Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät *71(2004), 37–46*

Helmut Moritz

Chaostheorie und Meteorologie

1. Wettervorhersage und Kausalität

Die angebliche Unzuverlässigkeit der Wettervorhersage ist sprichwörtlich. Manchmal wurde sogar die Stellung der Meteorologie als exakte Wissenschaft in Frage gestellt. Einen schönen Überblick über die Geschichte dieser Problematik gibt Bernhardt (1997, 1998, 2000).

Theoretisch erscheint heute die Sachlage klar. Die mathematische Beschreibung der meteorologischen Grundgleichungen als Problem der klassischen Mechanik durch die Gleichungen der Kontinuumsmechanik, zusammen mit den Gleichungen der Thermodynamik, angewendet auf die Atmosphäre, erscheint unumstritten.

Woher kommen dann die Instabilität der Wetters und damit die Unsicherheit der Wettervorhersage? (Stabilität: kleine Ursachen haben kleine Wirkungen, Instabilität: kleine Ursachen haben große Wirkungen.) Die Gegenüberstellung der Präzision der astronomischen Vorhersage der Planetenbahnen und der Unzuverlässigkeit der meteorologischen Vorhersage des Wetters erscheint offensichtlich. Wenn die Himmelsmechanik als exakte Naturwissenschaft gilt, gilt das im gleichen Sinne auch für die Meteorologie?

Eine mathematische Rechtfertigung liefert die Theorie der „falsch gestellten Probleme“ (improperly posed problems, ill-posed problems) nach Hadamard. Ein „richtig gestelltes Problem“ (properly posed problem) hat eine Lösung, die den folgenden drei Grundbedingungen genügt:

1. Eine Lösung existiert.
2. Die Lösung ist eindeutig.
3. Die Lösung hängt stabil von den Anfangsbedingungen ab.

Ist eine dieser Forderungen (Existenz, Eindeutigkeit oder Stabilität) nicht erfüllt, ist das Problem eben „falsch gestellt“ (improperly posed).

Das wäre nicht so schlimm, wenn nur wenige der in der Natur und in der Mathematik vorkommenden Probleme „falsch gestellt“ wären. Aber schon relativ einfache Probleme wie das Anfangswertproblem für elliptische partielle Differentialgleichungen (zum Beispiel die Potentialgleichung $\Delta V = 0$) sind „falsch gestellt“ (Courant und Hilbert 1962, S. 227 ff.) (Damit hängen auch die bekannten Probleme der analytischen Fortsetzung des Gravitationsfeldes nach unten in der Geodäsie zusammen.). Deshalb betrachten die Mathematiker heute „falsch gestellte“ und „instabile“ Probleme keineswegs als moralisch herabwürdigende Begriffe, sondern ganz sachlich als eine Klasse von mathematischen Problemen, die vielfach schwierig, aber dadurch auch besonders interessant sind. (Ähnliches gilt von den verwandten „inversen“ Problemen, siehe Anger et al. 1993, Anger und Moritz 2003.)

Nun, die meteorologischen Grundgleichungen gehören leider zu den „falsch gestellten“ Problemen, weil sie die Struktur solcher elliptischen partiellen Differentialgleichungen haben! Also ist die Schwierigkeit der Meteorologie bedingt durch die Struktur ihrer mathematischen Theorie, und diese theoretischen Schwierigkeiten lassen sich durch keine Spitzfindigkeit beseitigen.

Sind solche „falsch gestellte“ Probleme Ausnahmeerscheinungen, sozusagen schwarze Schafe der klassischen Mechanik?

Sir James Lighthill (1994), damals Präsident der Internationalen Union für Theoretische und Angewandte Mechanik, sagte: „We collectively wish to apologize for having mislead the general educated public by spreading ideas about the determinism of systems satisfying Newton’s laws of motion that, after 1960, were proved incorrect.”

Lighthill meint, daß, beginnend mit den Arbeiten von E. N. Lorenz in 1963 (Lorenz 1963, 1993), chaotische und instabile Phänomene sogar bei „ganz normalen“ Systemen der klassischen Mechanik bekannt werden, die als der Hort der stabilen Kausalität und des Determinismus galten. Ja in einem ganz bestimmten mathematischen Sinn können wir sagen, daß „fast alle“ mechanischen Systeme chaotischen Charakter haben; die Idee des „deterministischen Chaos“ (Schuster 1988) war geboren. Die Nichtlinearität ist wesentlich, deswegen nennt man die Chaostheorie wissenschaftlich „*Theorie der nichtlinearen dynamischen Systeme*“.

Die Stabilität der klassischen Mechanik (kleine Ursachen bewirken nur kleine Wirkungen) war der Grundpfeiler der exakten Vorhersagbarkeit und des Determinismus, der kaum jemals in Frage gestellt wurde und der die strenge Kausalität der Natur begründete, die – bewußt oder unbewußt – den Hintergrund unseres Denkens bildet. Dies kommt im berühmten „Laplaceschen Dämon“ zum Ausdruck:

Laplace, Himmelsmechanik, nach 1800

„Ein intelligentes Wesen, das, zu einem bestimmen Zeitpunkt, alle Kräfte kennt, durch die die Natur bewegt wird, und die relative Lage der Objekte, aus denen sie besteht (vorausgesetzt, die Intelligenz dieses Wesens wäre so groß, daß es alle Daten analysieren könnte), wäre imstande, die ganze Welt – den größten Körper und das kleinste Atom – in einer einzigen Formel darzustellen. Nichts wäre diesem Wesen ungewiß. Zukunft und Vergangenheit lägen offen vor seien Augen... Der menschliche Geist, in der Vollendung, die er der astronomischen Himmelsmechanik gegeben hat, bietet eine schwache Ahnung von einer solchen Intelligenz."

Zu dieser These hat, weniger als 100 Jahre später, Henri Poincaré die Antithese geliefert:

Poincaré, Himmelsmechanik, vor 1900

„Stellen Sie sich die Figur vor, die von diesen zwei Kurven und ihren unendlich vielen Schnittpunkten gebildet wird. Diese Schnittpunkte (mancher Trajektorien gewisser Systeme der Himmelsmechanik, Anmerkg. d. Verf.) bilden eine Art Netzwerk oder Gewebe... Man ist bestürzt über die Komplexität dieser Figur, die ich zu zeichnen nicht einmal versuchen will."

Also: statt der glatten, stabilen und wohldefinierten Trajektorien der Laplaceschen Himmelsmechanik haben wir bei Poincaré ein Wirrwarr von chaotischen Trajektorien, ein chaotisches Netz, das er nicht einmal skizzieren kann (vgl. Bild 2).

Poincarés Ideen wurden von seinen Zeitgenossen wenig beachtet. Der Umschwung kam erst nach 1960, infolge eines bemerkenswerten Zusammenwirkens dreier Ursachen:

1. Der berühmte russische Mathematiker Kolmogorov, zusammen mit Schülern wie Arnold und Sinai, griffen Poincarés Ideen wieder auf und behandelten sie mit neuen mathematischen Mitteln. Diese Arbeiten fanden internationale Beachtung und Nachfolge.
2. Der schon genannte amerikanische Mathematiker Lorenz behandelte das meteorologische Chaos-Problem nicht nur heuristisch-numerisch, sondern auch exakt-mathematisch. Der von ihm gefundene „Lorenz-Attraktor" ist wegen seiner schönen charakteristischen Gestalt als „Lorenz-Schmetterling" zum Logo oder, wie man heute auch sagt, zur Ikone der heutigen Chaostheorie geworden.
3. Viele Trajektorien der Chaostheorie ergeben im Detail komplexe, als Ganzes aber überraschend symmetrische und schöne Bilder. Sie werden durch Iteration einfacher Gleichungen oder durch numerische Iteration

einfacher, aber *nichtlinearer,* Differentialgleichungen gewonnen. Dadurch eignen sie sich hervorragend für die Programmierung der damals gerade in Mode gekommen persönlichen Computer und fanden das Interesse vieler Computer-Fans.

Die beiden Bilder 1 und 2 gehören zu den beliebtesten Computer-Bildern der Chaos-Theorie: der Lorenz-Schmetterling der Meteorologie und das der theoretischen Himmelsmechanik nahe stehende Poincaré-Gewebe.

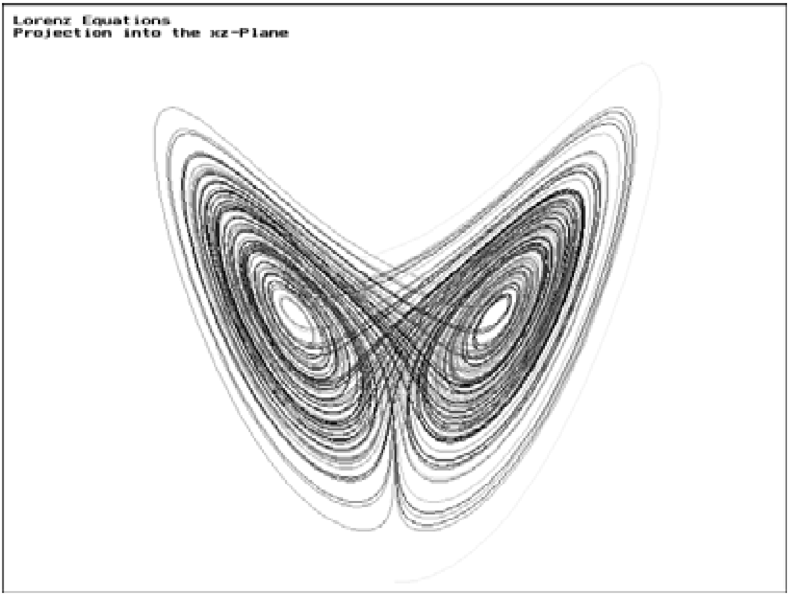

Bild 1: Lorenz-Schmetterling

Man sieht sehr schön die Instabilität bei Lorenz: zwei ursprünglich ganz benachbarte Trajektorien trennen sich immer mehr voneinander und gehen schließlich ganz verschiedene Wege: kleine Ursachen ergeben große Wirkungen.

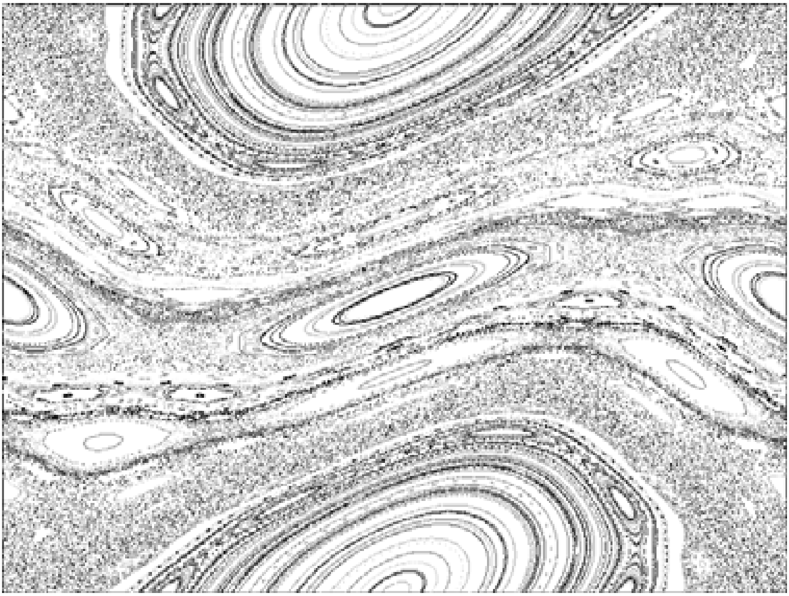

Bild 2: Poincaré-Gewebe

2. Die Lorenz-Gleichungen

Die klassischen Grundgleichungen atmosphärischer Strömungen sind partielle Differentialgleichungen für die meteorologischen Grundgrößen wie Luftdruck und Temperatur. (Letztere kennt man schon vom Wetterbericht her.). Vielfach treten sogenannte Konvektionszellen auf. Die Atmosphäre ist aus Konvektionszellen aufgebaut, etwa so wie ein Haus aus Ziegeln zusammengesetzt ist. Eine Konvektionszelle ist also eine Art Ziegel aus Luft. Die Luftströmung spielt sich mehr oder minderen periodisch im Inneren einer Konvektionszelle ab. Dies kann man sich besonders dann ganz gut vorstellen, wenn man die Ziegel in einer Richtung sich sehr lange denkt, etwa wie lange Holzbalken mit rechteckigem Querschnitt. Sogar die Konvektionsströmung kann man sich dann vorstellen: sie ist eine walzenförmige Rotation entlang der Jahresringe des Baumstammes (Bild 3). Die Koordinaten entlang des Querschnittes nennen wir x und z; die Koordinate y wird dann senkrecht dazu (senkrecht zur Bildebene) entlang der Länge des Balkens gezählt (der Holzbalken liegt auf der Erde). Da der Querschnitt von y nicht abhängt, hängt jede

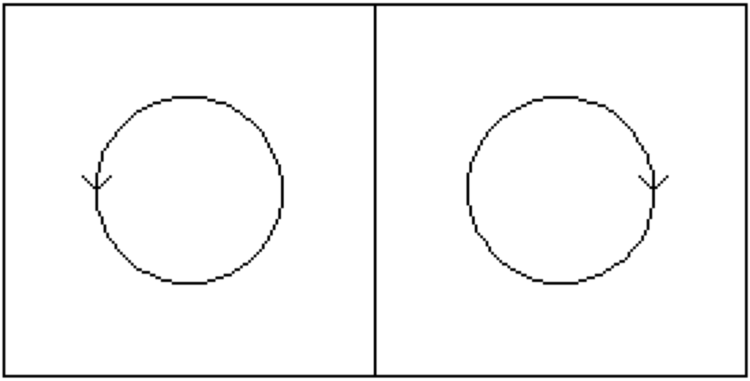

Bild 3: Querschnitt zweier nebeneinander liegender Konvektionszellen

atmosphärische Größe A nur von den Querschnittskoordinaten x und z und natürlich von der Zeit t ab:

A = A(x,z,t).

Um das Bild der Ziegeln in einem etwas anderen Sinn zu gebrauchen: So etwa wie ein Haus aus Ziegeln zusammengesetzt ist, setzen wir die Funktion A aus „Bausteinen" der Form a(t)F(x,z) zusammen:

A = a1(t) F1(x,z) + a2(t) F2(x,z) + a3(t) F3(x,z) + a4(t) F4(x,z) + ….

Die Funktionen F gelten als bekannt (es sind einfache Sinus- und Kosinus-Funktionen, denken Sie bitte an die oben erwähnte Rotation entlang der Jahresringe, Bild 3), und für die Koeffizienten a(t) erhalten wir *gewöhnliche* Differentialgleichungen, s. u.

Die bisherigen Ausführungen waren bewusst sehr vereinfacht, aber jetzt kommt ein (un)logischer Schritt, auf den Sie bitte Ihre Aufmerksamkeit lenken wollen. Wir vergessen, daß x,y,z rechtwinkelige Koordinaten im Raum sind, und setzen neu:

a1 = x, a2 = y, a3 = z, a4 = a5 = … = 0.

Wir brechen also die obige Reihe nach a3 ab. Damit erhält das oben erwähnte System gewöhnlicher Differentialgleichungen die von Lorenz gewählte Form

x' = - s (x – y)

y' = r x – y – x z

z' = - b z + x y

Zur Wiederholung: x, y, z sind nicht rechtwinkelige Koordinaten im Raum, sondern Systemparameter, welche Funktionen der Zeit t sind; x'(t) bedeutet die Ableitung dx/dt. Mögliche Zahlenwerte für die auftretenden Konstanten sind: s = 10, r = 40, b = 8/3 (Herrmann 1994, S. 81).

Es ist erstaunlich, daß ein so einfaches Modell so weitreichende Folgen gezeigt hat und eines der berühmtesten Gleichungssysteme der Mathematik geworden ist. Wesentlich sind jedenfalls die nichtlinearen Terme xz und xy.

Jedes mathematische Programmsystem erlaubt es mühelos, das Gleichungssystem zu integrieren und die Lösung graphisch darzustellen, siehe z.B. (Moritz 2004).

Das Lorenzsche Gleichungssystem ist auch auf das Problem des Geomagnetismus im Erdinneren anzuwenden. Der mehr oder minder unvermittelte und „zufällige" Sprung einer Trajektorie von einem „Schmetterlingsflügel" zum anderen könnte als Modell für die alle 10^5 oder 10^6 Jahren erfolgende „Umpolung" der Erde: der Nordpol wird zum Südpol und umgekehrt (Turcotte 1997; Moritz 2004).

Abb. 1 zeigt auch sehr schön die eigentümliche Synthese von Zufall und Ordnung In der Chaostheorie: der Verlauf der Einzel-Trajektorie ist ziemlich willkürlich, aber die charakteristische Figur des Lorenz-Schmetterlings bleibt immer gleich.

Sehr schöne Programme zur Chaostheorie finden sich bei Herrmann (1994). Abraham und Shaw (1992) geben höchst instruktive Handskizzen von chaotischen Strukturen ohne jede Mathematik (was umso erstaunlicher ist, als Abraham und Marsden (1978) eines der schwierigsten abstrakt-mathematischen Bücher über das Gebiet der nichtlinearen dynamischen Systeme geschrieben haben). Jackson (1990) ist eine auch für Physiker sehr gut lesbare umfassende Standarddarstellung.

3. Stabilität, Chaos und Ordnung

3.1 Poincaré

Zitieren wir nochmals Poincaré (1907). Besser könnte man das auch heute nicht formulieren.

Poincaré über den Dämon von Laplace

„Wenn wir exakt die Naturgesetze und den Anfangszustand des ganzen Universums zu einem bestimmten Zeitpunkt kennten, so könnten wir exakt den Zustand des Universums zu einem späteren Zeitpunkt berechnen. Aber selbst wenn wir die *Gesetze* exakt kennten, so würden wir den Anfangszustand nur mit einer gewissen *Näherung* messen können. Wenn es uns möglich wäre, den zukünftigen Zustand in der *gleichen Näherung* voraus zu berechnen, so könnten wir sagen, daß der Zustand richtig vorhergesagt worden sei und daß die Naturgesetze stimmten (Stabilität, Anm. d. Verf.).

Aber das ist nicht immer so. Es mag sein, daß kleine Fehler in den Anfangsbedingungen große Fehler im vorhergesagten Endzustand bewirken. Eine Vorhersage wird unmöglich, und wir bekommen ein *zufälliges* Ergebnis.

Poincaré, in Vorwegnahme des Schmetterlings von Lorenz, setzt fort:

„Unser zweites Beispiel ist sehr ähnlich unserem ersten. Warum haben die Meteorologen solche Schwierigkeiten, das Wetter mit einiger Sicherheit vorherzusagen?...Die Meteorologen sehen sehr gut….daß ein Zyklon sich irgendwo bilden wird, aber genau wo, das können sie uns nicht sagen. Ein Zehntel Grad mehr oder weniger, und der Zyklon wird hier ausbrechen und nicht dort, und seine Verheerungen werden über Gebiete hereinbrechen, die anderenfalls verschont geblieben wären. Wenn sie dieses Zehntel Grad bemerkt hätten, hätten die Meteorologen das Unheil vorhersagen können, aber die Beobachtungen waren weder hinreichend umfassend noch hinreichend genau, und das ist der Grund, weshalb wir hier alles mehr oder weniger dem *Zufall* zuschreiben. Die Situation ist grundsätzlich die gleiche: Eine minimale Ursache bewirkt beträchtliche Wirkungen, vielleicht sogar Katastrophen.“

In Fortsetzung der Gedanken von Poincaré können wir sagen, daß viele *„zufällige“* Erscheinungen der Wahrscheinlichkeitstheorie aus der Instabilität der Ausgangssituation kommen, zum Beispiel die Gleichwahrscheinlichkeiten beim Wurf einer Münze (beide Seiten kommen mit gleicher Wahrscheinlichkeit 1/2) oder eines Würfels (alle Seiten kommen mit gleicher Wahrscheinlichkeit 1/6). Eine minimale Änderung oder Drehung unserer werfenden Hand bewirkt eine relativ große Änderung der Trajektorie. Die Anfangsbedingungen üben nur mehr eine geringe Wirkung aus, und die *Symmetrie* der Münze oder des Würfels entscheidet das Ergebnis.

Das ist so wie in der Chaostheorie: wegen der Instabilität der Trajektorien kommen die *Symmetrien der Gesamtsituation* zum Tragen. Daher die schönen exotischen Symmetrien der Chaostheorie wie der Lorenzsche Schmetterling.

3.2. Ordnung oder Chaos?

Was kommt zuerst, Ordnung oder Chaos, klassische Physik oder Wahrscheinlichkeitstheorie? Die Chaostheorie gibt keine Pauschalantwort, aber sie ermöglicht eine Diskussion auf höherer Ebene. Zum Beispiel können sowohl der

Astronom wie der Meteorologe nur angenäherte Aussagen treffen, die Voraussagen beider Disziplinen sind nur beschränkt gültig. Die Größenordnungen sind natürlich verschieden: was in der Wettervorhersage Tage sind, sind in der Astronomie Hunderte oder Tausende von Jahren. Im Übrigen nehmen gerade Astronomen und Geodäten ihre Meßfehler mit besonderer Sorgfalt und Redlichkeit ernst, man denke nur an die Theorie der Beobachtungsfehler des „princeps mathematicorum“ Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Ebenso wird niemand heute noch die Wissenschaftlichkeit und praktische Bedeutung der Meteorologie bezweifeln.

Beides, Ordnung und Zufall, Naturgesetz und Wahrscheinlichkeit, scheinen als These und Antithese zu unserer Welt zu gehören, und jeder denkende Mensch hat letztlich seine eigene Synthese zu finden.

Literatur

Abraham R. und Marsden J. E. (1978) *Foundations of Mechanics,* Benjamin-Cummings, Reading, Massachusetts.

Abraham R. und Shaw C. D. (1992) *Dynamics: The Geometry of Behavior,* 2. Aufl., Addison-Wesley, Redwood City, California.

Anger G., Gorenflo R., Jochmann H. und Webers, W. (Hrsg.) (1993) *Inverse Problems: Principles and Applications in Geophysics, Technology and Medicine*, Akademie-Verlag, Berlin.

Anger G. und Moritz H. (2003), Inverse problems in science and medicine, *Sitzungsber. d. Leibniz-Soz.*, Bd. 61 (5), 171–212.

Bernhardt K.-H., (1997) Meteorology as an exact science – V. Bjerknes’ concept of hydrodynamic weather prediction in retrospect, in W. Schröder (Hrsg.) *Geomagnetism and Aeronomy,* Interdivisional Commission of History, IAGA Newsletter No.29, 199–200.

Bernhardt K.-H. (1998) Wettervorhersage und Meteorologie als exakte Wissenschaft – Anmerkungen aus historischer Sicht, in W. Schröder (Hrsg.) *From Newton to Einstein (A Festschrift in Honour of the 70th Birthday of Hans-Jürgen Treder),* Mitt. d. Arbeitskreises Geschichte der Geophysik in d. Dt. Geophysik. Ges. *17*, Heft 3–4, 26–37.

Bernhardt K.-H. (2000) Kausalität in Natur und Gesellschaft – Gedanken zu einem Ansatz von Hans Ertel, *Mitt. d. Leibniz-Sozietä*t, Bd.34, Heft 2, 35–46, Berlin.

Courant R. und Hilbert D. (1962) *Methods of Mathematical Physics*, Bd. II, Wiley-Interscience, New York.

Hermann D. (1994) *Algorithmen zu Fraktalen und Chaostheorie,* Addison-Wesley, Bonn.

Jackson E. A. (1990) *Perspectives of Nonlinear Dynamics,* Bd. 2, Cambridge Univ. Press.

Lighthill J. (1994) Chaos: a Historical Perspective, in *Nonlinear Mechanics and Predictability of Geophysical Phenomena,* Geophysical Monograph 83, IUGG, Bd. 18, American Geophysical Union, Washington DC.

Lorenz E. N. (1963) Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.,* Bd.20, 130–141.

Lorenz E.N. (1993) *The Essence of Chaos,* Univ. of Washington Press, Seattle.

Moritz H. (1995) *Science, Mind and the Universe – An Introduction to Natural Philosophy,* Wichmann-Verlag, Heidelberg.

Moritz H. (1997) The sand grain and the butterfly: instability in geodesy and geophysics, *Annali di Geofisica,* Bd. 40(5), 1359–1364.

Moritz H. (2004) The Lorenz attractor in geodesy and geomagnetism, in W. Schröder (Hrsg.), *Meteorological and Geophysical Fluid Dynamics (A Book to Commemorate the Centenary of the Birth of Hans Ertel),* 335–342, Wilhelm Schröder/Science Edition, ISSN: 1615–2824.

Poincaré H. (1908) *Science et Methode*, Flammarion, Paris (viele Nachdrucke und Übersetzungen).

Poincaré H. (1987) *Les Methodes Mathematiques de la Mecanique Celeste,* 3 Bd., Blanchard, Paris (Nachdruck der Urausgabe aus 1892–1899).

Schuster H. G. (1988) *Deterministic Chaos – an Introduction,* 2. Aufl., VCH, Weinheim.

Turcotte D. L. (1997) *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics,* 2. Aufl., Cambridge Univ. Press.