Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät *71(2004), 29–36*

Hans-Jürgen Treder

Hans Ertel als mathematischer Physiker[1]

Das Interesse und die wissenschaftliche Arbeit von Herrn Ertel sind ganz entscheidend von der mathematischen und der theoretischen Physik geprägt. Es ist bekannt, und ich möchte es noch einmal betonen, daß Arnold Sommerfeld äußerstes Interesse an dem mathematischen Physiker Hans Ertel hatte und sich bemühte, Hans Ertel für einen theoretisch-physikalischen Lehrstuhl zu gewinnen. Für Hans Ertel war das schönste Zitat, das er zeigen konnte und gern zeigte, der Band 2 von Sommerfelds „Vorlesungen über Theoretische Physik", der Band über Kontinuumsmechanik, wo für einen ganz neuen Ansatz zur Hydrodynamik der nichtbarotropen Flüssigkeiten die Temperatur T als unabhängige Variable eingeht. In dem großen, von Flügge herausgegebenen und bei Springer erschienenen Handbuch der Physik ist ein großer Teil des Inhalts- und des Autorenverzeichnisses des Bandes von Truesdell über klassische Feldtheorie – das meint Feldtheorie im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik – immer wieder mit dem Namen Ertels verbunden. Hier hat sich Ertel als theoretischer Physiker gezeigt und sein großes Interesse schöpferisch ausgewiesen.

Ich selbst habe Hans Ertels Namen auf ganz andere Weise kennen gelernt. Gegen Ende des zweiten Weltkrieges war ich etwa 16 Jahre alt und las per Zufall in einem damals recht bekannten Buch von Bernhard Bavink, daß neben den bekannten kosmologischen Arbeiten, die damals nicht richtig namhaft gemacht werden durften, weil zumindest für die allgemeine Popularisierung die Relativitätstheorie in Deutschland eine verbotene Theorie war, Hans Ertel durch die Hinweise auf die Rolle der universellen Konstanten – Naturkonstanten als Zahlenkonstanten zum Verständnis des Kosmos – sehr viel zur Theorie der Kosmologie beigetragen hätte. (Bavink schrieb damals in einem

1 Vortrag auf dem Kolloquium „Theoretische Probleme von Meteorologie und geokosmischer Physik" am 26. März 2004 anläßlich des 100. Geburtstages von Hans Ertel. Nach einem Tonbandmitschnitt bearbeitet von Hannelore und Karl-Heinz Bernhardt, autorisiert von Hans-Jürgen Treder.

dicken Buch – „Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaften“, 9. Aufl., Leipzig 1944 – über verschiedene Dinge der Welt, darunter auch über Kosmologie.)

Ich habe Ertels Arbeiten dann sehr bald lesen können, noch bevor ich ihn selber kennen lernte. Gefunden habe ich diese Arbeiten in den Berichten der Berliner Akademie der Jahre 1933/1934. Vorgelegt worden waren sie zum Teil von Erwin Schrödinger, als er noch in Berlin weilte. Sie bezogen sich auf Fragen der relativistischen Kosmologie, und zwar auf eine große Idee von Hermann Weyl, aus der relativistischen Kosmologie ein Verständnis für die Entwicklung der Atom- und Elementarteilchen im Rahmen der Geschichte des Kosmos zu gewinnen. Hermann Weyl griff auf die von ihm näher untersuchten Eigentümlichkeiten, Modifikationen und Erweiterungen der relativistischen Weltmodelle von Friedmann in Leningrad und von Lemaître in Belgien zurück. Friedmann war der erste, der mit einem relativistischen Weltmodell eines expandierenden Kosmos auftrat – im Gegensatz zu den Vorstellungen von Einstein, der einen statischen Kosmos zugrunde legen wollte.

Unabhängig zunächst von Friedmann, dann durch die Kenntnis der Friedmannschen Arbeiten zu vertiefter Analyse angeregt, war der belgische Pater Lemaître, ein Schüler von Eddington, auf demselben Gebiet tätig, und die Synthese beider Vorstellungen wurde von Hermann Weyl in einem mehr populär gedachten Beitrag in den „Naturwissenschaften“ als ein Problem für mathematische Physiker gestellt.

Diese Idee nahm Hans Ertel damals auf und befaßte sich mit den von Weyl aus einer philosophischen Ideenschau gefundenen Zahlenrelationen zwischen Mikro- und Makrokosmos, die eine Erweiterung der Versuche von Eddington waren, aber schon zehn Jahre früher wesentlich mehr Physik enthielten als Eddingtons erste Ansätze. Diese Zahlenrelationen versuchte Hans Ertel als Konsequenzen der Entwicklung des Kosmos darzustellen, wie es das Friedmann-Lemaîtresche Weltmodell mit der Weylschen Interpretation liefern konnte.

Es ist interessant festzustellen – Hans Ertel hat gelegentlich auch scherzhafte Bemerkungen darüber gemacht –, daß die Begründer der relativistischen Kosmologie zwei hauptamtliche Meteorologen waren: Friedmann, von Haus aus ein Physiker, der sich aber in die Physik der Atmosphäre und die Aerodynamik eingearbeitet hatte, und der als erster aus der Existenz der kosmologischen Konstanten, die Einstein behauptet hatte, nicht auf einen statischen Kosmos schloß, der nur ein außerordentlicher, zufälliger Spezialfall, ein instabiler Spezialzustand sein konnte, sondern einen expandierenden oder kontrahierenden Kosmos einführte, und Lemaître, später päpstlicher Hausprälat, der in Belgien am Institut für Astronomie und Geophysik der katholischen Universität Louvain-la-Neuve, dem auch die Meteorologie zugehörte, als mathematischer Physiker tätig war. Ertel meinte scherzhaft, Meteorologie und Kosmologie haben gemeinsam, daß sie sehr spekulativ sind. (Übrigens hat sich um 1910 auch V. Bjerknes der Kosmologie gewidmet, die er als Theorie des Weltäthers begründen wollte, und ein seinerzeit bekanntes Buch „Die Kraftfelder“, Braunschweig 1909, geschrieben.)

Die wichtige Frage bei Ertel war, inwiefern ist die Aussagefähigkeit der mathematischen Theorie in der Physik zu begründen, und inwiefern können wir annehmen, daß wir durch die verschiedenen Formen der mathematischen Darstellung, die wir miteinander in Relation setzen, zu einem vertieften Verständnis dieser Dinge kommen, das unabhängig ist von der einzelnen mathematischen Rechnung.

Ertel war ein ganz großer Kenner aller Methoden der klassischen Mechanik, vor allem der klassischen Hydromechanik. Ein Hauptpunkt seiner Argumentation war immer, daß die verschiedenen Darstellungen – in der Hydrodynamik zunächst einmal die Eulersche und die Lagrangesche Darstellung, dann in der Wirbeldynamik die Darstellungen von Helmholtz, von Thomson und von Boltzmann –, mit verschiedenen mathematischen Begriffen arbeiten und sich auf sehr verschiedene Bezugssysteme beziehen, und daß man durch den Vergleich dieser verschiedenen Methoden, durch die Darstellung ein und desselben Prozesses in den verschiedenen mathematischen Möglichkeiten zu einer Einsicht dessen kommt, was man tatsächlich vor sich zu sehen hat, indem die verschiedenen mathematischen Darstellungen verschiedene Perspektiven für ein und dasselbe Phänomen sind. Dieses Verfahren wurde auch in der Kosmologie seit der Arbeit von Weyl aus dem Jahr 1934 und auch schon früher immer wieder angewandt und gerade in den 40er und 50er Jahren sehr spekulativ erweitert. Und immer wieder wurde erneut versucht, verschiedene mathematische Ansätze zu entwickeln und dann zu sehen, wie diese mathematischen Ansätze, die zunächst scheinbar nur wenig miteinander zu tun haben, ineinander übersetzt werden können; das, was übrig bleibt, sozusagen die Invariante, die in verschiedenen Übersetzungen erhalten bleibt, enthält dann die Aussage über den zu untersuchenden Komplex. Die Sache ist nicht unproblematisch, die Diskussionen in der Kosmologie waren damals noch lange nicht so fortgeschritten wie heute, aber in der Mechanik stießen wir in der Diskussion sehr bald auf derartige Fragestellungen und bemerkten, daß das Vergleichen in verschiedenen Darstellungen nicht unproblematisch ist.

Ich möchte Ihnen dazu eine Anekdote erzählen: Ich hatte, weil ich im Adlershofer Institut für Mathematik für den Bereich mathematische Physik zuständig war, gelegentlich die Freude, daß Herr J. K. Moser aus Berlin(West) zu uns herüberkam und über seine Untersuchungen zur Himmelsmechanik sprach. Nun ist die Himmelsmechanik ein Gebiet, von dem die Astronomen sagen können, es ist das einzige Gebiet der theoretischen Physik, das sie gar nicht brauchen. Die Himmelsmechanik, die die Astronomen haben, ist ein Gebiet des numerischen Rechnens, denn in der klassischen Himmelsmechanik kann man nur das Ein- bzw. Zweikörperproblem, bestenfalls das restringierte Dreikörperproblem exakt behandeln – die Jacobischen Spezialfälle usw. sind ziemlich uninteressant. Alle astronomischen Berechnungen für die praktischen Himmelsmechaniker sind Näherungsrechnungen, fußend auf dem Zweikörperproblem und entsprechenden Approximationsmethoden, glänzend dargestellt und glänzend untersucht von Laplace über Gauß bis zu den heutigen Himmelsmechanikern und heute durch immer vollkommenere Rechentechnik unterstützt. Da bereits das Dreikörperproblem in einer geschlossenen Form nicht behandelbar ist, muß man eben approximative Methoden anwenden, deren Rechtfertigung hinterherkommt, indem die Erfüllung allgemeiner Sätze der Himmelsmechanik als Kriterium dafür dient, daß man keinen nachweisbaren Rechenfehler begangen hat, ein allgemeines Theorem muß ja herauskommen. Man rechnet also in irgendeinem Bezugsystem, das entsprechend den Beobachtungen und auch mathematisch passend ist. Dies geschieht alles im Rahmen des Lagrange-Mechanismus sicher und unangreifbar.

Wir haben aber schon in der klassischen Punktmechanik noch einen viel stärkeren Formalismus zur Verfügung – das ist der Hamilton-Formalismus, die Hamiltonschen Gleichungen. Dort sind wir nicht mehr an Koordinatentransformationen gebunden, denn wir können jetzt kanonische Transformationen, also Berührungstransformationen, durchführen. Wir haben eine viel größere Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten, Bezugssysteme zu wählen, kanonische Bezugssysteme im Impuls-Ortsraum und nicht mehr nur im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum, oder in einem höher dimensionierten, aber immer wiederum nicht nur mit reinen Ortskoordinaten behafteten Raum. Doch in allen Lehrbüchern der Himmelsmechanik, die die Astronomen mit Absicht nicht lesen, weil sie für sie uninteressant sind, stehen wunderbare andere Sachen drin. In dem schönen großartigen mathematischen Lehrbuch von Siegel, das Moser herausgegeben hat, steht beispielsweise ein herrliches Kapitel über die großen mathematischen Entdeckungen auf dem Gebiet der theoretischen Himmelsmechanik des finnischen Mathematikers K. F. Sundman aus dem Jahre 1910/12, die dort zum ersten Mal lehrbuchmäßig aufgearbeitet und völlig klar dargestellt sind.

Man arbeitet mit kanonischen Transformationen und kümmert sich nicht darum, was Ortskoordinaten und was Impulskoordinaten sind; man erhält dann ideale Formen, für die man völlig korrekt geschlossene Lösungen angeben kann. Aber die stehen in kanonischen Koordinaten da. In dem Moment, wo man von diesen kanonischen Koordinaten wieder auf die Ortskoordinaten des Beobachtens gehen will, steht man vor dem Problem: Wie macht man das? Die Schwierigkeit ist verlagert worden auf die Frage, was bedeuten diese kanonischen Transformationen? Im allgemeinen weiß man das nicht. Herr Moser sagte mir, ich kann Ihnen sehr leicht sagen, was wir leisten können: Wir können sagen, wir können mit Sundman sofort einsehen, wenn die Erde in die Sonne stürzt, kann nicht gleichzeitig der Mond auf die Erde fallen. Mit dieser trostreichen Versicherung, sagt der Mathematiker, kann ich die Astronomen zurücklassen. Moser meinte, mehr kann ich nicht tun. Ich kann zwar beweisen, daß es die Dreiersingularität nicht geben kann, aber die Zweiersingularität kann ich nicht ausschließen.

Das ist also einer der wesentlichen Punkte, in dem die mathematische Physik und ihre Anwendungen in den Naturwissenschaften nicht gleichwertig sind, sondern jede ihre Stärken und ihre Schwächen hat. Und das ist auch eines der Probleme gewesen, das Ertel und mich in der letzten Zeit besonders interessierte. Schon in der Kosmologie hatten wir eine Differenz, da ich der Ansicht war: Das ist zwar alles richtig, was wir dort schreiben, aber das hängt von der Wahl des Bezugssystems ab, und wir wissen nicht, wie die Bezugssysteme überhaupt zusammenhängen. Wir können also Aussagen machen, das ist so und so, aber wir wissen nicht, was diese Bezugssysteme mit den Bezugssystemen zu tun haben, die den Weltmodellen zugrunde gelegt werden. Aber die Dinge liegen ja noch viel tiefer.

Zu den vielen Büchern, die die Astronomen grundsätzlich nicht lesen, gehören die Bücher über die Struktur der Rotationsfiguren der Himmelskörper, d. h. Körper, also homogene Flüssigkeiten mit konstanter Dichte, die sich in Rotation befinden. Die große Überraschung dieser Arbeiten, die von dem Newtonschüler Maclaurin begründet wurden und die zunächst zu den immer schöner abgeplatteten Scheibchen, den immer vollkommener werdenden Ellipsoiden führten – es ist klar, die Rotationssymmetrie muß erhalten bleiben – war das Jacobische dreiachsige Ellipsoid. Eine Rotation führt zu einem dreiachsigen Körper, zu einer Brechung der Symmetrie – vollständig unbegreiflich von der Anschauung her! Die Symmetriebrechung führt dann weiter zur Poincaréschen Birne, zum Jeansschen Modell der Spaltung eines Sternes in zwei vergleichbar große, aber nicht gleichgroße Sterne usw.

Dann haben wir den großen Satz von Poincaré-Kolmogorov. In allen Kontinua, die den Gesetzen allein schon der klassischen Mechanik genügen – mit anderen Gesetzen wird es noch komplizierter –, wird man immer wieder auf Systemfragen stoßen, die völlig überdeterminiert sind, d. h., die kleinste Störung kann, muß aber nicht, zu den größten Systemveränderungen führen. Im Laufe der Zeit wird immer einmal eine solche kleinste Störung auftreten. Wenn man sie kennen würde, könnte man sie natürlich berücksichtigen – aber die kleinste Störung auf einem Stern von Sonnengröße, in der Atmosphäre oder in einem Teil der Atmosphäre würde erfordern, daß wir jedes Atom, jedes Molekül, ja jedes Quant kennen und verfolgen können (was natürlich unmöglich ist), um zu sagen, wo diese Störung einsetzen kann. Dann ließe sich eine ungeheuere Rechnung durchführen, aber wenn wir mit der Rechnung fertig sind, wäre das Geschehen schon längst abgelaufen.

Wir stehen also vor einer ganz anderen Aufgabe, als wir ursprünglich erwartet hatten. Es verhält sich eben nicht so, daß die klassische Kontinuumsmechanik - das gilt a forteriori für die Quantenmechanik und noch viel stärker für die allgemein-relativistische Mechanik – die Symmetriegrößen bewahrt, die wir ihr makroskopisch zuschreiben. Die Gleichungen für Kontinua bewahren sie nicht dauernd. Das zweite ist, wir können nicht voraussagen, wann und wo etwas geschieht – wir wissen nur, es muß irgendwann und irgendwo etwas geschehen. Das kann je nach Größe des Systems und je nach der Situation, in der sich das System befindet, nach einer im Vergleich sehr großen oder sehr kleinen Zeit sein, wir können es grundsätzlich nicht wissen. Das ist der Satz von Poincaré-Kolmogorov, den man übrigens relativ gut einsehen kann.

Woran das liegt, ist uns in der Diskussion mit Herrn Ertel durch ein anderes Theorem ziemlich klar geworden, das auch mit den Namen A. N. Kolmogorov und weiter V. I. Arnold und J. K. Moser verbunden ist. Das KAM-Theorem (Kolmogorov-Arnold-Moser) ist ein Gegenstück zu dem berühmten Theorem von Poincaré und Caratheodory über die Periodizität aller Lösungen mit endlich vielen Partikeln von vernachlässigbarer Größe und Masse. Diese Lösungen sind fast immer quasiperiodisch (quasiperiodisch heißt, sie nähern sich der Periodizität beliebig nahe an), und das gilt fast immer. Die Perioden können riesig lang sein, wenn das System hinreichend groß ist, viel viel länger als alle Weltalter; bei kleinen Systemen stellt sich die Periodizität viel leichter ein.

Wenn wir aber ein Kontinuum betrachten, kommen wir in ein Gebiet hinein, wo sich ein und dieselbe Störung immer wieder wiederholt und sich damit notwendigerweise aufschaukelt. Bei den anderen Systemen ist es so, daß sich die Störungen immer wieder ausgleichen können – einmal kommt die Störung in der einen Richtung, einmal in der anderen, über die gesamte Periode geschieht das dann unter den Voraussetzungen des Liouvilleschen Satzes – eines anderen der großen Theoreme. Haben wir aber ein Kontinuum vor uns, erreichen wir einen Punkt, an dem tatsächlich immer genau dieselbe Störung einsetzt, und die kann sich natürlich beliebig aufschaukeln. Das ist das KAM-Theorem, und ein Bild – ich möchte nicht sagen, eine Erklärung – dafür, wie es funktioniert, ist das allgemeine Theorem von Poincaré-Kolmogorov.

Das ist nun wohl auch die Frage, die Hans Ertel zum Schluß unserer Diskussionen so sehr bewegt hat. Er hatte doch den großen Optimismus in seinen philosophischen Arbeiten ausgestrahlt, daß sich im Prinzip beispielsweise das Wetter für beliebig lange Zeit und beliebig genau voraussagen läßt, wenn man mittels hinreichend leistungsfähiger Rechenmaschinen genügend schnell Messwerte von möglichst vielen Stellen in möglichst kurzer Zeit bearbeiten kann. Das ist mit Sicherheit nicht der Fall. Das liegt am Theorem von Poincaré-Kolmogorov, wonach die kleinste Störung, der berühmte Flügelschlag eines Schmetterlings oder eines Kolibris bei Lorenz – Ertel sagte, der Husten eines Chinesen – die Großwetterlage vollständig verändern kann und irgendwann einmal verändern muß. Dabei ist es völlig gleichgültig, ob es der Flügelschlag oder der Husten ist, sondern es besteht eine notwendige Grenze für die Vorhersagbarkeit, die durch die Größe des betrachteten Systems und durch die Struktur der Eulerschen bzw. der Euler-Lagrangeschen Gleichungen unter zusätzlichen Annahmen über die Dichte- und Druckverhältnisse und die Temperatur gegeben ist.

Ich möchte, bevor ich schließe, noch eine einzige Bemerkung machen, die uns damals auch durch den Kopf ging, aber noch nicht ausformuliert wurde. Herr Ertel hat ja in seinen großartigen Arbeiten über die nichtbarotropen Flüssigkeiten die Temperatur T als Variable stehen lassen. Wir wissen aber, das geht nur gut, solange man im Sinne der klassischen Thermodynamik, im Sinne der Helmholtz-Gibbsschen Thermodynamik von T sprechen kann. In dem Moment aber, wo T ein statistischer Mittelwert ist, kommen wir in eine Situation, die wiederum Schwierigkeiten mit sich bringt, die auch mit dem

KAM-Theorem zusammenhängen. Wir geraten hier in die Schwierigkeit, daß wir das T gar nicht kennen, daß T keine Variable in klassischen Koordinaten und auch nicht im Kontinuum im Sinne der klassischen Massendichte ist. Ähnliche Schwierigkeiten können auftreten, wenn man den Druck wiederum atomistisch definiert. Man sieht auch wiederum das Problem, daß am Ende alle auf ein reales Kontinuum oder auf ein großes thermodynamisches System bezogenen mechanischen Aussagen immer Aussagen sind, die sich auf chaotische Systeme beziehen, bei denen das Chaos nicht durch eine mangelnde Gesetzlichkeit, sondern durch einen Überdeterminismus entsteht.

Das überdeterminierte Chaos, das Poincaré ziemlich gleichzeitig mit seinem Wiederkehrsatz formuliert hat, greift ganz stark in alle statistischen physikalischen Aussagen ein. Es berührt im letzten Grund auch die atomare Struktur des Atmosphäre und die vielen thermodynamischen Gesetze, die in letzter Instanz wiederum atomistische Effekte sind, die wir also nicht mehr im Detail verfolgen können, und die genau so überraschende Ergebnisse bringen können, wie der Ort, an dem sich bei der Poincaréschen Birne ein rotierender Himmelskörper abspaltet oder der Ort, wo sich beim Jacobischen Ellipsoid die dritte Achse ausbildet. Alles dies ist per definitionem nicht voraussagbar, und damit stoßen wir auf jedem Gebiet, das sich dieser Hilfsmittel bedient – und sie müssen sich alle dieser Hilfsmittel bedienen –, immer auf Grenzen, die die Voraussagbarkeit nicht wegen mangelnder Kenntnisse, sondern wegen der Überdeterminiertheit der Systeme selbst belasten.

Dies hat – wie gesagt – Herrn Ertel und mich zuletzt beschäftigt, und ich weiß, daß Herr Ertel ganz außerordentlich tief bewegt war und vor allen Dingen eins sagte: Ja, mein Gott, hätten wir doch Poincaré gelesen! Aber diese Bücher hatte außer Spezialisten keiner gelesen.