Helmert, Bruns, Einstein

Helmut Moritz, Graz

Vorgelegt beim Kolloquium der Leibniz-Sozietät
über Themen der Wissenschaftlichen Geodäsie

in Berlin am 14 .September 2012

Zusammenfassung

Friedrich Robert Helmert (1843-1917) war zweifellos einer der größten Geodäten unserer letzten Jahrhunderte.

Sein Buch „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie", insbesondere Band 2 (1884), ist noch immer ein Standardwerk, das umfassend wie kein anderes ist und daher auch 1962 nachgedruckt wurde. Es hat einige Generationen von Geodäten geprägt.

Natürlich hat sich die Erdmessung („Höhere Geodäsie" nach Helmert) seither ganz wesentlich weiter entwickelt, insbesondere in den letzten 50 Jahren durch die Verwendung der künstlichen Satelliten. Helmerts Nachwirken sei an Hand von zwei Beispielen kurz erläutert.

Helmert war der Erste, der die Abplattung des Erdellipsoids aus einem Satelliten bestimmte, nämlich aus unserem natürlichen Satelliten, dem Mond. Der von ihm erhaltene Wert 1/297.8 war schon wesentlich besser als der damals (und noch später) viel verwendete Wert von Bessel (1841).

Aus dem Umkreis von Helmert stammt auch die grundlegende Arbeit von Heinrich Bruns „Die Figur der Erde", Veröffentlichung. des Geodätischen Instituts Berlin, 1878. Bruns' Idee eines weltumspannenden räumlichen Polyeders von Messpunkten auf der Erdoberfläche wurde in der Satellitentriangulation verwirklicht, die schließlich zu GPS und ähnlichen Verfahren führte. Bruns machte auch fundamentale Untersuchungen über die Konvergenz von Reihen, die für die Astronomie und die Geodäsie relevant sind.

Schließlich wird auf unerwartete Weise noch Einstein eingeführt, nicht nur als *genius loci.*

Abstract

Friedrich Robert Helmert (1843-1917) was certainly one of the greatest geodesists of our last centuries.

His book „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie", particularly Volume 2 (1884), is still regarded as a standard work, comprehensive as no other book; hence it was reprinted in 1962. It has shaped the minds of generations of geodesists.

As a matter of fact, geodesy has progressed by giant steps since Helmert's time, especially during the last 50 years by the use of artificial satellites. Let us briefly characterize the impact of Helmert on these developments by means of two examples.

Helmert was the first to determine the flattening of the Earth ellipsoid by a satellite, namely the Moon. He obtained the value 1/297.8, which is much better than the value of Bessel much used at his time (and still later).

From the circle around Helmert we also have the fundamental work by Heinrich Bruns "Die Figur der Erde", published 1878 by the Geodetic Institute in Berlin. The idea of Bruns, of a global spatial polyhedron consisting of points on the Earth's surface, was realized by satellite triangulation, which finally led to GPS and similar techniques. Bruns also made

fundamental investigations relevant to the convergence of series used in astronomy and geodesy.

Finally we introduce, in a somewhat unexpected way, Albert Einstein, not only as *genius loci.*

Dem Andenken an Hans-Jürgen Treder gewidmet

Vorbemerkung

In diesem Kurzvortrag möchte ich nur einige Bemerkungen über unerwartete und wenig bekannte Zusammenhänge zwischen drei Wissenschaftlern (Helmert, Bruns, Einstein) und dem Berliner bzw. Potsdamer Geodätischen Institut versuchen, die mir im Zuge meiner wissenschaftlichen Arbeit aufgefallen sind. Eine ausführliche Würdigung mögen Berufenere leisten.

1. Helmert

Friedrich Robert Helmert (1843-1917) war zweifellos einer der größten Geodäten unserer letzten Jahrhunderte.

Sein Buch „Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie", insbesondere Band 2 (1884), ist noch immer ein Standardwerk, das umfassend und interessant wie kein anderes ist und daher auch 1962 nachgedruckt wurde. Es hat einige Generationen von Geodäten geprägt.

Natürlich hat sich die Erdmessung („Höhere Geodäsie" nach Helmert) seither ganz wesentlich weiter entwickelt, insbesondere in den letzten 50 Jahren durch die Verwendung der künstlichen Satelliten.

Helmert (1884, S. 473) war aber der Erste, der die Abplattung des Erdellipsoids aus einem Satelliten bestimmte, nämlich aus unserem natürlichen Satelliten, dem Mond. Der von ihm erhaltene Wert 1/297.8 war schon wesentlich besser als der damals (und noch später) viel verwendete Wert von Bessel aus dem Jahre 1841.

Wir wollen uns also vor allem beschäftigen mit

Helmerts „physikalischen Theorien"

Dieses Buch kann auch noch heute mit großem Gewinn gelesen werden. Es gibt keine umfassendere Einführung in die Gedankenwelt der physikalischen Geodäsie. Manches mag heute (seit 1884!) überholt wirken, aber die grundlegenden Gedanken stimmen. Manches, wie die soeben erwähnte Bestimmung der Erdabplattung aus Mondbeobachtungen, wirkt heute noch bestürzend neu. Helmerts Werk ist das erste Buch, das die von Gauß und Listing begründete „kopernikanische Revolution" ernst nahm. Er betrachtete als Erdfigur nicht eine bestimmte mathematische Fläche, nämlich die Kugel oder ein Rotationsellipsoid, und versuchte, aus Messungen seine Größe und Gestalt zu bestimmen, wie man das von Eratosthenes bis zu den Gradmessungen der französischen Akademie in Peru und Lappland für selbstverständlich angesehen hatte. Dass die Messungen von der Lotrichtung, also letztlich *physikalisch* bestimmt waren, wurde als selbstverständlich ignoriert.

Carl Friedrich Gauß war der Erste, der diese Tatsache ernst nahm und der die „mathematische Erdfigur" als jene Fläche *definierte*, die überall zur Lotrichtung senkrecht steht und deren Teil die (idealisierte) Oberfläche der Ozeane bildet.

Gauß fragte nicht, ob diese Fläche ein Ellipsoid sei. In der Tat, sie ist kein Ellipsoid und keine andere regelmäßige geometrische Fläche. Sie ist eine unregelmäßig wellenförmig „eingebeulte“ Fläche, die Listing später *Geoid* nannte (die „Beulen“ sind nicht sehr groß, maximal 100 m, recht wenig im Vergleich zu einem Erddurchmesser von etwa 12000 km, aber doch vorhanden und bei der heutigen Messgenauigkeit durchaus beachtlich.

Wichtig ist aber die Gaußsche Entdeckung, dass die Geodäsie nicht eine rein *geometrische*, sondern in gleichem Maße eine *physikalische* Wissenschaft ist, und das wurde von Helmert zum ersten Mal konsequent und umfassend realisiert, wie auch im Titel seines 2. Bandes klar, fast provokant zum Ausdruck gebracht ist.

Dieses Helmertsche Prinzip hat sich voll durchgesetzt, wie mehr als ein halbes Jahrhundert später erschienene Standardwerke wie die Bücher von Baeschlin (1948) oder Heiskanen und Vening Meinesz (1958) zeigen, die im Wesentlichen kaum über Helmert hinausgehen (Ausnahmen sind etwa Isostasie und die Formel von Vening Meinesz für die Lotabweichungen).

Wesentliche Fortschritte gab es erst in der revolutionären Theorie von Molodensky (seit 1945) und in der Praxis, durch die Satellitengeodäsie seit dem ersten Sputnik 1957.

2. Bruns

Mit seiner kleinen aber viel zitierten Schrift „Die Figur der Erde“, Veröffentlichung des Preußischen Geodätischen Instituts 1878, hat sich der bekannte Mathematiker Heinrich Bruns (1848-1919) würdig in den Kreis um Helmert eingefügt; im Vorwort seines Buchs sprach Helmert (1884) von einem „*überaus lichtvollen Grundriss*“. Mit unerhörter mathematischer Prägnanz stellte Bruns die theoretischen Grundlagen der Geodäsie dar. Bekannt geworden sind zum Beispiel das „Brunssche Polygon“, der Gedanke einer weltumspannenden räumlichen Triangulation, die erst nach 1957 durch die Satellitentriangulation verwirklicht werden konnte.

Auch das von Helmert so genannte „Theorem von Bruns“, ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Störpotential T und der Geoidundulation N, ist sehr einflussreich geworden, besonders in der Verallgemeinerung von Molodensky auf die physische Erdoberfläche. Dieser wichtige Gedanke wurde von Bruns ganz klar herausgestellt, obwohl schon Stokes 1849 ihn implizit für seine Formel zur gravimetrischen Geoidbestimmung verwendet hatte.

Besonders berühmt geworden ist Bruns‘ provokante Definition der Geodäsie: *die Aufgabe der Geodäsie sei die Bestimmung des Schwerepotentials W der Erde.* Nun ist klar: nach Gauß (bereits 1828) ist die Aufgabe die Bestimmung der Geoids als einer Niveaufläche $W = W_0$ = const. Wenn man nun die *räumliche* Funktion $W(x,y,z)$ kennt, so braucht man W nur einer Konstanten gleich zu setzen, um nicht nur das Geoid, sondern alle Niveauflächen als Flächen konstanten Potentials zu erhalten. Das ist eine gedanklich einfache „operationelle“ Definition der Niveauflächen: sie stehen in jedem Punkt senkrecht auf dem grundsätzlich messbaren Schwerevektor.

Diese Brunssche Definition ist komplementär zur bekannten Definition Helmerts: die Geodäsie sei *die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche* (Helmert 1880).

Diese beiden Definitionen zeigen klar den Unterschied der Denkweise zwischen Helmert und Bruns. Helmert ist der theoretisch und praktisch orientierte Universalgeodät, Bruns ist der scharfe mathematische Denker.

Konvergenzprobleme

Hier möge man mir gestatten, persönlicher zu werden. Seit1970 beschäftigte ich mich mit dem Konvergenzverhalten geodätischer Reihen wie der Kugelfunktions-Entwicklung des äußeren Gravitationspotentials und der Reihenlösung des Problems von Molodensky. Dabei fand ich eine Ähnlichkeit mit der Konvergenz astronomischer Reihen, die Poincaré (1893) unter dem Begriff „asymptotische Reihen" eingehend untersuchte, sich dabei auch auf Bruns beziehend; siehe auch Wintner (1941, S. 407-409). Hier erkannte ich wieder Bruns' klares Denken, von dem Wintner schreibt:

„It is interesting that the astronomer Bruns was led to the series […] and to a quite precise study of its pathological behavior, much earlier (1884) than the general theory of Borel series was developed by the mathematicians." Für Einzelheiten darf auf die Überblicksartikel (Moritz 1992) und (Moritz 2003) verwiesen werden.

Noch zum großen Mathematiker Henri Poincaré: er interessiert sich auch für Geodäsie und war französischer Vertreter in der Internationalen Erdmessung, deren Zentralbüro Helmert leitete. Das ist ein wenig bekannnter Zusammenhang..

3. Einstein

Dialektik der begrifflichen Definitionen der Geodäsie (Erdmessung)

Wir können schließlich die historischen begrifflichen Definitionen der Geodäsie als Erdmessung zwanglos in ein dialektisches Schema von These – Antithese – Synthese bringen, in dem Helmert, Bruns und Einstein eine Schlüsselrolle spielen.

3.1. These: Geodäsie ist Geometrie

Für die alten ägyptischen Feldmesser, war die Erde eine *Ebene*, Eratosthenes (um 200 v. Chr.) war sie eine *Kugel*, deren Radius er zu bestimmen versichte, und im 18. Jahrhundert wurde sie als *Rotationsellipsoid* betrachtet, dessen Parameter eine Expedition der Französischen Akademie der Wissenschaften nach Peru (Bouguer) und Lappland (Maupertuis) zu bestimmen trachtete.

Das Ellipsoid spielt bis heute eine grundlegende Rolle als Bezugsfläche. Es ist mit den Namen von Bessel und Helmert (Band 1,1880) verbunden.

3.2. Antithese: Geodäsie ist Geometrie + Gravitation

Gauss hat die grundlegende Bedeutung einer physikalischen Definition der „mathematischen Erdfigur" als Niveaufläche des Schwerepotentials erkannt: Seine Ideen wurden durch Bruns und Helmert (Band 2, 1884) weitergeführt, wie wir gesehen haben. Diese Definition der „Physikalischen Geodäsie" gilt bis heute.

3.3. Synthese: Geodäsie ist Geometrie (in 4D)

Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie **Albert Einsteins** (1879-1955) ist Gravitation die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit, die durch den Riemannschen Krümmungstensor R_{ijkl} ausgedrückt werden kann.

Dieser Gedanke wurde in geodätisch relevanter Weise von J. L. Synge (1966) aufgegriffen: er sagt auf S.109

R_{ijkl} = gravitational field

und spricht auf S. 157 von einem „relativistically valid geodetic survey“.

So wird aus der dreidimensionalen Dynamik (mit Gravitationskraft) eine vierdimensionale Kinematik (reine Geometrie ohne Kraft); man spricht auch von „kinematischer Geodäsie“ (Moritz 1967).

Die Relativitätstheorie ist eine neue methodische Grundlage der physikalischen Geodäsie. Im Allgemeinen kommt man aber mit der klassischen Physik aus. Für höchste Genauigkeit braucht man allerdings „relativistische Korrekturen“ für Satellitenbahnen, deren Kenntnis aber wohl den Spezialisten vorbehalten werden kann (Beutler 2005, Kap.3.5), während die Grundlagen (Moritz, Hofmann-Wellenhof 1993) von allgemeinerem Interesse sein dürften.

Immerhin ist diese Dialektik der Definitionen insofern gerechtfertigt, als die Synthese wirklich eine Betrachtung der These auf höherem Niveau ist. Die These (Geometrie 2D, 3D) wird in der Synthese auf höherer Ebene (Geometrie 4D) bestätigt.

Literatur

Baeschlin C F (1948) Lehrbuch der Geodäsie, Orell Füssli Verlag Zürich.

Beutler G (2005) Methods of Celestial Mechanics, Band 1, Springer, Berlin.

Bruns H (1878) Die Figur der Erde, Publikation des Königl. Preuss. Geodätischen Instituts, Berlin.

Bruns H (1884) Bemerkungen zur Theorie der allgemeinen Störungen, Astron. Nachr., 109 (14), 216-222.

Heiskanen W A, Vening Meinesz F A (1958) The Earth and its Gravity Field, McGraw-Hill, New York.

Helmert F R (1880) Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Band 1: Die mathematischen Theorien, Teubner, Leipzig (Nachdruck 1962).

Helmert F R (1884) Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Band 2: Die physikalischen Theorien, Teubner, Leipzig (Nachdruck 1962).

Moritz H (1967) Kinematical Geodesy, Report No. 92, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus.

Moritz H (1997) The sand grain and the butterfly: instability in geodesy and geophysics, Annali di geofisica XL (5), 1359-1364.

Moritz H (2003) The strange behavior of asymptotic series in mathematics, celestial mechanics and physical geodesy, in: E W Grafarend, F W Krumm, V S Schwarze (Hrsg.) Geodesy: The Challenge of the Third Millennium, Springer, Berlin, S. 371-377. (Im Internet: Google-Suche nach “asymptotic series”.)

Moritz H, Hofmann-Wellenhof B (1993) Geometry,Relativity, Geodesy, Wichmann, Karlsruhe.

Poincaré H (1893) Les methods nouvelles de la mécanique céleste, Band 2, Gauthier-Villars, Paris (Nachdruck 1987).

Synge J L (1960) Relativity: The General Theory, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

Wintner A (1941) The Analytical Foundations of Celestial Mechanics, Princeton Univ. Press.

Helmert, Bruns, Einstein

Helmut Moritz, TU Graz

Vorgelegt beim Kolloquium der Leibniz-Sozietät
über Themen der Wissenschaftlichen Geodäsie

in Berlin am 14 .September 2012

1. Friedrich Robert Helmert (1843 -1917)

Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie

Band 1. Die mathematischen Theorien (1880)

Helmert 1880: Aufgabe der Geodäsie: Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche

Band 2. Die physikalischen Theorien (1884)

Bestimmung der Erdabplattung aus der Mondbahn 1/297.3

„Kopernikanische Revolution“ Ellipsoid → Geoid (Gauß) $W = W_0$

Bruns 1878: Aufgabe der Geodäsie: Bestimmung des Schwerepotentials

Weiter Molodensky (1945)

Satellitengeodäsie (nach Sputnik 1957)

2. Heinrich Bruns (1848 – 1919)

„Die Figur der Erde“ 1878

Urteil von Helmert (Band 2, Vorwort): „überaus lichtvoller Grundriss“

Zukunftsweisend: Geodäsie als Bestimmung des Schwerepotentials der Erde

„Brunssches Polyeder“ → Satellitentriangulation, GPS etc.

Helmert: theoretisch und praktisch orientierter Universalgeodät

Bruns: scharfer mathematischer Denker

Bruns‘ Arbeiten über Konvergenzprobleme astronomischer Reihen (1884)

Bruns war Vorläufer von Poincaré (1893) „**Divers sens du mot convergence“**

Unterscheidung mathematischer und numerischer Konvergenz

Asymptotische Reihen : praktische Konvergenz mit wenigen Gliedern bei mathematischer Divergenz.

Beispiele

Die Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

konvergiert mathematisch, aber viel zu langsam für numerische

Verwendung,

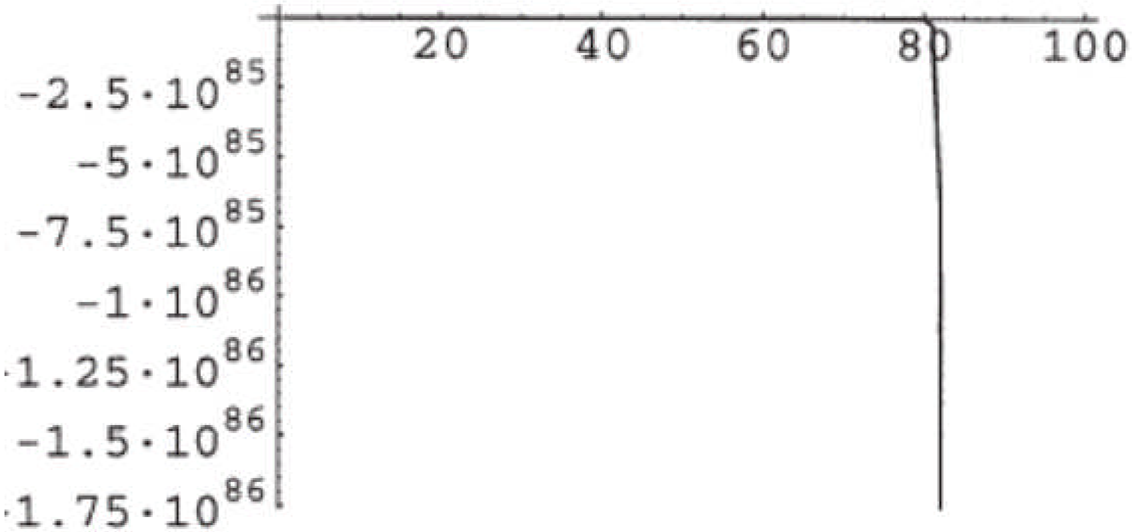
während die asymptotische Reihe

$$\frac{e^x}{x}\left(1 + \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} + \dots\right)$$

mathematisch divergiert, aber für nicht zu kleine x (> 16.6) schon mit

wenigen Gliedern numerisch höchst genaue Ergebnisse liefert.

Das wird durch folgende Darstellung   des Approximationsfehlers gezeigt. Schon mit wenigen Gliedern (etwa n = 3) ist der Approximationsfehler sehr klein, aber bei Verwendung sehr vielen Gliedern (ungefähr n = 80) beginnt er plötzlich rasant zu steigen, was die schließliche Divergenz sehr drastisch zeigt:



Ahnliches auch in der Geodäsie :

Kugelfunktionsreihe des Gravitationspotentials,
Reihe von Molodensky

3. Dialektik der begrifflichen Definitionen der Geodäsie (Erdmessung)

3.1. **These: Geodäsie ist Geometrie**

Ägyptische Feldmesser (Ebene)

Eratosthenes (Kugel)

Gradmessung des18.Jh. (Ellipsoid)

Ellipsoidische Geodäsie (Bessel, Helmert Band 1)

3.2. **Antithese: Geodäsie ist Geometrie + Gravitation**

Gauß, Bruns, Helmert Band 2 bis heute

Physikalische Geodäsie, auch „Dynamische Geodäsie“

3.3. **Synthese: Geodäsie ist Geometrie (in 4D)**

Allgemeine Relativitätstheorie 1916

Einstein: Gravitation = Krümmung der Raumzeit

J. L. Synge (1966): *Rijkm* = gravitational field;

er spricht von einem „relativistically valid geodetic survey“

Dreidimensionale Dynamik = vierdimensionale Kinematik

Manchmal spricht man von „Kinematischer Geodäsie“