Klassensitzungen wurden schlecht besucht, es hätten keine anregenden Diskussionen stattgefunden. Die erste Aufgabe Eulers in Berlin bestand in der Herausgabe des Bandes 7 der *Miscellanea Berolinensis* im Jahre 1743, der zugleich der letzte Band war und bereits fünf seiner Arbeiten enthielt, die so umfangreich waren, dass weitere zwei Arbeiten Eulers nicht mit aufgenommen werden konnten.

Im Jahre 1744 wurde die Sozietät nach einer Reihe von Gutachten zur ihrer Fortexistenz mit der ein Jahr zuvor gegründeten *Nouvelle Société Littéraire*, der auch Euler angehörte,⁶ zur Königlichen Akademie der Wissenschaften zusammengelegt. Euler, seit 1741 Direktor der Sternwarte, wurde nun auch Direktor der Mathematischen Klasse der Akademie. Nach Beendigung der Schlesischen Kriege berief Friedrich II den Franzosen Pierre-Louis Moreau des Maupertuis zum ständigen Präsidenten der Akademie, der

4 Zitiert nach E. A. Fellmann: Leonhard Euler. Reinbeck bei Hamburg 1995, 11–13.

5 A. Harnack: Geschichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin Band I, erste Hälfte. Berlin 1900, 265.

6 Auf ihrer ersten Sitzung am 1. August 1743 hatte Euler mehrere Arbeiten vorgelegt und über mechanische Probleme referiert.

ein neues Réglement unter Berücksichtigung seiner eigenen führenden Stellung an der Akademie vorlegte, die sich nun Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres nannte.⁷ Auf ihrer ersten Sitzung am Donnerstag, dem 2. Juni 1746, wurden die Statuten verlesen.⁸

Das Verhältnis der beiden Gelehrten Euler und Maupertuis hat Eduard Winter in den Registres so beschrieben: „Euler ist durchaus der Führende in dieser Verbindung und er sucht den Einfluß, den er auf Maupertuis hat, auch mit vollem Erfolg für die Entwicklung der Akademie geltend zu machen. Diese Präsidentschaft lässt Euler die Tatsache verschmerzen, dass ein Gelehrter unter seinem Niveau ... über ihm an der Spitze der Akademie stand.“⁹ Euler war jedoch Mitglied des Direktoriums und vertrat in dieser Position Maupertuis als Präsidenten während dessen häufiger Abwesenheit von Berlin. Zugleich überhäufte ihn der König mit vielfältigen Aufgaben, so mit der Beschaffung von Geräten für die Sternwarte, der Pflege des Botanischen Gartens, mit Maßnahmen zur Nivellierung des 70 km langen Finow-Kanals und beim Bau von Dämmen und Brückenkonstruktionen in Ostfriesland, zur Trockenlegung des Oderbruchs, zur Anlage von Wasserspielen in Sanssouci. Hinzu kamen u. a. die Aufsicht über die Salzbergwerke in Schönebeck, die Verbesserung der Medaillen und Münzen, Berechnungen und Gutachten zur Organisation von staatlichen Lotterien (1749 vermeldete Euler belustigt einen Lotteriegewinn von 600 Reichsthalern, „welches ebenso gut ist, als wenn ich dieses Jahr einen Pariserpreis gewonnen hätte“), die Berechnung von Renten und die Einrichtung von Witwenkassen, vor allem aber die Rationalisierung des Kalendervertriebes, einer wichtigen Einnahmequelle der Akademie, die Friedrich II. unter Eulers Leitung nicht ergiebig genug erschien. Viele dieser praktischen Aufgabenstellungen mündeten im Sinne von „*theoria cum praxi*“ des Akademiegründers Leibniz in mathematisch-theoretische Untersuchungen und führten zu weitreichenden Ergebnissen. Erinnert sei an Eulers hydrodynamische und hydrotechnische Arbeiten zu Grundlagen der Wasserturbinen und an Untersuchungen zum Wirkungsgrad von Maschinen. Ein Büchlein über Ballistik übersetzte Euler auf Wunsch des Königs aus dem Englischen und erweiterte es von 192 auf 736 Seiten.¹⁰

7 Vgl. Fußnote 5, 247–299.

8 Vgl. Fußnote 5, 299–302.

9 E. Winter: Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766. Berlin 1957, 39.

10 Es handelte sich um Benjamin Robins „*New Principles of Gunnery*“, London 1742. Die Eulersche Überarbeitung „*Neue Grundsätze der Artillerie*“ erschien in deutscher Sprache (!) im Jahre 1745.

Im „Gesamtbericht über die in den Schriften der Akademie von 1700–1899 erschienenen wissenschaftlichen Abhandlungen und Festreden“, die freilich einen „sehr beträchtlichen Theil der ... gelesenen Abhandlungen“ nicht enthalten, sind insgesamt 123 Arbeiten von Euler aufgelistet, in denen er sich vor allem mit Problemen der Infinitesimalrechnung und ferner der „Physik der Materie“, darunter der Mechanik der Punktsysteme und starren Körper, sowie der Potentialtheorie, der Elastizitätstheorie, der Bewegung fester Körper in tropfbaren Flüssigkeiten und Gasen und in mehr als 25 Abhandlungen mit geometrischer Optik, Reflexion, Refraktion, Interferenz und Polarisation sowie der Theorie optischer Instrumente beschäftigte.¹¹

Besonderer Erwähnung bedürfen die Preisaufgaben der Akademie, die „zu den wichtigsten Ereignissen im Geistesleben ganz Europas“ wurden und „jedesmal größte Aufmerksamkeit und reiche Beteiligung von Gelehrten der verschiedensten Nationen“ fanden, von E. Winter als „Teil der Geschichte der europäischen Aufklärung“ gewertet.¹² Euler stellte, löste und begutachtete zahlreiche dieser für die Wissenschaftsentwicklung im 18. Jahrhundert so bedeutsamen Aufgaben. In diesem Kontext spielte die Preisaufgabe des Jahres 1747 eine besondere Rolle, da diese nicht nur fachlich-sachliche Diskussionen, sondern auch wissenschaftspolitische Auswirkungen nach sich zog. Es galt, die Monadenlehre (Wolffscher Prägung) exakt darzustellen, sie zu widerlegen oder ihre Gültigkeit zu beweisen und in letzterem Falle auf ihrer Grundlage die Herleitung der physikalischen Bewegungsgesetze zu leisten.

Als Maupertuis im Jahre 1759 verstarb, wurde ungeachtet seiner großen Verdienste um die Akademie nicht Euler mit dem Amt des Präsidenten betraut, sondern der französische Mathematiker Jean-Baptist le Rond d'Alembert berufen, der jedoch außer zu einigen Besuchen aus Paris nicht nach Berlin kam. Sicher hat es mehrere Gründe dafür gegeben, dass Euler Mitte der sechziger Jahre mit großer Energie begann, seine Entlassung aus Preußens Diensten zu betreiben. Unter anderem erwiesen sich charakterliche und weltanschauliche Diskrepanzen zwischen dem bürgerlich aufgeklärten Gelehrten und dem sich freilich auch aufgeklärt gebenden Despoten als unüberbrückbar und endeten nachgerade in einem offenen Zerwürfnis. Bereits 1746 hatte sich der König über Euler mokierend geäußert:

„Seine Epigramme bestehen in Berechnungen neuer Kurven, irgendwelcher Kegelschnitte oder astronomischer Messungen. Unter den Gelehrten gibt es solche gewaltige Rechner, Kommentatoren, Übersetzer und Kompila-

11 Vgl. Fußnote 5 Band 3, I. Theil 86–90, II. Theil auf mehreren Seiten verstreut.

12 Vgl. Fußnote 9, 33.

toren, die in der Republik der Wissenschaft nützlich, aber sonst alles andere als glänzend sind. Man verwendet sie wie dorische Säulen in der Baukunst. Sie gehören in den Unterstock, als Träger des ganzen Bauwerkes“¹³

Friedrich II. ließ Euler sein Entlassungsgesuch dreimal einreichen, bevor er ihn ziehen ließ. Im Jahre 1766 reiste Euler mit seiner großen Familie nach Petersburg und erhielt von der Zarin Katharina II¹⁴ 10800 Rubel für den Kauf eines großen Hauses zum Geschenk.

Die Jahre 1766 bis 1783 umfassen die dritte, überaus erfolgreiche Schaffensperiode Eulers, in der er allerdings von schweren Schicksalsschlägen nicht verschont blieb: Nahezu völliger Verlust seines Augenlichtes, Tod seiner Frau und seiner beiden Töchter, der Brand seines Hauses und damit Vernichtung vieler Manuskripte. Dennoch waren es Jahre der Erfüllung und Vollendung eines ungewöhnlich vielseitigen Lebenswerkes.

Vieles an Einzelheiten seines Wirkens und (auch persönlichen) Lebens kennt die Nachwelt aus seiner umfangreichen Korrespondenz, Man liest von 3000 bisher edierten Briefen Eulers mit etwa 500 Briefpartnern, Briefe, die – beabsichtigt –, nicht selten vom Umfang und Charakter her wissenschaftliche Abhandlungen waren, der Möglichkeit und Gepflogenheit des wissenschaftlichen Gedankenaustausches im 18. Jahrhundert folgend, dem Kongresse und Tagungen fremd waren. Diese Briefe als hochinteressante wissenschaftshistorische Dokumente geben Auskunft über das vielgestaltige wissenschaftliche Leben an den Akademien und insbesondere über die deutsch-russischen Wissenschaftsbeziehungen jener Jahrzehnte, verraten aber auch manches sehr Persönliche, wie Ein- und Ansichten, Motive des Denken und Handelns, Veränderungen eigener Auffassungen, Beziehungen Eulers zu seinen Kindern, zu Freunden und überhaupt zu Zeitgenossen. Die Publikation der Briefe Eulers begann bereits im Jahre 1843 und ist bis heute nicht abgeschlossen.

Zu Eulers privatem Leben sei angemerkt, dass er – wie von ihm selbst erwähnt – im Jahre 1734 Katharina Gsell, die Tochter eines Kunstmalers, heiratete; aus der Ehe gingen 13 Kinder hervor, jedoch erreichten nur drei Söhne und zwei Töchter das Erwachsenenalter. Der älteste Sohn, Johann Albrecht, war ebenfalls mit Mathematik und Physik befasst¹⁵ und später neben anderen

13 Vgl. Fußnote 4, 86.

14 Im September 1767 wurde Katharina II gebeten, die Ehrenmitgliedschaft der Berliner Akademie anzunehmen, und ein Jahr später wurde ihr als erster Frau in der Akademie „auf Befehl des Königs die wirkliche Mitgliedschaft“ verliehen. Vgl. Fußnote 5, 369/370.

15 Johann Albrecht Euler (1734-1800) wurde sehr zu Freude des Vaters im Jahre 1754 auf Antrag Maupertuis als Mitglied in die Berliner Akademie aufgenommen. Harnack (vgl. Fußnote 5, 85/86) zählt 12 Arbeiten des jungen Johann Albrecht auf, bei denen der Vater wohl einigen Beistand geleistet haben soll.

Gehilfen treuer Mitarbeiter des erblindeten Vaters. Der zweite Sohn verschrieb sich der Medizin, und der dritte brachte es in einer militärischen Laufbahn bis zum General der Artillerie. Bei seinem Tod hatte Euler 26 Enkel. Es wird berichtet, dass Euler ein sorgsamer Familienvater war. Im Jahre 1753 kaufte er in Charlottenburg ein von seiner nach Berlin geholten Mutter betreutes Landgut mit Pferden, 12 Kühen und Kleinvieh, wodurch die „sehr starke Haushaltung mehr als um die Hälfte erleichtert“ werden konnte.¹⁶ Euler liebte die Musik, er spielte Schach, wobei er sich aus mathematischer Sicht besonders mit dem Rösselsprungproblem beschäftigte,¹⁷ – und er rauchte Pfeife.

Das Lebenswerk Eulers

Leonhard Euler war als führender Repräsentant des seinem Jahrhundert eigenen Wissenschaftsbetriebes an den großen europäischen Akademien in St. Petersburg und Berlin abhängig von Gunst und Verständnis der Monarchen für die Wissenschaften, die sie weidlich für sich zu nutzen suchten, sei es aus Gründen des Renommees oder des praktischen Nutzens. 1755 wurde Euler „unter ganz besonders rühmlichen Umständen“ auswärtiges Mitglied der Pariser Akademie. Euler war niemals Professor an einer Universität trotz eines verlockenden Angebotes aus den Niederlanden¹⁸; gewiss, er hatte Schüler und Studenten, hielt Vorlesungen, schrieb Lehrbücher für Schulen und verfasste viele Gutachten. Charakteristisch für Eulers Schriften ist – im Gegensatz etwa zu Leibniz – die außerordentlich große Verständlichkeit seiner Darlegungen, die die Möglichkeit eröffnet, Gedankengänge nachzuvollziehen, vielfach in einer Weise, die uns heute noch geläufig ist. Er beherrschte neben seiner Muttersprache das Latein, damals noch weitgehend die Sprache der Gelehrten, bediente ich aber genauso perfekt des Russischen und des Französischen, letzteres insbesondere in Berlin auf Veranlassung Friedrichs II., der das Deutsche nicht mochte und französische Gewohnheiten und französischen Lebensstil liebte.

Aus der Fülle des Eulerschen Lebenswerkes auch nur das Allerwichtigste, das Wichtigste oder Bedeutendste zu skizzieren, kann nur in einem schwachen Versuch enden.

16 Vgl. Fußnote 4, 93.

17 Vgl. Fußnote 4, 73. Das Problem besteht darin, mit einem Springer alle 64 Felder des Schachbrettes so zu durchlaufen, dass dieser keines der Felder mehr als einmal betritt.

18 Vgl. Fußnote 4, 95.

„Wer sich Euler nähert, wird erschlagen“, hieß es kürzlich bei der Eröffnung einer Euler-Ausstellung hier an der Humboldt-Universität. Im Mathematischen Wörterbuch von Schmidt/Naas (1961 und später) füllen mit dem Namen Eulers verbundene Begriffe volle neun Seiten – von den Eulerschen hydrodynamischen Bewegungsgleichungen über Eulersche Kreisel- und Turbinengleichungen bis zu Eulerschen Winkeln und Eulerschen Zahlen. Etwa 50 Begriffe, Sätze und Verfahren tragen seinen Namen. Seiner Feder entstammen etwa 900 Arbeiten; Berechnungen ergaben, dass dies eine tägliche Schreibleistung von etwa 15 Seiten erforderte.

Was kennzeichnet nun eigentlich die Mathematik dieses 18. Jahrhunderts mit Leonhard Euler und seinem wissenschaftlichen Lebenswerk an der Spitze?

Der fundamentale Ausgangspunkt in diesem Zeitraum vor allem für Euler war die Analysis und der Begriff der Funktion, der funktionalen Zusammenhänge, denen er – vielleicht darf man sagen im Sinne einer ganzheitlichen Betrachtungsweise – in vielen Teilen sowohl der Mathematik selbst als auch in deren Anwendungen auf naturwissenschaftliche und technische Problemstellungen nachspürte.

Newton in England und Leibniz auf dem Kontinent hatten in der zweiten Hälfte des vorausgegangenen Jahrhunderts den Differentialkalkül jeder auf seine Weise explizit formuliert, den Zusammenhang von Differentiation und Integration (Tangenten- und Quadraturproblem) aufgedeckt; Leibniz definierte den Begriff einer Funktion und erarbeitete entsprechende Grundlagen der Handhabbarkeit des neuen Kalküls (von Calculus – das Rechensteinchen).

Es spannt sich ein weiter Bogen von ersten infinitesimalen Vorstellungen der antiken Welt eines Eudoxos, die im XII. Buch der Elemente des Euklid überliefert sind, und den frühen Grenzwertbetrachtungen eines Archimedes, die auf die Quadratur einer Parabel hinauslaufen, über die nun schon den ersten Jahrzehnten des 17. Jahrhunderts angehörenden Arbeiten Cavalieris mit seiner Indivisiblenmethode und des J. Wallis mit seiner Arithmetik der unendlichen Größen bis zu den Ergebnissen des kongenialen Leibniz und Newton.

Eulers und seiner Zeitgenossen Anliegen bestanden nun im Ausbau dieser neuen Methoden der Analysis, die sich als ergebnisreich für die mathematische Behandlung einer Vielzahl von Problemen für viele Gebiete der Mathematik selbst und ihrer Anwendungen mit ihren oft sehr spezifischen Problemen zu erweisen hatte. Die Entwicklung gipfelte bei Euler in drei in in-

nerem Zusammenhang miteinander stehenden Werken zur Analysis, in denen er Vorhandenes um eine große Zahl eigener Ergebnisse bereicherte: „Introductio in analysin infinitorum“¹⁹, „Institutiones calculi differentialis“²⁰ und „Institutio calculi integralis“²¹. Es sind breit angelegte Werke, man hat sie wegen der sichtbaren Bemühungen um Klarheit und Einfachheit als lehrbuchartige Darstellungen charakterisiert. Er führte die Bezeichnungen $f(x)$, i , e , π , Δ , Σ ein und beseitigte manche Unstimmigkeit in den mathematischen Bezeichnungen. In den genannten Lehrbüchern sind die seither geläufigen Regeln der Differential- und Integralrechnung für rationale, irrationale und elementare transzendente Funktionen auch komplexer Variabler und die Untersuchung von Gleichungslösungen enthalten.²² Euler verwandte zur Darstellung und Untersuchung von Funktionen vor allem Potenzreihen und entwickelte damit Ansätze einer allgemeinen Funktionentheorie. Erwähnt sei hier noch die zweibändige „Variationsrechnung“²³, in Sonderheit wegweisend auf Grund des konsequent durchgehaltenen methodischen Vorgehens: Definition, Voraussetzungen, Satz, Schlussfolgerungen.

Wie steht es mit der Algebra? Für Euler waren Algebra und Analysis „eine große Gesamtheit“, Ähnliches galt ihm auch für die Zahlentheorie! Zum Kreis Eulers wissenschaftlicher Vorfahren zählen auch die französischen Mathematiker F. Vieta, der in Verallgemeinerung der speziellen Bezeichnungen mathematischer Gegenstände der Cossisten algebraische Symbole und Bezeichnungen einführte, und R. Descartes, der die geometrische Algebra der Antike durch die Algebraisierung geometrischer Gegebenheiten quasi wieder zurücknahm und damit Ansätze der analytischen Geometrie lieferte, – eine Bezeichnung, die Lacroix 1796 prägte. Euler nun leitete die geometrischen Eigenschaften von Kurven und Flächen algebraisch aus den sie repräsentierenden Gleichungen und nicht aus ihren geometrischen Charakteristika her.

Das erste große Werk Eulers in seiner zweiten Petersburger Periode war die in deutscher Sprache verfasste „Vollständige Anleitung zur Algebra“²⁴, der Lehre von der Auflösung von Gleichungen, besonders wegen ihrer didaktisch geschickten Anlage noch lange benutzt und beliebt. Euler hat hier auch

19 Drei Bände, publiziert 1748, verfasst bereits 1745.

20 Zwei Bände, publiziert 1755, verfasst bereits 1748.

21 Erschienen in drei Teilen zwischen 1768 und 1770, verfasst 1763.

22 Beta- und Gammafunktion sind in der heute geläufigen Form als „Eulersche Integrale erster und zweiter Art“ dargestellt.

23 „Methodus inveniendi“ erschien 1744.

24 „Vollständige Anleitung zur Algebra“ in zwei Bänden erschien 1770.

den Fundamentalsatz der Algebra²⁵ streng formuliert, den allerdings erst Gauß im Jahre 1799 in seiner berühmten Doktordissertation beweisen konnte.

Seit seinen Jugendjahren nahm die Zahlentheorie in Eulers Schaffen breiten Raum ein, wobei er unmittelbar an Untersuchungen seines Vorgängers P. Fermat anschloss und zu weiterführenden zahlentheoretischen Zusammenhängen und Gesetzmäßigkeiten vordrang, so zu Aussagen über Primzahlen, befreundete Zahlen, die numeri idonei; seine analytische Vorgehensweise hat Euler u. a. auf die später nach Riemann benannte Zeta- und die Theta-Funktion mit ihren bemerkenswerten Eigenschaften geführt. Er entdeckte auf rechnerischem Wege das Gesetz der quadratischen Reziprozität und beschäftigte sich mit dem Großen Fermatschen Satz²⁶, den er für $n=3$ verifizieren konnte.

Im Jahre 1736 stellte Euler die „Mechanica sive motus scientia analytice exposita“ fertig, also ein Werk über Mechanik, das für die Physik insofern bahnbrechend war, als er darin erstmals die Newtonsche Dynamik des Massenpunktes mit den neuen analytischen Methoden in der von Leibniz eingeführten zweckmäßigen Schreibweise seines Differentialkalküls verknüpfte. Zugleich sind hier viele wichtige Ergebnisse der Integration partieller Differentialgleichungen zu nennen, darunter das damals viel diskutierte Problem der Lösung der Differentialgleichung für die schwingende Saite.

Nach dem bisher Dargelegten könnte es scheinen, dass uns Euler ausschließlich als Vertreter der später so genannten „reinen Mathematik“ gegenübertritt. Doch neben den bereits oben genannten, von Friedrich II. veranlassten praktischen Arbeiten beschäftigte sich Euler über viele Jahre mit Optik; seine Forschungsergebnisse finden sich in den drei Bänden *Dioptrica*²⁷, in denen sich der damals bereits erblindete Gelehrte als Vertreter der Wellentheorie des Lichtes die Verbesserung optischer Instrumente zum Ziel setzte, Fragen der Vergrößerung, der Lichtstärke, der Farbbrechung des Lichtes bei Durchgang durch ein Linsensystem u. a. untersuchte. Seine Arbeiten zur Astronomie betreffen u. a. die Himmelsmechanik, für die er beispielsweise analytische Methoden zur Bestimmung elliptischer und parabolischer Bahnen fand; erwähnt seien noch seine weitreichenden Untersuchungen zur analytischen Störungstheorie, die er mit Laplace und anderen

25 Dieser Satz besagt, dass eine algebraische Gleichung n -ten Grades genau n Wurzeln besitzt. Gauß hat den Satz später noch mehrmals bewiesen.

26 Der Große Fermatsche Satz besagt, dass für alle $n \geq 3$ die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ nicht in ganzen Zahlen lösbar ist. Weder Euler noch Gauss konnten einen allgemeinen Beweis finden. Erst in den 90er Jahren des 20. Jahrhunderts gelang es Andrew Wiles von der Cambridge University, einen solchen vorzulegen.

27 Die drei Bände „*Dioptrica*“ erschienen zwischen 1769 und 1771.

diskutierte. Im Jahre 1772 veröffentlichte Euler eine zweite Mondtheorie²⁸, die sich noch im 20. Jahrhundert als anregend für Untersuchungen der Mondbewegung erwies, gefolgt von einer praktisch zu nutzenden zweiten Schiffstheorie²⁹.

In seiner Musiktheorie³⁰ interessierte er sich – um daran noch zu erinnern – im Anschluss an pythagoreische Harmonievorstellungen für die mathematischen Gesetze der Konsonanzen und auch für Kompositionslehre.

Der universale Denker Euler zeigte – wie zu erwarten – lebhaftes Interesse auch für philosophische Probleme. In den „Briefen an eine deutsche Prinzessin“³¹ hat Euler eine zusammenfassende Darstellung seiner philosophischen Ansichten insbesondere zu Fragen der Erkenntnistheorie gegeben. Dort heißt es, „dass die Wahrheiten, die innerhalb der Grenzen unserer Erkenntnis liegen, sich auf drei wesentlich unterschiedene Klassen zurückbringen lassen. Die erste Klasse enthält die Wahrheiten der Erfahrung; die zweite die Wahrheiten der Vernunft und die dritte die Wahrheiten des Glaubens“. Damit ist Erkenntnisgewinn auf experimentellem Wege, auf Grund logischen Schließens und drittens durch Aussagen „glaubwürdiger Personen“ gemeint. Zur letzteren Klasse zählte Euler historische Wahrheiten. Die eigene Anschauung der Dinge, die Möglichkeit ihrer Demonstration sowie die Glaubwürdigkeit „aus guten Gründen“ sind also für Euler „Quellen unserer Erkenntnis“, wobei es schwer zu sagen sei, „welche von diesen Quellen das meiste zur Vermehrung unserer Kenntnis beitragen“; auch Irrwege seien eingeschlossen.³²

In Schwierigkeiten, deren er sich selbst durchaus bewusst war, geriet er mit der Vorstellung, dass „die Welt zwei Arten von Wesen enthält, körperliche oder materielle Wesen und immaterielle Wesen oder Geister“³³ Den Körpern komme „nichts als die Ausdehnung, die Trägheit und die Undurch-

28 Die erste Mondtheorie „*Theoria motus lunae*“ erschien 1753, die zweite „*Theoria motuum lunae*“ 1772.

29 Die zweibändige erste Schiffstheorie „*Scientia navalis*“ erschien 1749, die zweite 1773.

30 Eulers musiktheoretisches Hauptwerk „*Tentamen novae theoriae musicae*“ erschien 1739. Eine Analyse der musiktheoretischen Studien Eulers findet sich in: E. Knobloch: Musiktheorie in Eulers Notizbüchern. NTM Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin 24 (1987), 2, 63–76.

31 *Lettres à une Princesse d'Allemagne*, 3 Bände 1768–1772, geschrieben zwischen 1760–1762 in französischer Sprache an die junge Markgräfin Sophie Charlotte von Brandenburg-Schwedt (1745–1808), ab 1765 Äbtissin des Stiftes zu Herford. Zahlreiche Auflagen: u. a. Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie in Reclams Universalbibliothek Bd. 239, hrsg. von G. Kröber (Philosophische Auswahl) Leipzig 1965; ---, eingeleitet und erläutert von A. Speiser, Braunschweig 1986.

32 Vgl. Fußnote 31, II. Teil, 115. und 116. Brief.

33 Vgl. Fußnote 31, II. Teil, 80. Brief.

dringlichkeit zu“, hingegen seien die Geister mit der Fähigkeit begabt, „zu denken, zu urteilen, zu schließen, zu empfinden ...“. Mit gewisser Folgerichtigkeit fährt er dann fort: „... ich für meinen Teil bin so sehr überzeugt, dass ich selbst denke, als ich es von der gewissesten Wahrheit nur sein kann; und also ist es nicht mein Körper, der durch eine ihm mitgeteilte Fähigkeit denkt, sondern ein unendlich verschiedenes Wesen, nämlich meine Seele, die ein Geist ist.“³⁴ Auf die selbstgestellte Frage, was aber ein Geist ist, „weiß ich nicht besser zu antworten, als dass ich meine Unwissenheit gestehe; denn von der Natur der Geister wissen wir nicht das geringste.“ An anderer Stelle bekennt er, „...die Verbindung, die der Schöpfer zwischen unserer Seele und dem Gehirn gestiftet hat, ist ein Geheimnis, wovon wir ... dies einzige sagen können, dass gewisse Eindrücke, die auf den Ort des Gehirns geschehen, wo der Sitz der Seele ist, gewisse Ideen und Empfindungen in der Seele wecken; die Art und Weise dieses Einflusses ist uns schlechterdings unbekannt.“³⁵ Das ist sein Dilemma. Euler hielt die Realität der materiellen Welt für zweifelsfrei, war aber zugleich tief religiös. Hier in Berlin wirkte er als engagiertes Mitglied in der französisch-reformierten Kirche.

Eulers philosophische Überlegungen sind vor allem auch Meinungsäußerungen zu Auseinandersetzungen mit philosophischen Vorstellungen seiner Zeit bzw. seiner Zeitgenossen. Euler wandte sich in seiner Antwort auf die oben genannte Preisaufgabe von 1747 mit einer 20seitigen Arbeit scharf gegen die Monadenlehre mit ihrer Vorstellung von kraftbegabten, aus sich heraus wirkenden Monaden, da sich daraus eben nicht die Bewegungsgesetze der Materie ableiten ließen. In der Mathematik erblickte er eines der wichtigsten Instrumente zur Erkenntnis der Welt, verteidigte aber zugleich seine Überzeugung von der Existenz und der Weisheit eines Schöpfers. Eulers Position im Streit um das Prinzip der kleinsten Wirkung, den bereits Harnack³⁶ ausführlich beschrieben hat, war jedoch – eigentlich schwer verständlich – physikalisch wie erkenntnistheoretisch unhaltbar.

Dank seiner erstaunlichen Intuition, tiefer Einblicke in mathematische Zusammenhänge und ungewöhnlicher algorithmischer Möglichkeiten hat Euler die zu seiner Zeit noch bestehenden Schwierigkeiten im Umgang mit dem Unendlichen in der Mathematik umgehen können. Und man weiß ja, erst eigentlich nach Definition der reellen Zahlen um 1870 ist ein strenger Beweis

34 Vgl. Fußnote 31, II. Teil, 80. Brief.

35 Vgl. Fußnote 31, II. Teil, 97. Brief.

36 Vgl. Fußnote 5, 333–345; siehe auch H. Pulte: Das Prinzip der kleinsten Wirkung und die Kraftkonzeptionen der rationalen Mechanik. Stuttgart 1989 und einschlägige Literatur zu L. Euler.

z. B. für das Cauchysche Konvergenzkriterium möglich geworden. Als Euler starb, war C. F. Gauß sechs Jahre alt, Cauchy wurde 1789 geboren, Weierstraß 1817 und Riemann 1826. Sie und andere haben, wie der große Virchow in seiner Rektoratsantrittsrede 1892 an der Berliner Universität anmahnte, die „heilige Flamme der Wissenschaft“ (Mathematik) bewahrt und weiter getragen – bis in unsere Tage.

Biographische Angaben zu Leonhard Euler

1707 am 15. April in Basel geboren

1713 Besuch der Lateinschule in Basel

1720–1727 Erste wissenschaftliche Tätigkeit in Basel

1720 Immatrikulation an der philosophischen Fakultät der Universität Basel

1723 Wechsel an die theologische Fakultät, nach einem Jahr Magister

1726 Erfolglose Bewerbung für eine Professur für Physik in Basel

1727–1741 Erste Periode wissenschaftlicher Tätigkeit in St. Petersburg

1731 Professor für Physik und Mitglied der Petersburger Akademie

1733 Professor für Mathematik als Nachfolger Daniel Bernoullis

1734 Heirat mit Katharina Gsell, Geburt des 1. Sohnes Johann Albrecht

1735 Mitarbeiter des geographischen Departements

1738 Erkrankung und Verlust des rechten Auges

1741–1766 Wissenschaftliche Tätigkeit in Berlin

1741 Direktor der Sternwarte

1744 Direktor der Mathematischen Klasse der Königlichen Akademie der Wissenschaften

1746 Fellow der Royal Society in London

1755 Auswärtiges Mitglied der Académie des Sciences in Paris

1766–1783 Zweite Periode wissenschaftlicher Tätigkeit in St. Petersburg

1771 Misslungene Staroperation und fast völlige Erblindung

1773 Tod seiner Frau Katharina

1776 Wiederverheiratung mit Katharinas Halbschwester Salomone Abigail Gsell

1783 am 18. September in St. Petersburg verstorben

Leonhard Euler: Wissenschaftliche Arbeiten (Auszug)

1736 „Mechanica“ (2 Bände)

1739 „Tentamen novae theoriae musicae“ (verfasst 1731)

In den Berliner Jahren begann Euler, seine großen, viele Einzelarbeiten zusammenfassenden und ergänzten lehrbuchartigen Darstellungen zu veröffentlichen:

- 1744 „Methodus inveniendi“
- 1745 „New principles of gunnery“
- 1748 „Introductio in analysin infinitorum“ (2 Bände), verfasst 1745
- 1749 „Scientia navalis“ (2 Bände)
- 1753 „Theoria motus lunae
- 1755 „Institutiones calculi differentialis“ (2 Bände), verfasst 1748
- 1756 Theorie der Wasserturbinen
- 1762 „Constructio lentium objectivarum“
- 1765 „Theoria motus corporum“
- 1768 „Institutiones calculi integralis“ (3 Bände), verfasst 1763
- 1769 „Dioptrica“ (3 Bände)
- 1770 „Vollständige Anleitung zur Algebra“ (2 Bände)
- 1772 „Theoria motuum lunae“
- 1773 Théorie complete de la construction ... des vaisseaux

Philosophisch orientierte Arbeiten

- 1747 „Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwände der Freygeister“
- 1768 “Lettres à une Princesse d’Allemagne”

Leonardi Euleri Opera Omnia

- Serie I: Opera mathematica 30 Bände in 29
- Serie II: Opera mechanica et astronomica 32 Bände in 31
- Serie III: Opera physica, Miscellanea 12 Bände
- Serie IV: Commercium epistolicum 9 Bände (unvollständig!)

Literaturhinweise: (Auswahl)

Die Literatur zu Leonhard Euler ist sowohl im Hinblick auf biographische Arbeiten als auch auf die Analyse seines wissenschaftlichen Werkes kaum noch überschaubar. An dieser Stelle seien lediglich einige größere Publikationen aufgeführt, die ihrerseits viel weiteres Material enthalten bzw. die in hiesigen Bibliotheken vorhanden sind.

- A. Harnack: Geschichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Bd. 1 und Bd. 2. Berlin 1900.
- G. Eneström: Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Ergänzungsband IV. Leipzig 1910–1913, drei Teile.

- E. Winter: Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766. Berlin 1957.
- E. Winter (Hrsg.): Die deutsch-russische Begegnung und Leonhard Euler. Beiträge zu den Beziehungen zwischen der deutschen und der russischen Wissenschaft und Kultur im 18. Jahrhundert. Protokollband der Jubiläums-Tagung vom 25./26. Mai 1957. Quellen und Studien zur Geschichte Osteuropas Bd. I, Berlin 1958.
- K. Schröder (Red.): Sammelband der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Berlin 1959.
- A. P. Juschkewitsch, E. Winter: Leonhard Euler und Christian Goldbach, Briefwechsel 1729–1864. Berlin 1965.
- R. Thiele: Leonhard Euler. Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner Band 56, Leipzig 1982.
- W. Knobloch: Leonhard Eulers Wirken an der Berliner Akademie der Wissenschaften 1741–1766. Studien zur Geschichte der AdW der DDR 111, Berlin 1984.
- W. Engel (Hrsg.): Festakt und wissenschaftliche Konferenz aus Anlass des 200. Todestages von Leonhard Euler am 15./16. September 1983. Abh. der AdW der DDR, Berlin 1985 1N.
- N. N. Bogoljubow, G.K. Michailow, A. N. Juschkewitsch (Red.): Die Entwicklung der Ideen Leonhard Eulers und die moderne Wissenschaft. Moskau 1988 (russ.). Sammelband der im Oktober 1983 auf dem Symposium der Akademie der Wissenschaften der UdSSR gehaltenen Vorträge anlässlich des 275. Geburts- und des 200. Todestages Leonhard Eulers.
- E. A. Fellman: Leonhard Euler. Reinbeck b. Hamburg 1995, Basel 2007 (engl.)
- E. Anthes (Hrsg.): Göttinger Arbeiten, Briefwechsel mit L. Euler und J.-N. Delisle. Schriften zur Astronomie, Kartographie, Mathematik und Farbenlehre 2004.
- V. Varadarajan: Euler through the time. Providence 2006.
- R. Bradley, E. Sandifer (ED.): Leonhard Euler Life, Work and Legacy. Amsterdam 2007.
- In den Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 15 (2007), Heft 2 und 4 finden sich weitere neuere Arbeiten zu Leonhard Euler.

Folgeseite:

Faksimile der ersten Seite eines 10 Blätter umfassenden, beidseitig eng mit kleiner Schrift auf graubraunem Papier geschriebenen Manuskriptes „Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques“, das Euler 1749 vorgetragen hat, aufbewahrt im Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, das dankenswerterweise die Erlaubnis zur Veröffentlichung der Seite erteilte. Signatur I- M 100, 1–10; abgedruckt in Opera omnia, I–15, 70–90. Euler beschäftigte sich in dieser Arbeit mit „einer schönen Beziehung“ zwischen einer (direkten) und einer reziproken Potenzreihe und ihren Summen.

Remarques
 sur un beau rapport
 entre les séries des puissances
 tant directes que reciproques,
 par M. L. Euler. (*)

I-M 100 (17)

1. Le rapport, que je me propose de développer ici, regard
 de les sommes de ces deux séries usées générales:

$$\textcircled{A} \quad 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \text{et.}$$

$$\textcircled{B} \quad \frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \text{et.}$$

dont la première contient toutes les puissances positives
 ou directes des nombres naturels, d'un exposant quel-
 conque m , et l'autre, les puissances negatives ou reci-
 proques des memes nombres naturels, d'un exposant
 quelconque n , en faisant varier alternativement
 les signes des termes de l'une et de l'autre série. Mon
 but principal est donc de faire voir, que quoique
 ces deux séries soient d'une nature tout à fait différen-
 te, leurs sommes se trouvent pourtant dans un très
 beau rapport entr'elles, de sorte que, si l'on étoit en
 état d'assigner en général la somme de l'une de
 ces deux espèces, on en pourroit déduire la somme
 de l'autre espèce. Ou bien je ferai voir, qu'en connois-
 sant la somme de la première série pour un exposant
 quelconque m , on en peut toujours déterminer la som-
 me de l'autre série pour l'exposant $n = m + 1$. Cette
 remarque me paroit d'autant plus importante, qu'
 elle n'est encore fondée que sur une indication, mais
 que je porteroi à un tel degré de certitude, qu'on la
~~pourroit~~ regarder comme très vigoureusement démontrée
 (*) lu en 1749.