Gerd Laßner

# Die Zahlen der Physik*

## 0. Einleitung

Im Jahre 1972 hielt der namhafte Physiktheoretiker Freedman J. DYSON die „Gibbs-Vorlesung" unter dem Titel „Missed Opportunities" [DYSO72]. Er berichtete in dieser Vorlesung, daß er sich in den Ferien, wenn er sich von der Physik erholen will, mit Zahlentheorie befaßt. Dabei hatte er für die Entwicklungskoeffizienten $\tau(n)$ der 24-ten Potenzen der Dedekindschen $\eta$-Funktion

$$(0.1) \qquad \eta(x)^{24} = x \prod_{m=1}^{\infty} (1-x^m)^{24} = \sum_{n=1} \tau(n) x^n$$

eine merkwürdige Formel gefunden. Er entdeckte dann noch solche Formeln für andere Potenzen der $\eta$-Funktion und schaute, wie er berichtet, verwundert auf die Liste der Potenzen d, für die solche Formeln existieren:

$$(0.2) \qquad d = 3, 8, 10, 14, 15, 21, 24, 26, 28, 35, 36, \ldots$$

Als Physiktheoretiker, in einer Zeit, in der die Symmetriegruppen die Quantentheorie beherrschen, erkannte er, daß all diese Zahlen, außer der 26, die Dimensionen der kompakten Lieschen Symmetriegruppen in aufsteigender Folge sind. Diese „very strange formulas", wie sie genannt werden, haben eine lange Geschichte, die auf EULER und JACOBI zurückgeht. Ohne daß er es wußte, wie DYSON weiter erzählte, hatte MACDONALD die gleichen Formeln bei seinen Forschungen über modulare Formen gefunden, und zwar zu einer Zeit, als beide gemeinsam am Institute for Advanced Studies in Princeton arbeiteten. Dies bezeichnete Dyson als

* Vortrag, gehalten in der Klasse Naturwissenschaften der Leibniz-Sozietät am 22. Dezember 1995

eine erste solche „verpaßte Gelegenheit“ und wertete dies als einen Ausdruck des unbegründeten Abstandes zwischen Mathematik und Physik. DYSON schreibt dann weiter: „... MACDONALD klärte das ganze Gebiet ohne meine Hilfe glücklich auf. Das einzige Ding, was er nicht klärte, war der Fall d = 26, welcher weiterhin ein quälendes Mysterium bleibt“. DYSON verliert dann kein Wort mehr über die 26, obwohl sie in den ältesten Versionen der Stringtheorie bereits eine Rolle spielte. Das hätte DYSON später eine weitere „verpaßte Gelegenheit“ nennen können. Allerdings mußte noch mehr als ein Jahrzehnt vergehen, bevor die Stringtheorie im Jahre 1984 eine „dramatische Wiedergeburt“ erlebte ([KAKU93], S.125 und [WEIN93], S.224) und dann nach und nach offensichtlich wurde, daß ein direkter Weg von den physikalischen Ideen der Stringtheorie zur Zahlentheorie führt und speziell auch zu DYSONS merkwürdigen Formeln und der seltsamen Zahl 26.

Diese Geschichte illustriert, welch innerer Zusammenhang zwischen zahlentheoretischen und physikalischen Wahrheiten existiert. Daß sich diese Zweige der Naturerkenntnis im Schaffen großer Gelehrter, von KEPLER, NEWTON, LEIBNIZ über EULER, LAGRANGE, GAUß, JACOBI und MINKOWSKI, bis hin zu DYSON, vereinen, ist Legende. Neu ist, daß durch die Entstehung der Stringtheorie sichtbar wird, wie der Reichtum der zahlentheoretischen Beziehungen bereits in die Fundamente der Physik, tiefer als die Elementarteilchen, gelegt ist. Unter diesem Gesichtspunkt erscheinen auch die Beziehungen der Zahlen und Gesetze der klassischen Physik zu zahlentheoretischen Wahrheiten, die bisher immer den Anstrich „mathematischer Zufälligkeiten“ hatten, in einem anderen Licht.

Noch eine Bemerkung aus der Dysonschen Vorlesung wollen wir aufgreifen. Er schreibt, daß er aus den berühmten Übersichtsvorträgen von HILBERT 1900 und MINKOWSKI 1908 gelernt hat, daß man nicht verständlicher wird, wenn man allgemein über die Dinge redet, sondern daß es besser ist, die Problematik an konkreten Fakten zu erläutert. Davon wollen auch wir uns leiten lassen.

Der Titel dieses Vortrages kann Verwunderung und Widerspruch hervorrufen. Was sollen „Die Zahlen ...“ der Physik sein? Soll es einen Sinn haben, und welchen, von den Zahlen einer speziellen Wissenschaft zu sprechen? Schauen wir zuerst auf einfachste Beispiele. Die Kreiszahl $\pi$ = 3,14... und die Basis des natürlichen Logarithmus e = 2,73... wird man

als Zahlen der Mathematik ansehen. Wenn man diesen Zahlen in der Physik, Chemie, Biologie usw. begegnet, sieht man dies in der Regel als eine Konsequenz der Anwendung der Mathematik an. Anders ist es mit der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante $\alpha$ (2.17). Sie wird man als eine Zahl der Physik akzeptieren. Wenn sie in chemischen Arbeiten vorkommt, so wird man dies wiederum als eine Konsequenz der Anwendung der Physik in der Chemie verstehen. Die Feinstrukturkonstante $\alpha$ ist eine fundamentale Naturkonstante. Sie ist dimensionslos und dadurch vollkommen unabhängig von der Wahl des Maßsystems. Trotzdem ist es noch keine Zahl der Mathematik, da sie noch nicht berechnet werden kann.

Ganz anders sieht es mit der Strahlungskonstanten $\sigma$ in der Stefan-Boltzmannschen-Strahlungsformel $U = \sigma T^4$ aus. Obwohl diese Konstante der klassischen Physik auf den ersten Blick viel weniger „fundamental" erscheint als die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante, ist sie, bezogen auf das absolute Maßsystem, eine vollständig berechenbare Größe. Dies werden wir in den zentralen Teilen des Vortrages ausführlich diskutieren.

Alle Zahlen der Physik, die sich bereits berechnen lassen, gehören zu ganz wenigen Typen. Die meisten von ihnen gehören überhaupt nur zu einem Typ. Sie lassen sich aus der $\zeta$-Funktion berechnen. Es ist ein Hauptanliegen dieses Vortrages zu verdeutlichen, daß ein enger Zusammenhang zwischen physikalischen und zahlentheoretischen Gesetzmäßigkeiten besteht, der bereits in der klassischen Physik immanent ist, obwohl er dort noch als „zufällig" erscheinen kann. Ganz offensichtlich wird diese Tatsache durch die Stringtheorie, eine der neuesten Entwicklungen in der Elementarteilchenphysik.

Bevor wir im nächsten Abschnitt detaillierter darauf eingehen, welche Zahlen in der Physik auftreten, sollen noch einige Worte zur Zahlentheorie selbst gesagt werden. Den Babyloniern verdanken wir das älteste erhaltengebliebene Dokument der Zahlentheorie, das auf etwa 1900 v. u. Z. zu datieren ist. Der Text gibt ganzzahlige Lösungen der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ an, d.h., er bezieht sich auf Pythagoreische Tripel. Nach der chinesischen Mythologie zu urteilen, geht das Interesse für die Zahlen bis auf 3000 Jahre v.u.Z. zurück, doch ist uns kein Zeugnis dieses Zeitalters überliefert ([DIEU85], S.171). Neben einigen zahlentheoretischen Problemen, die im „Euklid" genannt sind, ist aus dem Altertum vor allem das Werk des DIOPHANT von Alexandria zu nennen, der, soweit bekannt ist, der älteste

Autor ist, der über Algebra geschrieben hat. Das Werk handelt von den Eigenschaften der Zahlen und enthält schwierige Aufgaben, die mit großer Geschicklichkeit und viel Scharfsinn gelöst sind. Als Diophantisches Problem bezeichnet man heute jede Aufgabenstellung, ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zu finden. Die berühmteste dieser Aufgaben ist die Fermatsche Vermutung: „Es gibt keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$x^n + y^n = z^n \quad \textit{für} \quad n \geq 3 \tag{0.3}$$

d.h., es gibt keine Verallgemeinerung der Pythagoreischen Tripel für Potenzen n > 2." Diese Vermutung ist erst vor kurzem bewiesen worden. In welchem Bezug dieses zahlentheoretische Problem zur Physik steht, werden wir noch erläutern (Abschnitt 4). FERMAT verdankt man eine große Zahl merkwürdiger Sätze der Zahlentheorie, die er meistens ohne Beweis geliefert hat, und von denen auch einige falsch sind. Von diesen Problemen wollen wir noch eines erwähnen, das auch in einem interessanten Zusammenhang zu physikalischen Problemen steht: Jede natürliche Zahl n ist Summe von vier Quadraten,

$$\text{Vierquadratesatz:} \qquad n = x^2 + y^2 + z^2 + t^2. \tag{0.4}$$

Es waren erst EULER und dann LAGRANGE, die die Zahlentheorie durch ihre Beiträge in den Rang einer modernen mathematischen Disziplin erhoben. Im Gedankenkreis der Gelehrten, die die Grundlagen für die heutige mathematische Physik legten, nahmen zahlentheoretische Betrachtungsweisen noch einen markanten Platz ein. LAGRANGE, den heute jeder Physikstudent zu den Physikern zählt, löste den Vierquadratesatz. Die Untersuchungen dazu sind in den Abhandlungen unserer Akademie niedergelegt. Daß damit der Zusammenhang dieses „exotischen" zahlentheoretischen Problems zur Physik noch nicht beendet ist, werden wir im weiteren noch sehen.

Die Bewertung von tiefgehenden und erstaunlichen Beziehungen zwischen Zahlen als Ausdruck wesentlicher Zusammenhänge des Universums ist seit dem Pythagoreismus immer mehr in den Hintergrund getreten und wird auch heute noch fälschlicherweise als Zahlenmystik abgewertet. In der üblichen Darstellungsweise der Physikgeschichte wird KEPLER nach

KOPERNIKUS an den Anfang der neuzeitlichen Physik gestellt, und seine weltanschaulichen Überzeugungen über die nicht zuletzt mathematische Harmonie im All, auf deren Grundlage er seine Entdeckungen machte, werden als mystische Überbleibsel dargestellt. In Wirklichkeit ist dem ganz und gar nicht so, sondern bis hin zu den Giganten der wissenschaftlichen Revolution, NEWTON und LEIBNIZ, war ein Weltbild über den grundlegenden Charakter einer inneren Harmonie des Universums, die weit über das hinausgeht, was man heute „Newtonsche Physik" nennt, dominierend. Was NEWTON anbelangt, so scheint im besonderem Maße von seinen Nachfolgern regelrechte Fälschung am Werke gewesen zu sein, um Spuren einer wesentlichen Seite seines Weltbildes zu tilgen, damit nicht eine Vorstellungswelt des Meisters das Bild einer Physik trübt, die man in seinem Namen verfochten hat. Daraus erklärt sich wohl auch die Tatsache, daß man offensichtlich seine alchimistischen Schriften versteckte, so daß sie erst 1936 gefunden wurden. So liest man heute sogar schon die Bemerkung, daß man NEWTON als den letzten Alchimisten ansehen muß. Für die Bewertung eines Gelehrten, der so wie NEWTON zu einer Revolution in der Wissenschaft beigetragen hat, bedeutet das keinen Widerspruch zu anderen Einschätzungen. Was allerdings zu korrigieren ist, ist die Vernachlässigung in der erkenntnistheoretischen Wichtung tiefgehender mathematischer Zusammenhänge, die, wie gesagt, auch heute noch als „Zahlenmystik" oder „Numerologie" abgewertet werden. Natürlich gab es dafür handfeste Gründe aus der Praxis der wissenschaftlichen Arbeit heraus. Wie wir schon bemerkten, hatte selbst die Mathematik bis zu EULER und LAGRANGE kein wissenschaftliches Instrumentarium, um die einfach zu formulierenden Probleme über zahlentheoretische Zusammenhänge methodisch zu behandeln. Darüber hinaus mußten in einem auf mechanistische Vorstellungen reduzierten Weltbild die zahlentheoretischen Zusammenhänge als „Kuriosum" erscheinen. Obwohl LEIBNIZ schon weiter war, hat selbst ein solcher Geistesgigant wie KANT die Annahme eines dreidimensionalen Raumes noch als apriori gegebene Denknotwendigkeit bezeichnet. Weit war der Weg von dieser Zeit über die Raum-Zeit Einsteins und Minkowskis bis hin zu den mehrdimensionalen „wirklich physikalischen" Räumen der Stringtheorie, um den Raum wieder als das zu nehmen, was er nach LEIBNIZ ist, eine Ordnungsbeziehung zwischen den Dingen. Dabei ist keineswegs jede Raumdimension gleichwertig. Man kann

die „echten" physikalischen Probleme nicht in irgendeiner Dimension formulieren, so wie es bei mechanischen oder steuerungstheoretischen Problemen oft geschieht, indem man sagt, „nehmen wir an, wir haben n Freiheitsgrade und wählen deshalb einen n-dimensionalen Raum". Jede spezielle Seite der physikalischen Beziehungsmannigfaltigkeit bestimmt ihren Raum und damit auch seine Dimension. Die Superstrings „leben" in einer 10-dimensionalen Welt und die Bosonenstrings in einer 26-dimensionalen. Auf die letztere werden wir näher eingehen, weil damit besonders schöne und einfach formulierbare zahlenmäßige Zusammenhänge verbunden sind. Nicht zuletzt drückt sich die ausgezeichnete Stellung der Dimension 26 in der Tatsache aus, daß die „kuriose" Beziehung

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 24^2 = 70^2 \tag{0.5}$$

nur für diese aufeinanderfolgenden Zahlen gilt, also für kein anderes n ist $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = a^2$ mit irgendeiner ganzen Zahl a, eine Tatsache, die schon 1924 MORDELL bewiesen hat. Wieso aber die Dimension 26, wenn in dieser Gleichung die Zahlen nur von 1 bis 24 laufen? Um diesen Zusammenhang zu sehen, mußte man erst entdecken, welche exzeptionelle Bedeutung der ganzzahlige Vektor (0,1,2,3,...,24,70) im 26-dimensionalen Minkowskiraum mit den Koordinaten $(x_1, x_1, \ldots, x_{26})$ hat. Es ist nämlich $x_1^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{25}^2 - x_{26}^2 = 0$ für diesen ganzzahligen Vektor. Er ist damit ein ausgezeichneter lichtartiger Vektor. Wir kommen darauf im letzten Abschnitt über „Minkowski, Dyson und die 26" zurück.

Bevor wir uns aber in die exotischen Dimensionen der Stringtheorien begeben, wollen wir uns die Zahlen der klassischen Physik genauer ansehen.

## 1. Beispiele für Zahlen der Physik

Wir wollen jetzt alle allgemeineren Erörterungen darüber, was die Zahlen der Physik sind, beiseite lassen und gleich konkret werden, indem wir uns anhand von zwei Büchern über Physik ansehen, welche Zahlen genannt werden. Wir nehmen dazu das Lehrbuch der Theoretischen Physik von Joos, das erstmals 1932 erschien und auch heute noch ein Standardwerk der klassischen theoretischen Physik ist [JOOS59], und das Buch

Mikrokosmos-Makrokosmos von LANIUS, das eine aktuelle Darstellung des Weltbildes der Physik ist, wie es auch im Untertitel heißt [LANI88]. In beiden Büchern findet man hundertfünfzig bis zweihundert Zahlen. Schauen wir uns zuerst bei JOOS an, welche Zahlen in der klassischen theoretischen Physik auftreten.

Da sind zuerst die Zahlen in den Naturgesetzen zu nennen, etwa in folgenden Beispielen:

**Gravitationsgesetz.** Die Gravitationskraft K ist den beiden beteiligten Massen $M_1$, $M_2$ jeweils proportional und dem Quadrat der Entfernung r umgekehrt proportional:

$$K = G\frac{M_1 M_2}{r^2}, \quad g = 6{,}667 \cdot 10^{-11}\frac{N\,m^2}{kg^2}. \tag{1.1}$$

G ist die Gravitationskonstante, die wir im SI-System der international festgelegten Maßeinheiten angeben.

**Fallgesetz.** Der Fallweg s ist dem Quadrat der Fallzeit t proportional:

$$s = \frac{1}{2}\,g\,t^2, \quad g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}. \tag{1.2}$$

g ist die Erdbeschleunigung. An dieser Stelle ist bewußt etwas „gemogelt", denn das Fallgesetz findet man in dieser Form im JOOS gar nicht, weil er es schon als einen Spezialfall des allgemeinen Beschleunigungsgesetzes ansieht. Außerdem ist die Erdbeschleunigung im heutigen Sinne keine Naturkonstante mehr, diese sind immer auf dem gesamten Kosmos bezogen, sondern man kann sie als „Erdkonstante" bezeichnen.

**Pendel.** Die Schwingungsdauer T des Pendels ist proportional der Quadratwurzel aus der Pendellänge L:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{1.3}$$

Was wir mit diesen drei Gesetzen verdeutlichen wollen, ist der Charakter der Zahlen, die in ihnen auftreten. Auf dem ersten Blick scheint es, daß die Gravitationskonstante in (1.1) eine „wesentlichere" Zahl der Physik ist, als die 2 (oder 1/2) im Fallgesetz. Das ist aber keineswegs so, denn die 2 kommt durch die Integralrechnung in die Formel hinein. Wenn man die 2 an dieser Stelle „verschwinden" läßt, also z.B. in das g mit hineinnimmt,

taucht sie an anderer Stelle wieder auf, etwa bei der Fallhöhe. Jedenfalls kann die 2 nicht durch eine andere Wahl der Maßeinheiten zum Verschwinden gebracht werden. Sie ist eine „echte" ganze Zahl in der Physik, die mit der Integration zusammenhängt.

Ganz anders ist es mit dem Wert der Gravitationskonstanten. Ihr Zahlenwert ergibt sich aus den Maßeinheiten m Meter, s Sekunde und kg Kilogramm, die Basiseinheiten im SI-System sind, und deren Größe an den Dimensionen des Menschen orientiert ist. Wegen des universellen Charakters der Gravitation im gesamten Kosmos könnte man, wenn die Einheiten Meter und Sekunde schon festgelegt sind, die Masseneinheit der Masse gerade dadurch definieren, daß die Gravitationskonstante exakt 1 werden soll. Wir kommen darauf im nächsten Abschnitt zurück, wenn wir das Plancksche absolute Maßsystem beschreiben.

Von einer ganz anderen Art ist die Zahl $2\pi$ beim Pendel. Wo kommt sie her? Man könnte im ersten Moment denken, daß die Kreiszahl $\pi$ dadurch in die Formel hineinkommt, weil das Pendel auf einer Kreisbahn schwingt. Bedenkt man aber, daß das $2\pi$ ebenfalls in der Formel für die Schwingungsdauer bei der Federschwingung auftritt (wie überhaupt in der Schwingungsformel für den harmonischen Oszillator), so sieht man, daß das $\pi$ auf Grund anderer Zusammenhänge hineinkommen muß. In der Tat hat es auch etwas mit einer Kreisfläche zu tun, aber nicht im gewöhnlichen Ortsraum, sondern mit einer Fläche im Phasenraum aus Ort und Impuls. Jeder harmonische Oszillator, egal ob Pendel oder Federschwingung, beschreibt im Phasenraum einen Kreis bzw. eine Ellipse. Daher kommt das $\pi$. Heute sollte jeder Gymnasiast das $2\pi$ in der Formel für die Schwingungsdauer herleiten können. Es folgt aus der Periode der Sinusfunktion, die als Lösung der Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator auftritt. Ohne Differential- und Integralrechnung ist dieser Zahlenfaktor schwer zu gewinnen. Dieses Problem hatte HUYGHENS 1673 durch kunstvolle Überlegungen gelöst. Seine Beweismethoden für dieses und ähnliche Probleme waren bereits konkrete infinitesimale Methoden, also Vorstufen der Differential- und Integralrechnung. Gehen wir nun zu einem weiteren Naturgesetz über, das bereits zu unserem Jahrhundert gehört.

**Spezifische Wärme fester Körper (Isolatoren).** Für niedrige Temperaturen ist die spezifische Wärme $C_V$ fester Körper proportional zur drit-

ten Potenz der Temperatur T. Es gilt genauer folgende Formel ([JOOS59], S.571):

(1.4) $$C_v = 233{,}8 \cdot R \left(\frac{T}{\Theta_D}\right)$$

$\Theta_D$ ist die sogenannte Debyesche Temperatur. Sie ist eine für das Material charakteristische Größe, die einzige Materialkonstante, die in die Formel eingeht. R ist die Gaskonstante, somit ein Größe von derselben Dimension wie die spezifische Wärme. Damit ist die Größe 233,8 dimensionslos, d.h. eine reine Zahl. Auf der Grundlage der Quantenhypothese wurde durch EINSTEIN (1907) und dann fortgesetzt durch DEBYE (1912) eine Theorie der spezifischen Wärme entwickelt, die die genaue Bestimmung dieser Zahl gestattete:

(1.5) $$233{,}8 = 9 \cdot 6 \cdot 4 \frac{\pi^4}{90}$$

An dieser Zahl fallen zwei Dinge auf. Einmal „merkwürdige" ganze Zahlen, wie die 90 und zum anderen höhere Potenzen von $\pi$. All dies entsteht durch Integration von Ausdrücken, die von der Planckschen Funktion P(x) herrühren, die im engen Zusammenhang zur Zahlentheorie steht, was im dritten Abschnitt ausgeführt wird.

Wir können jetzt schon eine erste Bilanz über die Zahlen der Physik ziehen. Unter den ersten Hundert Zahlen in [JOOS59] sind neben verschiedenen rationalen Zahlen, wie das $^1/_2$ im Fallgesetz, einmal die Naturkonstanten, über die wir im nächsten Abschnitt genauer sprechen werden, dann einige Materialkonstanten, auf die wir gleich noch eingehen werden, dann wird nur einmal eine algebraische Zahl wie $\sqrt{2}$ explizit genannt und eine Winkelgröße aus einem Kristallgitter. Alle anderen Zahlen hängen mit $\pi$ zusammen. Wir müssen allerdings noch ein Wort zur Zahl e = 2,71828... sagen, der Basis des natürlichen Logarithmus. Diese kommt natürlich in einer Vielzahl grundlegender Formeln der Physik vor, wie auch in der Planckschen Funktion oben. Da aber die Eulersche Beziehung

(1.6) $$e^{i\pi} = -1$$

gilt, gehört e zum „Umfeld" von $\pi$.

Was ist nun zu den Materialkonstanten zu sagen? Diese kann man zweifellos in schrankenloser Anzahl angeben. In [JOOS59] findet man nicht mehr als zwei Dutzend Beispiele explizit genannt, wie etwa den Brechungsindex des Wassers zu $n = 1{,}33$ oder dessen Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 80$ (S.310). Einerseits dominiert die Vorstellung, daß diese Zahlenwerte rein zufällig sind. Sie werden in der Praxis experimentell bestimmt. Andererseits kann man von sehr namhaften Physikern, wie den Nobelpreisträger Steven WEINBERG, den Autor des Weltbestsellers „Die ersten drei Minuten", die Auffassung hören ([WEIN93], S.29 ff.), daß es prinzipiell möglich sein muß, diese Zahlenwerte aus den bekannten physikalischen Gesetzen zu berechnen. Man kennt den markanten Ausspruch von EINSTEIN: „Gott würfelt nicht!" Darin drückt sich eine Überzeugung aus, die auch in extremer Konsequenz die Philosophie von LEIBNIZ bestimmt, daß nichts ohne zureichenden Grund geschieht. Für diese Zahlen bedeutet das, daß auch sie bestimmt sind, d. h., daß sie sich letztlich aus dem Gesamtzusammenhang heraus gewinnen lassen müssen. Dies soll aber keineswegs heißen, daß sie sich aus den heute bereits bekannten Gesetzmäßigkeiten berechnen lassen. Auch soll den Auffassungen der konsequenten „Reduktionisten", zu denen sich auch selbst WEINBERG zählt ([WEIN93], S.59), widersprochen werden, daß irgendwie eine allumfassende Theorie, aus der sich alles Meßbare prinzipiell berechnen läßt, kurz vor der Vollendung stehe. Ganz im Gegenteil, indem der Vortrag verdeutlichen möchte, wie sich schon in den bereits bekannten physikalischen Gesetzen auch wesentliche zahlentheoretische Beziehungen verschlüsselt finden, soll der Auffassung Ausdruck verliehen werden, auch in der Vielfalt der nach vorn offenen mathematischen Probleme einen Hinweis auf die unendliche Vielfalt der physikalischen Beziehungen im Universum zu sehen.

Bevor wir noch etwas mehr dazu sagen, schauen wir uns zuerst noch, wie angekündigt, Zahlenbeispiele aus dem Buch von LANIUS an. Dem Charakter dieses Buches entsprechend, sind dort solche Gesetzmäßigkeiten aus dem Mikro- und Makrokosmos beschrieben, die von prinzipieller Bedeutung für ein naturwissenschaftliches Weltbild sind. Ein Beispiel ist der sogenannte Kohlenstoffzyklus für die Kernfusion in heißen Sternen (S.195):

$$
\begin{array}{lll}
{}^{12}C + p \rightarrow {}^{13}N + \gamma & & + 1{,}95\ MeV \\
{}^{13}N \rightarrow {}^{13}C + e^{+} + \nu_e & & + 2{,}22\ MeV \\
{}^{13}C + p \rightarrow {}^{14}N + \gamma & & + 7{,}54\ MeV \\
{}^{14}N + p \rightarrow {}^{15}O + \gamma & & + 7{,}35\ MeV \\
{}^{15}O \rightarrow {}^{15}N + e^{+} + \nu_e & & + 2{,}71\ MeV \\
{}^{15}N + p \rightarrow {}^{12}C + {}^{4}He & & + 4{,}96\ MeV
\end{array}
\tag{1.7}
$$

Es beginnt also mit Kohlenstoff-12 links oben, dann kommen schrittweise vier Protonen auf der rechten Seite hinzu und am Ende ist Helium-4 entstanden und das Kohlenstoff-12-Atom steht für den nächsten Zyklus zur Verfügung. Zusätzlich wird Energie gewonnen, die dem Stern zur Abstrahlung zur Verfügung steht. Die Zahlenwerte der gewonnen Energien bestimmen wesentlich die Zeiträume für die Entwicklung der Sterne und Galaxien. Das läßt sich noch deutlicher machen bei einem weiteren Zahlenwert.

Das Neutron ist etwa ein Promille schwerer als das Proton. Das genaue Zahlenverhältnis ist

$$\frac{M_n}{M_p} = 1{,}001372\,. \tag{1.8}$$

Dieser feine Massenunterschied führt nach den Berechnungen im Standardmodell für das Universum zu der Konsequenz, daß 4 Minuten nach dem Urknall der Anteil der Neutronen unter allen Nukleonen nur noch 12% betrug. Berücksichtigt man diese und andere Abhängigkeiten, so kommt man zu einer Vorhersage des Standardmodells für den Helium-Gewichtsanteil von 24 % ([LANI88], S.240). Durch neue Messungen während des Fluges der Raumfähre Endeavour im März 1995 ist dieser Wert bestätigt worden.

Das Massenverhältnis (1.8) muß also den Wert haben den es hat, sonst wäre das Universum nicht so wie es ist und es gäbe keine Menschen. Analoges läßt sich heute schon für viele charakteristische Größen der Physik nachweisen, besonders auch für viele Materialkonstanten und solche Zahlen wie in (1.7). Die Existenz des Menschen erzwingt viele dieser Zahlenwerte mit einer erstaunlichen Genauigkeit. Ein Kompendium solcher Beziehungen der physikalischen Größen zur Existenz des Menschen ist das Buch von J.D. BARROW und F.J. TIPLER über das anthropische Prinzip [BARR88].

Unter den Zahlen der Physik nimmt das magnetische Moment $\mu_e$ der Elektronen einen besonderen Platz ein, weil es zu den Größen gehört, die gegenwärtig sowohl experimentell wie auch theoretisch am genauesten bestimmt werden können. Bezieht man es auf das Bohrsche Magneton (s. (2.16)), so gilt ([LANI88], S.139)

$$\frac{\mu_e}{\mu_B} = \begin{cases} 1{,}001\,159\,652\,410 & \text{experimentell} \\ 1{,}001\,159\,652\,359 & \text{theoretisch} \end{cases} \tag{1.9}$$

Neben den „nichtrationalen" Zahlenwerten wie in (1.8) und (1.9) (wobei bisher noch offen ist, ob diese Zahlenwerte nicht doch rational, d. h. Brüche p/q, sind), wirft die heutige Physik auch die Frage nach der Erklärung ganzer Zahlen auf. Dazu gehören einmal die Dimensionen, in denen die Elementarobjekte leben, also die Frage, warum ist die Raum-Zeit 4-dimensional oder warum die Superstrings in 10 Dimensionen leben? Bei der letzten Frage könnte man noch geneigt sein zu sagen, daß diese Dimensionen ja reine mathematische Größen sind, also fiktiv in die Physik hineingetragen. Ein solcher Standpunkt ist aber gewiß nicht mehr haltbar, wenn man fragt, warum es gerade drei Generationen von Elementarteilchen gibt. Wir kommen auf dieses Problem im vierten Abschnitt zurück. Am Ende seines Buches betont LANIUS den prinzipiellen Charakter solcher Fragestellungen (S.199):

„Es gibt drei Leptonen, die eine negative Elementarladung tragen, und drei Leptonen, die elektrisch neutral sind. Hinzu kommen je drei Quarks .... Warum ausgerechnet drei Familien?". „Woher kommen die Massenverhältnisse in den drei Familien, und was ist die Ursache des Ladungsverhältnisses von Quarks und Leptonen?"

Und er zitiert den Standpunkt von Hermann WEIL in seinem Buch „Was ist Materie?" aus dem Jahre 1925:

„Diese und andere Fragen lassen sich wohl nur im Rahmen einer umfassenderen Theorie beantworten. ... Wir haben im Erkennen der Natur erstaunliche Fortschritte gemacht. Aber die Frage nach dem Sein im Mikrokosmos stellt uns wie alle Fragen grundsätzlicher Art vor eine unendliche Aufgabe, die auf jeder Stufe des Wissens neu beantwortet werden muß."

Schon in den zwanziger Jahren waren es besonders WEIL und EINSTEIN, die das Problem der theoretischen Begründung auch solcher Zahlenverhältnisse aufwarfen. EINSTEIN konnte sich niemals mit einem Standpunkt abfinden, nachdem solche Zahlen zufällig seien. Er verfolgte ausdrücklich das Ziel einer umfassenden Theorie, die auch solche „zufälligen" Zahlen oder Anfangswerte bestimmt. Sein Biograph Abraham PAIS sagt über ihn: „Einstein ist eine typisch alttestamentarische Gestalt mit der an Jehova gemahnenden Einstellung, daß es ein Gesetz gebe und man es finden müsse" ([WEIN93], S.25).

Besonders waren es auch merkwürdige „großen Zahlen" der Physik, die mit der Quantentheorie entdeckt wurden. Dazu gehören

$$\frac{\textit{Elektronenradius}}{\textit{Gravitationsradius}} \approx 10^{40}$$

$$\frac{\textit{Alter des Universums}}{\textit{Lichtlaufzeit im Atom}} \approx 6 \times 10^{39} \tag{1.10}$$

$$\frac{\textit{Masse des Universums}}{\textit{Masse der Partikel}} \approx 10^{80}$$

WEYL schrieb zu diesen „großen Zahlen" bereits 1919 [WEYL19]: „Es ist eine Tatsache, daß am Elektron reine Zahlen auftreten, deren Größenordnung gänzlich von 1 verschieden ist; so das Verhältnis des Elektronenradius zum Gravitationsradius seiner Masse, welches von der Größenordnung $10^{40}$ ist;... Merkwürdige Konsequenzen für die Organisation des Weltalls scheinen da aufzudämmern und die Möglichkeit einer Erklärung seiner Ruhe im großen und Unruhe im kleinen."

Damit kein falscher Eindruck entsteht, soll sehr direkt gesagt werden: Keines dieser Probleme hat bisher eine Lösung gefunden. Aber es ist Anliegen dieses Vortrages zu verdeutlichen, daß das „Aufdämmern merkwürdiger Konsequenzen" heute bereits einen mathematischen Schimmer bekommen hat. Wir führen das in den letzten beiden Abschnitten näher aus. Zuvor aber gehen wir im nächsten Abschnitt auf die Naturkonstanten der klassischen Physik detaillierter ein.

## 2. Naturkonstanten und Zahlen

Man bezeichnet nicht alle Zahlen, die in physikalischen Gesetzmäßigkeiten auftreten, als Naturkonstanten, sondern nur diejenigen, die man nicht auf andere zurückführen kann. Daß dabei eine bestimmte Willkür herrscht, ist selbstverständlich. Da diese Zahlenfaktoren vielfältig voneinander abhängen, muß man sich darüber einigen, welche als grundlegend und welche als abgeleitet anzusehen sind. Dies hängt natürlich vom historischen Stand der Wissenschaftsentwicklung und der Ansicht darüber ab, welche Gesetzmäßigkeiten man als fundamentaler ansieht und welche als abgeleitet. In der international vereinbarten Liste aus dem Jahre 1973 werden 38 Naturkonstanten aufgeführt. Man findet diese in jedem Lexikon der Physik.

Die älteste Naturkonstante in dieser Liste ist die Gravitationskonstante G (s. (1.1)). Wir wollen sie auf das Erscheinungsjahr 1687 von Newtons 'Principia' datieren. Newtons Mechanik basiert bekanntlich auf zwei wesentlichen Gesetzmäßigkeiten. In heutiger Sprechweise ist erstens Kraft = Masse x Beschleunigung, und zweitens gilt das Gravitationsgesetz (1.1). Mit der ersten Gesetzmäßigkeit wird heute die Einheit der Kraft bestimmt. Da die Einheit der Masse kg und die Einheit der Beschleunigung $m/s^2$ ist, ergibt sich für die Krafteinheit $kg \cdot m/s^2$. Man nennt diese Größe ein Newton N. Damit hat man für das erste Newtonsche Grundgesetz die einfache Formel

$$K = M \cdot b\,, \tag{2.1}$$

wobei K die Kraft ist, gemessen in Newton, M die Masse, gemessen in Kilogramm und b die Beschleunigung, gemessen in $m/s^2$. Dadurch, daß man die Kraft aus dem ersten Newtonschen Gesetz definiert hat, tritt in diesem Gesetz kein Zahlenfaktor auf. Mit der älteren Definition der Kraft als Kilopond kp würde in die Formel der Zahlenfaktor 9,81 (Erdbeschleunigung) hineinkommen. Nachdem man also die Kraft durch das Gesetz (2.1) definiert hat, tritt im Gravitationsgesetz (1.1) natürlich ein Zahlenfaktor auf, der von den Maßeinheiten m, s, kg abhängt, also die Gravitationskonstante.

Wie ging es nun mit den Naturkonstanten weiter? Mehr als 100 Jahre

wurde keine weitere Naturkonstante entdeckt. Die heutige Liste der 38 Naturkonstanten beginnt also mit der Gravitationskonstanten aus dem Jahre 1687, dann folgen sechs Naturkonstanten aus den Jahren 1830–1900, und alle anderen mehr als 30 Naturkonstanten gehören zu physikalischen Gesetzmäßigkeiten des 20. Jahrhunderts.

Liste der Naturkonstanten:

| | |
|---|---|
| **1687** | |
| 1. Gravitationskonstante | $G = 6{,}67\,20 \cdot 10^{-11}$ $N \cdot m^2/kg$ |
| **1800** | |
| 2. Avogadrosche Zahl | $N = 6{,}0220943 \cdot 10^{26}$ $kmol^{-1}$ |
| 3. Gaskonstante | $R_0 = 8{,}31441 \cdot 10^3$ $J/kmol \cdot K$ |
| 4. Molvolumen des idealen Gases | $V_0 = 22{,}41383$ $m^3/kmol$ |
| 5. Boltzmannkonstante | $k = 1{,}380662 \cdot 10^{-23}$ $J/K$ |
| 6. Faradaykonstante | $F = 9{,}648456 \cdot 10^7$ $A \cdot s/kmol$ |
| 7. Stefan-Boltzmann-Konstante | $s = 5{,}67032 \cdot 10\text{-}8$ $J/s\ m^2K^4$ |
| **1900** | |
| 8. Lichtgeschwindigkeit | $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ $m/s$ |
| 9. Plancksches Wirkungsquantum | $h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ $J \cdot s$ |
| 10. Elektronenladung | $e = 1{,}6021892 \cdot 10^{-19}$ $A \cdot s$ |
| 11. Elektronenmasse | $m_e = 9{,}109534 \cdot 10^{-31}$ $kg$ |
| 12. Protonenmasse | $M_p = 1{,}6726485 \cdot 10^{-27}$ $kg$ |
| 13. Neutronenmasse | $M_n = 1{,}6749543 \cdot 10^{-27}$ $kg$ |
| ... (25 weitere Naturkonstanten) | |

Die ersten sieben Naturkonstanten gehören zu den Gesetzen der klassischen Physik. Mit der (Vakuum)-Lichtgeschwindigkeit und dem Planckschen Wirkungsquantum, also den Naturkonstanten der Relativitätstheorie und der Quantentheorie, sind wir bereits hinter der Grenze zwischen klassischer Physik und der Physik des 20. Jahrhunderts. Die Lichtgeschwindigkeit ist natürlich eine ältere Größe. Auch GALILEI hat eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts vermutet und Versuche zu ihrer Messung unternommen. Erstmals wurde die endliche Lichtgeschwindigkeit 1673 von Olaf RÖMER bestimmt. Eine Naturkonstante, d.h. eine universelle Größe des Universums, ist sie aber erst seit der Einsteinschen Relativitätstheorie. Ihr Quadrat ist der Um-

rechnungsfaktor zwischen Masse und Energie gemäß der Einsteinschen Formel

(2.2) $$E = m \cdot c^2 .$$

In dieser Formel tritt also der Zahlenfaktor $c^2$ auf. Gehen wir nochmals zurück zum ersten Newtonschen Gesetz. Es war Anlaß die Kraft so zu definieren, daß in der Formel (2.1) kein Zahlenfaktor vorkommt. Ebenso kann man in (2.2) den Faktor $c^2$ „verschwinden lassen", wenn man z. B. die Längeneinheit so wählt, daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 wird. Die Längeneinheit wäre also dann die Entfernung, die das Licht in einer Sekunde durchläuft, also $7^1/_2$-mal um die Erde. Dies wäre eine sehr unpraktische Längeneinheit. In der Tat hat man seit 1983 den Meterstandard durch die Zeiteinheit Sekunde definiert. Ein Meter ist diejenige Länge, für die die Lichtgeschwindigkeit exakt die „ganze Zahl"

(2.3) $$c = 299792458 \text{ m/s}$$

ist. Die Voraussetzung dafür war ein hoher experimenteller Fortschritt in der Laserspektroskopie, um den Längenstandard mit hinreichender Genauigkeit festlegen zu können. Für diese experimentelle Leistung wurde 1981 der Nobelpreis für Physik an N. BLOEMBERGEN und A.L. SCHAWLOW vergeben. Sie hatten die Rydberg-Konstante R, eine von den oben nicht aufgeführten weiteren Naturkonstanten, bis auf mehr als 10 Stellen bestimmt:

(2.4) $$R = 1{,}0973731476\,(32) \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Die letzte der klassischen Naturkonstanten in obiger Liste ist die Stefan-Boltzmann-Konstante $\sigma$, oder auch kurz Strahlungskonstante genannt. Sie erklärt sich durch die Strahlungsformel (2.6) für schwarze Körper. Schwarz ist dabei eine Oberfläche genau dann, wenn sie alle ankommende elektromagnetische Strahlung absorbiert, also keine Strahlung reflektiert. Daraus folgt, daß alle schwarzen Körper in gleicher Weise abstrahlen, unabhängig von ihrer materiellen Zusammensetzung. Denn würde bei gleicher Temperatur ein schwarzer Körper anders als ein anderer abstrah-

len, so würde im Widerspruch zum zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, Energie von dem einen Körper auf den anderen übergehen, also von einer gleichen Temperatur ausgehend, würde der eine Körper plötzlich wärmer werden und der andere kälter. Diese Gesetzmäßigkeit wurde schon um 1860 von KIRCHHOFF herausgearbeitet: Das Verhältnis der Emission der Temperaturstrahlung zur Absorption der Temperaturstrahlung ist eine für alle Körper gleiche Funktion der Wellenlänge und der absoluten Temperatur, und diese Funktion ist gleich der Emission der Temperaturstrahlung des vollkommen schwarzen Körpers. KIRCHHOFF hat auch klargestellt, daß man sich bei dieser Frage nicht mit dem Problem geeigneter schwarzer Farben herumschlagen muß. Denn am „schwärzesten" ist immer noch ein Loch in einem größeren Hohlkörper, egal aus welchem Material. Man sieht dies unmittelbar, wenn man eine Zigarrenkiste schwarz anstreicht und dann ein kleines Loch hineinbohrt. Schwärzer als der Anstrich ist dann immer noch das Loch. Deshalb spricht man bei der schwarzen Strahlung auch von Hohlraumstrahlung, und mit Hohlkörpern wurden auch in der Folgezeit die Experimente durchgeführt.

Die Entdeckung des Strahlungsgesetzes ist, wie oft in der Physikgeschichte, ziemlich abenteuerlich gewesen (s. [SIMO90], S.426): „STEFAN hat 1879 Messungen von TYNDALL analysiert und dabei festgestellt, daß ein Probekörper bei einer Temperatur von 1473 K eine 11,7-mal größere Energie abstrahlt als bei einer Temperatur von 798 K. STEFAN hat bemerkt, daß

$$11{,}7 \approx \left(\frac{1473}{798}\right)^4 \tag{2.5}$$

ist und daraus den Schluß gezogen, daß die von einem schwarzen Körper abgestrahlte Gesamtenergie pro Zeit- und Flächeneinheit zur vierten Potenz der Temperatur proportional ist, d. h.

$$E = \sigma T^4. \tag{2.6}$$

$\sigma$ wird als Stefan-Boltzmann-Konstante bezeichnet. Bemerkenswert ist, daß die von TYNDALL bei seinen Messungen verwendeten Körper nicht einmal annähernd als schwarze Körper angesehen werden können und daß sich der Quotient 11,7 bei späteren Messungen als völlig unzutreffend her-

ausgestellt hat. Der wahre Meßwert liegt bei 18,6. Die fehlerhafte Messung hat aber zu ihrer Zeit gute Dienste geleistet und STEFAN zur Erkenntnis des richtigen Gesetzes verholfen."

Man muß sich vergegenwärtigen, welch ein kühner Schluß dies von STEFAN war, denn aus der ganzen klassischen Physik war kein Beispiel einer Abhängigkeit zur 4-ten Potenz bekannt. Die theoretische Ableitung dieses Gesetzes hat 1884 BOLTZMANN geleistet. Beide Gelehrte waren Professoren an der Wiener Universität. Obwohl die Physiker die außerordentliche Bedeutung dieser Gesetzmäßigkeit klar sahen, dauerte es noch bis Ende des 19. Jahrhunderts, ehe besonders durch die Messungen von LUMMER, PRINGSHEIM (1897) u.a. genaue Meßergebnisse vorlagen, denn die experimentelle Technik für Strahlungsmessungen mußte erst qualifiziert werden.

Bevor wir mehr zur Strahlungskonstante sagen, wollen wir fragen, ob es denn vor der Gravitationskonstante keine Naturkonstante gab? In der Tat hatte die Zahl $\pi$ den Charakter einer Naturkonstanten. Zum einen war sie im Altertum als Verhältnis zwischen Kreisumfang und Durchmesser eine Naturkonstante, und ihre Herausbildung als Zahl der Mathematik war ein äußerst komplizierter Prozeß. Zum anderen trat sie an der Quelle der modernen Physik nochmals als Naturkonstante in der Formel für die Schwingungsdauer des Pendels auf (s.(2.10)), wurde dann aber schon bald von HUYGHENS als die Zahl $\pi$ erkannt. Wir wollen als nächstes an der Formel für die Schwingungsdauer des Pendels verdeutlichen, wie reine Zahlen in die Physik hineinkommen.

Um das Wesen der Problematik zu verdeutlichen, folgen wir nicht der historischen Entwicklung, sondern wählen eine künstliche Situation. Nehmen wir an, uns wäre (ohne NEWTON und die Infinitesimalrechnung) bereits voll bewußt, daß die Körper auf der Erde eine Fallbeschleunigung von der Größe

$$g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \tag{2.7}$$

erfahren. Entscheidend wird dabei sein, daß wir in einem Maßsystem denken (was in der „vornewtonschen" Zeit noch keineswegs gegeben war), daß die Geschwindigkeit die Dimension m/s hat und demgemäß die Beschleunigung, als Änderung der Geschwindigkeit pro Zeit, die Dimen-

sion $m/s^2$. Nun gehen wir an unser Schwingungsexperiment. Wir hängen an einen Faden eine Masse und beobachten die Schwingungsdauer. Die Grundbeoachtung Galileis war, daß die Schwingungsdauer nicht von dem Pendelausschlag abhängt. Erzählt wird der Hergang der Galileischen Entdeckung so: Ihm ist diese Tatsache der Unabhängigkeit der Schwingungsdauer vom Ausschlag bei der Beobachtung der Schwingungen seiner an der Decke hängenden Öllampe vom Bett aus aufgegangen. Eine „richtige" Uhr stand natürlich nicht zur Verfügung (es ist ja gerade diese Gesetzmäßigkeit, die zur Pendeluhr geführt hat), so hat GALILEI die Schwingungsdauer der Öllampe mit seinem Puls verglichen. Er hat sich auch gleich die Frage gestellt, ob er nicht getäuscht wird, weil sich vor lauter Aufregung über diese Entdeckung die Pulsfrequenz verändern könnte. Diese Bedenken hat er dann natürlich experimentell schnell ausgeräumt. Jedenfalls war die Entdeckung dieses experimentellen Faktes aufregend und plötzlich.

Weitere einfache Experimente zeigten dann, daß die Schwingungsdauer auch nicht von der Masse des angehängten Gewichtes abhängt, sondern nur von der Pendellänge. Für diesen Vortrag wurde das Experiment mit den einfachsten Mitteln nochmals durchgeführt, um reale Werte einzusetzen. Bei den folgenden Pendellängen L ergaben sich die in der Tabelle angegebenen Schwingungsdauern T. Die Pendellänge ist nun nicht proportional zur Schwingungsdauer, sondern proportional zum Quadrat der Schwingungsdauer. Diesen Blick hat heute jeder Experimentator und den hatte auch schon GALILEI. Wir tragen das Verhältnis gleich mit in die Liste ein:

| | Pendellänge L in Metern m | Schwingungsdauer T in Sekunden s | $T^2/L$ in $s^2/m$ |
|---|---|---|---|
| | 0,5 | 1,43 | 4,08 |
| (2.8) | 0,8 | 1,77 | 3,91 |
| | 1,0 | 2,00 | 4,00 |
| | 1,1 | 2,11 | 4,04 |

Damit haben wir eine physikalische Gesetzmäßigkeit gefunden:

(2.9) $$T^2/L = A = \text{const.}$$

Es sieht auf den ersten Blick so aus, als ob die Konstante A = 4 wäre. Man muß schon viel genauer messen um festzustellen, daß A = 4,025... gilt. Wo kommt diese Zahl her? Man kann sich jetzt weiter überlegen, daß A die Dimension $s^2/m$ hat und g die Dimension $m/s^2$. Bildet man das Produkt aus breiten Zahlen, so erhält man $A \cdot g = 39{,}49$ , d. h. es würde $T^2 = 39{,}49\ L/g$ gelten. Auch in dieser Form erscheint der Wert der reinen Zahl 39,49 noch äußerst merkwürdig. Anders sieht die Sache allerdings aus, wenn man die Quadratwurzel zieht und das gefundene Gesetz in der Form

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \tag{2.10}$$

schreibt. Jetzt wird man zweifellos 6,28 als $2\pi$ erraten. Den Beweis dafür, daß dieser Faktor „wirklich" $2\pi$ ist, hat, wie schon gesagt, HUYGHENS erbracht, aber erst 1673, Jahrzehnte nach dem Tode (1642) Galileis.

Die eben für das Pendel durchgeführte Betrachtung hat exemplarische Bedeutung. Analog wollen wir jetzt bei der Bestimmung der Strahlungskonstanten $\sigma$ vorgehen. Aus der Strahlungsformel (2.6) sieht man unmittelbar, daß $\sigma$ die Dimension Energie pro Fläche, Zeit und der vierten Potenz der Temperatur hat. Sie ist die siebente Naturkonstante in obiger Liste. Nun läßt sich aus der Boltzmannkonstanten k, der Lichtgeschwindigkeit c und dem Planckschen Wirkungsquantum h ebenfalls eine Größe bilden, die die gleiche Dimension wie die Strahlungskonstante hat, nämlich

$$\frac{k^4}{c^2h^3} = 1{,}38969 \cdot 10^{-9} \frac{J}{s\ m^2\ K^4} \cdot \tag{2.11}$$

Wir erhalten somit für die Strahlungskonstante

$$\sigma = 40{,}8027\ \frac{k^4}{c^2h^3}, \tag{2.12}$$

(56,7032 /1,38969 = 40,802768963). Der Faktor 40,8 ist ein reiner Zahlenfaktor. Seinen exakten (mathematischen) Wert wird man schwerlich erraten. In ihn geht nämlich sogar die 5-te Potenz von $\pi$ ein. Genau gilt

$$\sigma = \frac{2}{15}\pi^5 \frac{k^4}{c^2h^3}. \tag{2.13}$$

Dies ist somit eine weitere Zahl der Physik, die sich aus einer höheren Potenz von $\pi$ errechnet. Mit den Formeln (1.4) für die spezifische Wärme der Festkörper hatten wir bereits eine Zahl kennengelernt, in die die 4-te Potenz von $\pi$ eingeht. Wie diese höheren Potenzen von $\pi$ in die Zahlen der Physik hineinkommen und den Zusammenhang mit der Zahlentheorie werden wir im nächsten Abschnitt diskutieren.

Schon 1899, also ein Jahr vor der Entdeckung der Quantentheorie, hat PLANCK bemerkt, daß es ein absolutes Maßsystem der Physik gibt. Um die Überlegung dazu zu erläutern, gehen wir nochmals zu den Betrachtungen über die Lichtgeschwindigkeit zurück, die wir im Anschluß an die Formel (2.2) angestellt hatten. Man könnte die Längeneinheit so festlegen, daß für die Lichtgeschwindigkeit c = 1 gilt. Höchst bemerkenswert ist nun aber die Tatsache, daß alle Basiseinheiten der Physik vollkommen festgelegt sind, wenn man weiterhin fordert, daß auch die Gravitationskonstante G, die Boltzmannkonstante k und das Plancksche Wirkungsquantum h gleich 1 werden, also

$$G = c = k = h = 1. \tag{2.14}$$

Wie gesagt, sind dann alle Einheiten festgelegt. Es zeigt sich, daß die Einheiten für die Zeit, die Länge und die Masse sehr klein werden.

Plancksche Einheiten:

$$\begin{aligned} t_{pl} &= \left(\frac{h \cdot G}{c^5}\right)^{\frac{1}{2}} &&= 1{,}35 \cdot 10^{-43}\ s \\ l_{pl} &= c \cdot t_{pl} &&= 4{,}05 \cdot 10^{-35}\ m \\ M_{pl} &= \left(\frac{h \cdot c}{G}\right)^{\frac{1}{2}} &&= 5{,}45 \cdot 10^{-8}\ kg \\ T_{pl} &= \frac{1}{k}\left(\frac{h \cdot c^5}{G}\right)^{\frac{1}{2}} &&= 3{,}55 \cdot 10^{-32}\ K \end{aligned} \tag{2.15}$$

Im Gegensatz zu den anderen Planckschen Einheiten, ist die Plancksche Temperatur eine sehr große Einheit. An der Definition der Planckschen Länge $l_{Pl}$ sieht man besonders deutlich, wie diese Einheiten durch Naturgesetze definiert werden. Wenn die Plancksche Zeit $t_{Pl}$ schon defi-

niert ist und die Lichtgeschwindigkeit im Planckschen Einheitensystem gleich 1 sein soll, muß die Längeneinheit also genau die Strecke sein, die das Licht in der Planckschen Zeiteinheit durchläuft.

Mit dieser Wahl der Einheiten schreiben sich die Naturgesetze sehr einfach, z. B. liest sich dann die Einsteinsche Beziehung (2.2) einfach als Gleichheit von Masse und Energie, $E = m$, da $c = 1$ ist. Im Ausdruck (2.13) für die Strahlungskonstante bleibt nur der Zahlenwert $\sigma = 2/15\ \pi^5$ übrig. Analoges gilt für die anderen physikalischen Gesetzmäßigkeiten. PLANCK hat die erkenntnistheoretische Bedeutung seiner „natürlichen Einheiten", die unabhängig von speziellen Körpern oder Substanzen sind, und ihre Bedeutung für alle Zeiten und jedes Milieu behalten, sei es irdisch, terrestrisch oder menschlich, äußerst hoch eingeschätzt. „Diese Größen behalten ihre natürliche Bedeutung so lange bei, als die Gesetze der Gravitation, der Lichtfortpflanzung im Vakuum und die beiden Hauptsätze der Wärmetheorie in Gültigkeit bleiben, sie müssen also, von den verschiedensten Intelligenzen nach den verschiedensten Methoden gemessen, sich immer wieder als die nämlichen ergeben" ([PLAN99], S. 599). Er hat bei Gelegenheit die Einführung dieser absoluten Maßeinheiten als seine größte Entdeckung bezeichnet.

Man muß noch ein Wort dazu sagen, wieso PLANCK diese Entdeckung bereits 1899 machen konnte, obwohl er seine Quantentheorie erst 1900 entwickelt hat, geht doch in die obigen Einheiten sein Wirkungsquantum h wesentlich ein. Die Ursache liegt in dem 1899 schon sehr vertrauten Planck-Wienschen Strahlungsgesetz, das eine Approximation der dann von PLANCK aufgestellten endgültigen Strahlungsformel für den Bereich des sichtbaren Lichtes und normale Temperaturen ist. In ihm tritt die Konstante h bereits auf. Sie war damals mit dem Buchstaben b bezeichnet (und hieß natürlich auch noch nicht Wirkungsquantum).

Man muß noch erwähnen, daß ein natürliches Maßsystem wahrscheinlich erstmals bereits 1874 von G. J. STONEY diskutiert wurde ([BARR88], S.291). Er bezog sich neben der Gravitationskonstanten und der Lichtgeschwindigkeit auf die Elektronenladung e. PLANCK war dieser Ansatz von STONEY offensichtlich unbekannt.

Aus den Naturkonstanten läßt sich durch reine Dimensionsbetrachtungen jede beliebige physikalische Größe zusammensetzen. Eine der wichtigsten ist das Bohrsche Magneton,

(2.16) $$\mu_B = \frac{e \cdot h}{4\pi\, m_e} = 9{,}27408 \cdot 10^{-24}\ A \cdot m^2$$

Es hat die Dimension eines magnetischen Momentes und stimmt schon bis auf ein Promille mit dem magnetischen Moment des Elektrons überein. Ohne daß man sich in die Einzelheiten hineindenken muß (z.B. was ein magnetisches Moment ist), kann man an einer solchen Betrachtung eine bemerkenswerte Tatsache verdeutlichen. Wenn eine Kombination aus den Naturkonstanten dimensionsmäßig eine physikalische Größe liefert, so ist sie auch mit hoher Erwartung eine direkt meßbare Einheit (s.a. [ROMP88]). Das überraschendste jüngste Ereignis dieser Art war die Entdeckung des Quanten-Hall-Effektes durch v. KLITZING im Jahre 1980 (Nobelpreis 1985). Kein Mensch hatte vorher die Behauptung gewagt, daß die Größe $h/e^2 = 25812.8$ Ohm eine „wirkliche" Widerstandseinheit sein könnte. Die Entdeckung v. Klitzings bestand aber gerade darin, daß bei Widerstandsmessungen an geeigneten Proben Sprünge in den Widerständen auftreten, die ganzzahlige Teile dieses „elementaren Widerstandes" sind.

Wir können den Abschnitt nicht beenden, ohne die „wichtigste Zahl" der Physik, die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante

(2.17) $$\alpha = \frac{e^2}{2\varepsilon_0\, hc} = 0{,}00729735\,,\ \frac{1}{\alpha} = 137{,}03604\,,$$

zu nennen. $\varepsilon_0 = 10^7/4\pi\ c^2 = 8{,}85419$ As/Vm ist die Dielektrizitätskonstante. Ihr Zahlenwert ist durch die Lichtgeschwindigkeit bestimmt. Die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante bestimmt die Feinaufspaltung von Spektrallinien der Atome. Sie ist eine dimensionslose Größe, also eine reine Zahl. Im Planckschen Maßsystem ist, wegen $c = h = 1$, die Zahl $\alpha$ bis auf den Zahlenfaktor $10^7/2\pi$ das Quadrat der Elementarladung. Schon unmittelbar nach ihrer Einführung durch SOMMERFELD (1927) wird die außerordentliche Bedeutung dieser Zahl immer wieder betont (s. [ROMP88]). PAULI nannte bei Gelegenheit die Deutung dieser Zahl eines der wichtigsten Probleme der Atomphysik. In den 30-er Jahren war es vor allem EDDINGTON, der viele Ideen über die Deutung der Zahlen in der Physik entwickelte und auch recht „abenteuerliche" Vorstellungen äußerte (s. Schluß des Vortrages). Insgesamt bietet der Vortrag keinen Raum, auf die Eddingtonschen Ideen näher einzugehen, zu denen eine umfangreiche

Literatur existiert. Eine recht ausführliche Übersicht über diese Ideen und ihre Beziehungen zum anthropischen Prinzip finden man in [BARR88].

Einen Versuch zur Deutung des Zahlenwertes der Feinstrukturkonstanten wollen wir aber noch erwähnen, weil er zu den Potenzen von $\pi$ paßt. In [SCHÖ86] wurde eine bemerkenswert gute Näherung auf Grund eines geeigneten Teilchenmodells abgeleitet:

$$\frac{1}{\alpha} = \pi^4 \sqrt{2} \cdot 1{,}0052635 = 137{,}035967 \,. \tag{2.18}$$

Der „Korrekturfaktor" 1,0052635 in der Mitte der Formel wird aus der Diskussion der Energieverhältnisse bei der Bewegung des Elektrons im Magnetfeld gewonnen.

## 3. Plancksche Funktion und Primzahlen

Die Physik des 20. Jahrhunderts begann mit der Entdeckung der korrekten Strahlungsformel durch Max PLANCK. Er gilt auch als der erste theoretische Physiker im modernen Verständnis. Besonders das Konzept der Entropie hatte er theoretisch vertieft, und so war es ganz natürlich, daß er die Situation um die schwarze Strahlung aus der Sicht der Entropie beleuchtete und fragte, wie sich die Entropie S der Strahlung mit der Energie U ändert. Für hohe Frequenzen hatte man die Wien-Plancksche Strahlungsformel und für niedere Frequenzen die Rayleigh-Jeanssche Strahlungsformel. PLANCK schaute sich für beide Bereiche die zweite Ableitung der Entropie nach der Energie an, in heutiger Darstellungsweise der Thermodynamik ein ungewöhnlicher Ausdruck, denn die Energie und die Entropie, die wichtigsten thermodynamischen Zustandsfunktionen, werden in Abhängigkeit von den anderen thermodynamischen Veränderlichen wie Temperatur, Druck usw. betrachtet und kaum gegeneinander differenziert. PLANCK hat dann zwischen diesen beiden Formeln interpoliert. Für ihn ergab sich also folgendes Schema ([SIMO90], S.430):

$$\begin{array}{lll} & \textit{Wien–Planck} & \textit{Rayleigh–Jeans} \\ & U = av^3 e^{-\frac{\beta v}{T}} & U = \frac{8\pi}{c^3} v^2 kT \\ (3.1) & \underbrace{\frac{\delta^2 S}{\delta U^2} = \frac{konst.}{U} \qquad \frac{\delta^2 S}{\delta U^2} = \frac{konst.}{U^2}}_{\frac{\delta^2 S}{\delta U^2} = \frac{a}{U(U+b)}} & \end{array}$$

Die Formel unter der geschweiften Klammer ist eine geeignete Zusammenfassung der beiden Formeln darüber. Diese Zusammenfassung ist, wie man sieht, ziemlich zwangsläufig, wenn man die beiden Ausdrücke über der Klammer hat. Von diesen Ausdrücken auszugehen, also die zweiten Ableitungen der Entropie nach der Energie zu interpolieren, war die entscheidende Idee Plancks. Die Integration dieser Differentialgleichung führt dann zur berühmten Planckschen Strahlungsformel. Im Planckschen absoluten Maßsystem (c=h=k=1) hat sie folgende Form, wenn wir noch das Verhältnis von Frequenz n zur absoluten Temperatur gleich x = n/T setzen:

$$(3.2) \qquad U = 2\pi\, T^3 \frac{x^3}{e^x - 1} \qquad \textit{Plancksches Strahlungsgesetz}$$

Heute kann jeder Physikstudent diese Funktion aus der Quantenhypothese „ableiten". Historisch war es aber umgekehrt. PLANCK hat zuerst diese Funktion gefunden und ist dann zur Quantenhypothese gekommen, als er eine statistische Herleitung dieser Strahlungsformel versuchte. In den verschiedensten Anwendungen der Quantentheorie tauchen Varianten dieser Funktion auf, wobei die x-Potenz über dem Bruchstrich eine andere sein kann. Sie gehen also aus der sogenannten Planckschen Funktion

$$(3.3) \qquad P(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \qquad \textit{Plancksche Funktion,}$$

hervor. In der Mathematik war diese Funktion und ihre „merkwürdigen" Beziehungen zur Zahlentheorie schon gut bekannt, die Anfänge gehen auf BERNOULLI und EULER zurück. Die Funktion selber hat dabei nur eine Hilfsrolle gespielt und hatte deshalb vor ihrem Auftauchen in der Physik

auch keinen besonderen Namen. Sie ist die erzeugende Funktion für die bedeutungsvollen Bernoullischen Zahlen $B_n$:

$$(3.4) \qquad \frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

Das Ausrufezeichen bezeichnet die Fakultät, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Ihre Fortsetzung für nicht ganzzahlige n ist die Gammafunktion (3.15). Die Bernoullischen Zahlen $B_n$ sind rationale Zahlen mit folgenden Werten:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *n:* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... |
| (3.5) | $B_n$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{42}$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{5}{66}$ | $\frac{691}{2730}$ | $\frac{7}{6}$ | $\frac{3617}{510}$ | $\frac{43867}{798}$ | ... |

Es ist kaum vorstellbar, von welch großer Bedeutung und welch großem Geheimnis die unendliche Folge der Bernoullischen Zahlen ist. Es ist die einzige Serie rationaler Zahlen, der ganze Kapitel in den Büchern über Zahlentheorie gewidmet sind. Eine Merkwürdigkeit hängt mit der Fermatschen Vermutung zusammen und wir beschreiben sie im nächsten Abschnitt. Für unseren Zusammenhang ist wichtig, daß sie die merkwürdigen rationalen Zahlen in den physikalischen Konstanten bestimmen. So rührt z. B. die 90 in der Formel (1.5) von der 30 in der vierten Bernoullischen Zahl her. Bevor wir aber dazu kommen, wenden wir uns der $\zeta$-Funktion zu, die von EULER zur Untersuchung der Primzahlen eingeführt wurde.

Es wird wohl keiner bestreiten, daß sich in den Primzahlen elementarste Eigenschaften der Materie ausdrücken, mit denen man sofort konfrontiert ist, wenn überhaupt verschiedene Dinge existieren. Wenn man 15 Körner auf der Tischplatte hat, so kann man sie zu drei kleinen Haufen von je 5 Körnern zusammenschieben. Hat man dagegen 17 Körner, so kann man schieben wie man will, es entstehen nie gleich große Haufen. Das ist zweifellos eines der einfachsten Experimente. Daß es unendlich viele Primzahlen gibt, hat schon EUKLID bewiesen. Seine Überlegung lag auf folgender Linie: Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1$, $p_2, \ldots, p_N$, so bilden wir die Zahl $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_N + 1$. Diese Zahl ist durch keine der Primzahlen $p_i$ teilbar. Entweder ist sie selbst eine Primzahl, wie bei $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$ und $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$, oder es muß eine Primzahl größer als $p_N$ geben. Beim nächsten Schritt kommt man nochmals zu einer

Primzahl $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 + 1 = 2311$, aber dann ist $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13 + 1 = 30031 = 59\cdot509$. Es gibt keine Regel, wie das weitergeht. Dies ist typisch für Primzahlprobleme. Eines der berühmtesten ungelösten Probleme ist die Goldbachsche Vermutung: Jede gerade Zahl $n > 4$ ist die Summe zweier Primzahlen, so wie $8 = 3+5$, $10 = 5+5$, $12 = 7+5$, ... ,$30 = 7+23 = 11+19$. Dieses Problem hat GOLDBACH im Jahre 1742 EULER vorgelegt. Man vergegenwärtige sich am Beispiel der Zerlegung eines Haufens Körner auf dem Tisch, welch einfache „physikalische" Fragestellung das bis heute ungelöste Goldbachsche Problem ist.

Mit EULER, den man als den Begründer der mathematischen Physik ansieht, beginnt auch die Zahlentheorie als Wissenschaft. Erstmals seit EUKLID hat er einen neuen Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen erbracht und dabei auch die analytischen Methoden in die Zahlentheorie eingeführt. Ausgangspunkt war für ihn die Beziehung

$$(3.6) \qquad \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

wobei links das Produkt über alle Primzahlen p genommen ist. Wie sieht man diese Beziehung ein? Wenn man für jede Primzahl $p_i$ links den Bruch als geometrische Reihe berechnet, erhält man

$$(3.7) \qquad \frac{1}{1-\frac{1}{P_i^s}} = 1 + \frac{1}{P_i^s} + \frac{1}{P_i^{2s}} + \frac{1}{P_i^{3s}} + \dots .$$

Multipliziert man jetzt diese Ausdrücke für alle Primzahlen, so erhält man die Summe aller möglichen Brüche

$$(3.8) \qquad \frac{1}{(P_i^{ni} \dots P_k^{nj})^s}$$

Da die Menge aller möglichen Primzahlprodukte $p_i\, p_j \dots p_k$ aber genau die Menge aller natürlichen Zahlen ist (denn jede natürliche Zahl hat eine eindeutige Primzahlzerlegung), hat man sich von der Richtigkeit der Formel (3.6) überzeugt.

Wie sieht man nun aus dieser Formel, daß es unendlich viele Primzahlen gibt?

Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen, dann wäre das Produkt auf der linken Seite immer endlich, auch wenn wir s=1 setzen. Auf der rechten Seite erhalten wir aber im Widerspruch dazu

$$(3.9) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \infty ,$$

denn dies ist die harmonische Reihe, die unendlich groß wird, wenn man mehr und mehr Glieder addiert. Sie geht zwar langsam nach unendlich, so wie log n, aber sie wird unendlich!

EULER wäre nicht der außerordentliche Gelehrte gewesen, der er war, hätte er nicht eine große Anzahl Eigenschaften der $\zeta$-Funktion hergeleitet. Es ist müßig und sinnlos entscheiden zu wollen, wer in der Folge von EUKLID, ARCHIMEDES über GAUß, RIEMANN bis zu GROTHENDICK der größere Mathematiker ist. Eines kann man aber sagen: EULER war der produktivste unter allen Mathematikern, wenn nicht sogar unter allen Gelehrten aller Zeiten. Von seinen schier zahllosen Schriften ist bisher nur ein Bruchteil herausgegeben. In welches Gebiet er sich auch begab, immer war eine Vielzahl wunderbarer Resultate das Ergebnis, so auch zur $\zeta$-Funktion. Unter vielem anderen bestimmte er die Werte der $\zeta$-Funktion an den geraden Zahlen:

$$(3.10) \qquad \zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \; B_n$$

Schon die erste Relation für n=1 in (3.10) war eine sensationelle Entdeckung. Es ist nämlich das Ergebnis

$$(3.11) \qquad \zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} .$$

LEIBNIZ und BERNOULLI hatten sich vergeblich bemüht, diese Reihe der inversen Quadrate aus den natürlichen Zahlen zu berechnen.

Die Werte der $\zeta$-Funktion an den geraden natürlichen Zahlen sind also transzendente Zahlen, die rationale Vielfache von Potenzen von $\pi$ sind. Die Werte $\zeta(2n+1)$ der $\zeta$-Funktion an den ungeraden natürlichen Zahlen $2n + 1$ geben der Mathematik noch ein vollkommenes Rätsel auf. Man

weiß noch nicht einmal, ob diese Zahlen alle irrational sind. Für $\zeta(3)$ ist die Irrationalität erst vor wenigen Jahren bewiesen worden.

Setzt man in der Reihe $\zeta(s)= \sum 1/n^s$ den Exponenten $s = -1$, so erhält man zuerst einmal formal
$\zeta(-1) = 1+2+3+4+5+\ldots$ . Es stellt sich die Frage: Hat die Summe aller natürlichen Zahlen sinnvollerweise einen Wert und welchen? Die Antwort ist ja, und es gilt

$$(3.12) \qquad 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots = -\frac{1}{12} .$$

Dieses Resultat kommt dadurch zustande, daß die $\zeta$-Funktion, die zuerst nur für reelle Zahlen $s > 1$ definiert war, eine eindeutige Fortsetzung für alle komplexen Zahlen hat, die von 1 verschieden sind. Ihr Wert an -1 ist dann wohldefiniert und gleich -1/12. Was zuerst wie mathematischer Hokuspokus aussieht, hat eine tiefe Beziehung zur Realität. In der Quantenfeldtheorie treten bekanntlich auf Schritt und Tritt in den Formeln Unendlichkeiten auf, die aber letztlich zu endlichen Meßwerten führen müssen. Es erweist sich nun, daß man gerade mit Hilfe der $\zeta$-Funktion nach dem vorangegangenen Muster unendliche Ausdrücke in endliche Werte überführen kann. Diese Methode trägt deshalb auch den Namen $\zeta$-Renormierung.

Wir fügen noch die Bemerkung an, daß die merkwürdige Raumdimension $d = 26$ in der Stringtheorie erstmalig auf Grund der Beziehung (3.12) auftauchte. In den ersten Berechnungen zur Stringquantisierung traten ganz profan „schreckliche Ausdrücke" auf, die unbedingt verschwinden mußten, was in Folge dieser 12 in obiger Formel nur dann möglich war, wenn $d - 2 = 2 \cdot 12$ galt. Wir können in diesem Vortrag darauf nicht weiter eingehen. Vielmehr werden wir im letzten Abschnitt die Besonderheiten der Dimensionen 24 und 26 an ganz anderen, nämlich geometrischen Zusammenhängen erkennen.

Die Bedeutung der numerischen Eigenschaften der $\zeta$-Funktion für wichtige physikalische Konstanten liegt darin, daß folgende Integrale mit der Planckschen Funktion auf Werte der $\zeta$-Funktion führen:

$$(3.13) \qquad \int_0^\infty \frac{x^k}{e^x-1}\, dx = k!\ \zeta(k+1) .$$

Wenn k ungeradzahlig ist, ist der Wert der $\zeta$-Funktion durch die Formel (3.12) bestimmt. So kommt z. B. auch der Wert der Strahlungskonstanten (2.13) im Planckschen absoluten Maßsystem (c = h = k = 1) zustande,

$$(3.14) \qquad \sigma = 2\pi \; 3! \; \zeta(4) = \frac{2}{15}\pi^5 ,$$

wenn man für $\zeta(4)$ die entsprechenden Werte aus Formel (3.10) einsetzt. Die Quintessenz aus der Betrachtung dieses Beispiels ist das Resultat, daß die höheren $\pi$-Potenzen und die merkwürdigen rationalen Zahlen in den Naturkonstanten auf Grund der $\zeta$-Funktionen hineinkommen. Auch in diesem Fall entsteht die 15 aus der 30 in der 4-ten Benoullischen Zahl.

Die $\zeta$-Funktion ist eine der wichtigsten Funktionen der Zahlentheorie. Um zu sehen, daß mit diesen Funktionen die Zahlentheorie nicht nur auf Grund der genannten numerischen Zusammenhänge in den Naturkonstanten in die Physik hineinkommt, sondern direkt in die Dynamik, müssen wir noch einen Schritt weitergehen und noch zwei weitere Funktionen erwähnen.

Die erste ist die Gammafunktion $\Gamma(x)$. Eulers Phantasie war oft durch Aufgaben angeregt, die zu Interpolationsproblemen gehörten. Er stellte sich das schwierige Problem, stetige Funktionen zu finden, welche an ganzzahligen Stellen vorgegebene Werte annehmen. Seine schönsten Resultate betreffen die Folge der Fakultäten $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n = \Gamma(n+1)$. Er fand zahlreiche Darstellungen für die gesuchte Funktion, u.a. folgende Integraldarstellung ([DIEU85], S.36):

$$(3.15) \qquad \Gamma(x+1) = \int_0^1 (\log \frac{1}{t})^x \, dt \; .$$

Die zweite Funktion ist die Jacobische $\theta$-Funktion. Sie hat äußerst praktische Ursprünge. Will man nämlich die Schwingungen eines realen Pendels mit größeren Ausschlägen beschreiben, so wird man auf die elliptischen Funktionen geführt. Ihr Name stammt daher, daß sie auch bei der Berechnung des Umfangs der Ellipse auftreten. Für die Fläche der Ellipse hat man noch eine zur Kreisberechnung analoge Formel, die Umfangsberechnung führt aber schon auf diese neuen Funktionen. Es war JACOBI, der alle Varianten der elliptischen Funktionen aus einer einzigen Funktion ableitete, der $\theta$-Funktion,

$$(3.16) \qquad \Theta(x,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x} + \pi^{i n^2 \tau} .$$

Heute sind mathematische Ausdrücke dieser Art in Naturwissenschaft und Technik unter den Begriff der Fourier-Transformationen gut bekannt. Die θ-Funktion ist übrigens auch eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung, ein weiterer physikalischer Bezug.

Die θ- Funktion ist also eine höchst praktische Funktion. Um so mehr mußte es überraschen, als JACOBI mit Hilfe verschiedenster Relationen, die die θ-Funktion befriedigt, einen Beweis für den Vierquadratesatz (0.4) angeben konnte. Alles hatte seinen Ausgangspunkt mit der Betrachtung „seltsamer Formeln" genommen, die schon EULER (1750) bemerkt hatte und JACOBI (1826) anders interpretierte (s. [DIEU85], S.64). Es sind die Formeln, mit denen sich in unseren Tagen DYSON „in den Ferien" beschäftigte (s. Einleitung). Wie bei vielen Dingen, die später mit den Namen berühmter Leute verbunden sind, hatte auch GAUß die wunderbaren Beziehungen in diesem Bereich schon gesehen und teilweise auch schon gefunden. In einem Brief aus dem Jahre 1808 schrieb er: „Mit Kreisfunctionen und dem Logarithmischen wissen wir jetzt umzugehen, wie mit dem 1 mal 1, aber die herrliche Goldgrube, die das Innere der höheren Functionen enthält, ist fast noch Terra Incognita. Ich habe darüber ehemals sehr viel gearbeitet und werde dereinst ein großes Werk darüber geben.... Man geräth in Erstaunen über den überschwenglichen Reichtum an neuen höchst interessanten Wahrheiten und Relationen, die dergleichen Functionen darbieten (wohin auch diejenigen gehören, mit denen die Rectification der Ellipse und Hyperbel zusammen hängt)." GAUß hat das „große Werk", von dem er hier spricht, leider nicht mehr geschrieben.

Um zu zeigen, wie die genannten Grundfunktionen der analytischen Zahlentheorie zusammenhängen, wollen wir noch die „fundamentale Formel" niederschreiben:

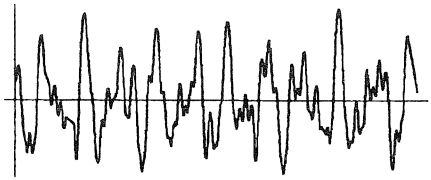
$$(3.17) \qquad 2\pi^{-s/2}\, \zeta(s)\, \Gamma(s/2) = \int_0^{\infty} (\Theta(0,i\tau) - 1)\, \tau^{s/2} \frac{d\tau}{\tau} .$$

Es ist übrigens von großer didaktischer Bedeutung, daß sich der Reichtum der höheren transzendenten Funktionen um eine einzige Funktion, die θ-Funktion, gruppiert. Diese Einzigartigkeit wird auch aus einer Bemerkung WEIERSTRAß' deutlich, die HILBERT in der Gedächtnisrede auf ihn zitiert:

„Auf die Frage, ob es denn wirklich möglich sei, aus den abstrakten Theorien, welchen sich die heutige Mathematik mit Vorliebe zuzuwenden scheine, auch etwas unmittelbar Brauchbares zu gewinnen, möchte ich entgegnen, daß doch auch auf rein spekulativem Wege griechische Mathematiker die Eigenschaften der Kegelschnitte ergründet hatten, lange bevor irgendwer ahnte, daß sie die Bahnen seien, in welchen die Planeten wandeln, und ich lebe allerdings der Hoffnung, es werde noch mehr Funktionen geben mit Eigenschaften, wie sie JACOBI an seiner Thetafunktion rühmt, welche lehrt, in wie viele Quadrate sich jede Zahl zerlegen läßt wie an den Bogen der Ellipse rektifiziert und dennoch imstande ist, und zwar sie allein, das wahre Gesetz darzustellen, nach welchem das Pendel schwingt."

Ich kann mich nicht enthalten, den Abschnitt mit folgender Bemerkung abzuschließen: Es gibt durchaus namhafte Gelehrte, die solche Brückenschläge zwischen physikalischen und mathematischen Wahrheiten als „unnötigen Firlefanz" abtun und der Meinung sind, was zählt sind allein die experimentell gefundenen funktionalen Abhängigkeiten, die immer nur Näherungscharakter tragen. Auch solche Auffassungen werden von der $\zeta$-Funktion „eingeholt". Sie ist nämlich in folgendem Sinne eine universelle Funktion: Welche (stetige) approximative funktionale Abhängigkeit in einem endlichen Meßintervall man auch hat, und sei sie noch so „wild", z.B.

(3.18)



immer findet man einen Abschnitt des Logarithmus der $\zeta$-Funktion $\zeta(x)$ (im Bereich der komplexen Zahlen), der die Meßwerte beliebig genau approximiert (bis auf Ähnlichkeit) ([KARA92], S.241).

## 4. Stringtheorie und Zahlen

Der Zusammenhang physikalisch wichtiger Größen mit der Zahlentheorie, wie er durch die zahlentheoretische Bedeutung der Theta- und Zetafunktion umrissen wird, mag auf der Ebene der vorangegangenen Betrachtungen über die Zahlen der klassischen Physik noch als interessanter und schöner „mathematischer Zufall" erscheinen. Er erscheint allerdings in einem ganz anderen Licht, wenn man ihn auf dem Hintergrund der jüngsten Ideen in der Theorie der Elementarteilchen, der sogenannten Stringtheorien, sieht, wie jetzt ausgeführt werden soll. Eine hervorragende Darlegung der Entstehungsgeschichte und des Inhaltes der Stringtheorie, wie es ohne mathematische Formeln überhaupt nur möglich ist, ist das Buch von M. KAKU und J. TRAINER [KAKU93]. String steht hierbei einfach für Saite. Es wurde die Idee aufgegriffen, daß die Elementarteilchen Schwingungszustände von kleinen ringförmig geschlossenen Saiten, Strings, sind. Ohne daß weiter auf die Entstehungsgeschichte dieser Vorstellungswelt eingegangen werden soll, paßt eine solche Idee voll und ganz in das mit der Quantentheorie entstandene Weltbild, in dem wir eine vollkommene Dualität zwischen Welle und Teilchen haben. Wenn jedes Teilchen eine Wellenform hat und jeder Schwingungszustand seine Quanten, warum sollten dann nicht die Elementarteilchen Schwingungszustände von grundlegenderen Objekten sein? Die einfachsten solcher Objekte sind eindimensionale Saiten. Ja, es ist geradezu erstaunlich, warum man vorher in den Lehrbüchern der Physik der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts nirgendwo die quantisierte Saite fand, wo doch sonst „Donner und Teufel" quantisiert wurden.

Wir müssen noch ein Wort zu den Bezeichnungen sagen. Wenn wir allgemein von Strings reden, meinen wir eine Variante von verschiedenen Theorien. Die erste Version der Stringtheorie war eine Theorie der Bosonenstrings in einer 26-dimensionalen Welt. Später wurden dann andere Versionen interessant und man hat die Bezeichnung Superstrings eingeführt. Wenn wir hier von Superstrings reden, bezieht sich das auf die 10-dimensionale Variante der Stringtheorie.

Wenn sich ein solcher geschlossener String bewegt, entsteht im Raum ein „Schlauch"

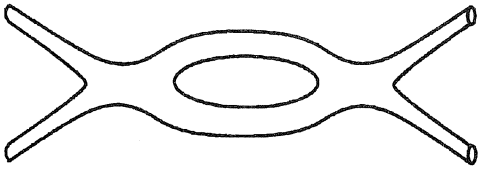
(4.1)

und nicht nur eine Bahnkurve, wie es bei einem punktförmigen Teilchen der Fall ist.

Da die Massen der Elementarteilchen sich aus der Schwingungsenergie der Saiten ergeben, müssen diese „straff gespannt" und außerdem sehr klein im Durchmesser sein. Ohne daß das hier erläutert werden soll, ergibt sich, daß ihr Durchmesser in der Größenordnung der Planckschen Länge $l_{Pl}$ (2.15) sein muß. Das ist gleichzeitig eine weiteres Indiz dafür, daß die Plancksche Länge nicht etwa nur eine willkürliche Einheit ist, sondern tatsächlich so etwas wie eine „Elementarlänge". Nehmen wir nun einmal weiter an, daß sich die Strings in irgend einem Raum bewegen und beim Aufeinandertreffen ebenso streuen, wie die Elementarteilchen (s. [LANI88],S.135). Die bekannten Streubilder (Feynmangraphen)

(4.2)

werden dann zu folgenden Figuren, wenn wir die punktförmigen Elementarteilchen durch kleine geschlossen Strings ersetzen und damit die Linien zu „Schläuchen" werden:

(4.3) 

In der Teilchenphysik gewinnt man alle experimentell relevanten Größen aus der „Streumatrix" S und der „Zustandssumme" Z. Diese wiederum ergeben sich durch Aufsummieren aller möglichen Flächen von der Form (4.3). Diese ist eine Fläche mit einem Loch. Anlog gibt es nun Brezeln mit zwei, drei, usw. Löchern. All diese Figuren liefern Beiträge zur Zustandssumme. Diese Flächen hat im vorigen Jahrhundert RIEMANN in die Mathematik und auch schon in die klassische Physik eingeführt. Sie heißen deshalb auch Riemannsche Flächen. Der Umgang mit Riemannschen Flächen

ist schon längere Zeit auch den theoretischen Physikern in der Elementarteilchenphysik recht vertraut. Was davon bisher den Physikern nicht vertraut war, sind die zahlentheoretischen Aspekte der Theorie der Riemannschen Flächen im weitesten Sinne des Wortes. Aber nicht nur für die Physiker, sondern auch für die Spezialisten unter den Zahlentheoretikern war es ungeheuer überraschend, in welcher Form die Zahlentheorie in physikalisch relevante Formeln hineinkommt, wenn man nach dem in der Physik vertrauten Schema über alle Riemannschen Flächen und, in Verallgemeinerung dazu, über alle arithmetischen Flächen „aufsummiert". Die Spitze des Eisberges sind dann Formeln wie die folgende, mit denen die physikalischen Zustandssummen als Limes- und Summationsprozesse über alle algebraischen Zahlkörper entstehen ([SMIT88], S.678):

$$(4.4) \qquad Z_A = \lim_{K} \sum_{x \in A(K)} e^{26\, h(x)} \; .$$

Dabei ist A der Modulraum von Mannigfaltigkeiten eines bestimmten Geschlechtes über den rationalen Zahlen. Der Limes wird über alle algebraischen Zahlkörper K genommen. Die Summation läuft über alle K-rationalen Punkte x der Mannigfaltigkeit A und im Exponenten steht die Höhe h(x) der K-rationalen Zahl.

Es gibt natürlich im Rahmen eines solchen Vortrages überhaupt keine Möglichkeit, den mathematischen Gehalt dieser Formel zu erklären. Aber wir können und wollen sehr wohl einen Eindruck von dem vermitteln, was in einer solchen Formel „aufdämmert", wie es WEYL formulierte (s.o.). Zuerst einmal kann man die Formel insgesamt auf sich wirken lassen. Es geht um eine physikalisch fundamentale Größe, die Zustandssumme für Strings, und diese bestimmt sich aus der Kenntnis bestimmter Eigenschaften aller algebraischen Zahlkörper. Was das ist, die Zahlkörper, davon werden wir gleich noch einen Eindruck vermitteln. Richten wir vorher noch einen Blick auf die 26, die ganz unvermittelt im Exponenten dieser Formel auftritt. In ihr „dämmert" die höhere Dimensionalität des Universums auf. Es ist nämlich so, daß die quantisierten Strings nicht in jeder Raumdimension existieren können. Unter Hundert sind dabei nur zwei Dimensionen von zentraler Bedeutung, der 26-dimensionale Raum, in dem die Bosonenstrings leben, und der 10-dimensionale Raum, in dem die Superstrings leben. Warum es nicht String-Physik in jeder Raumdimension geben kann

und welche mathematischen Beziehungen dabei eine Rolle spielen, werden wir im letzten Abschnitt noch erläutern.

Kommen wir auf die Zahlkörper zurück. Eine Teilmenge der komplexen Zahlen, die man nicht überschreitet, wenn man in ihr nur die Grundrechnungsarten ausführt, also addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert, heißt Zahlkörper. So ist zum Beispiel die Menge Q der rationalen Zahlen, also aller Brüche p/q aus zwei ganzen Zahlen p und q, ein Zahlkörper. Bei beliebigem Rechnen mit den Grundrechnungsarten bleibt man also innerhalb der rationalen Zahlen. Das gilt aber auch für die Menge $Q(\sqrt{D})$ aller Zahlen der Form $a + b\sqrt{D}$, wobei a,b beliebige rationale Zahlen sind und D eine feste ganze Zahl. Wenn man verschiedene Zahlen dieser Wurzelform addiert oder subtrahiert, erhält man wieder Zahlen dieser Form. Das gilt aber auch für die Multiplikation und Division, wie man aus folgenden Beispielen erkennt:

$$(4.5) \qquad (2+7\sqrt{5})\ (4-3\sqrt{5}) = -97+22\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2+7\sqrt{5}} = \frac{2-7\sqrt{5}}{(2+7\sqrt{5}) = 2-7\sqrt{5})} = \frac{-2}{241} + \frac{7}{241}\sqrt{5}$$

$Q(\sqrt{D})$ ist also ein Zahlkörper, ein sogenannter quadratischer Zahlkörper.

D kann eine beliebige ganze Zahl sein, also auch -1. Bekanntlich setzt man $\sqrt{-1} = i$, die imaginäre Einheit. Damit ist Q(i) nichts anderes als der Körper der komplexen Zahlen a + b i mit rationalem a,b. Man kann nun auch in diesem Zahlkörper die Menge Z[i] der ganzen komplexen Zahlen m + n i auswählen und nach der Faktorzerlegung dieser verallgemeinerten ganzen Zahlen fragen. Dann gilt zum Beispiel

$$(4.6) \qquad \begin{aligned} 2 &= (1 + i)\,(1 - i) \\ 5 &= (2 + i)\,(2 - i) \end{aligned}$$

d.h., die gewöhnlichen Primzahlen 2 und 5 sind innerhalb der Menge der ganzen komplexen Zahlen keine Primzahlen mehr, sondern zerlegbar. Die gewöhnliche Primzahl 3 ist aber auch innerhalb der ganzen komplexen Zahlen weiterhin unzerlegbar, und dies gilt für alle gewöhnlichen Primzahlen der Form 4 m + 3 . Trotz dieser Änderungen gilt weiterhin die

eindeutige Zerlegbarkeit der komplexen ganzen Zahlen in ein Produkt von verallgemeinerten Primzahlen.

Ganz anders ist die Situation im quadratischen Zahlkörper $Q(\sqrt{5})$. Für seine ganzen Zahlen $Z[\sqrt{-5}\,]$ gilt die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren schon nicht mehr, denn es ist z.B.

$$(4.7) \qquad 9 = 3\cdot 3 = (2+\sqrt{-5})\,(2-\sqrt{-5}).$$

Man muß sich allerdings noch davon überzeugen, daß sowohl die 3, wie auch die Faktoren mit der Wurzel von -5, nicht weiter zerlegbar sind, also verallgemeinerte Primzahlen.

Wir sind auf die Mehrdeutigkeit in den Zahlkörpern deswegen eingegangen, weil sie uns auf die Lösungsproblematik der Fermatschen Vermutung (0.3) führt und dann weiter wieder zu der Formel (4.4) der Stringtheorie. Dazu muß man allerdings noch andere algebraische Zahlkörper betrachten. Sei $\zeta$ eine beliebige komplexe Einheitswurzel, d.h. eine komplexe Zahl, die Lösung der Gleichung $\zeta^p = 1$ ist, so bilden die Zahlen der Form $x = a_0 + a_1\,\zeta + a_2\,\zeta^2 + \ldots + a_{p-1}\,\zeta^{p-1}$, wobei alle $a_k$ rational sind, ebenfalls einen Zahlkörper $Q(\zeta)$, denn die Multiplikation zweier Zahlen dieser Form ist wieder eine Zahl dieser Form. Sobald nämlich eine p-te Potenz von $\zeta$ auftritt, kann man sie durch 1 ersetzen. In diesem Zahlkörper hat man, ebenso wie in den obigen Beispielen der quadratischen Zahlkörper, die Menge $Z[\zeta]$ seiner verallgemeinerten ganzen Zahlen x , bei denen alle $a_k$ ganze Zahlen sind. Man kann in diesen Mengen verallgemeinerter ganzer Zahlen, ebenso wie in der Menge der gewöhnlichen ganzen Zahlen, addieren, subtrahieren und multiplizieren, allerdings nicht beliebig dividieren. Mengen mit solchen Rechenoperationen heißen Ringe. Würde nun in den Ringen $Z[\zeta]$ für jede Primzahl p die eindeutige Faktorzerlegung gelten, so könnte man die Fermatsche Vermutung einfach beweisen. Einen solchen „falschen Beweis" hat angeblich zwischen 1830 und 1840 der Berliner Mathematiker KUMMER geliefert, dann aber bemerkt, daß die eindeutige verallgemeinerte Primzahlzerlegung für p = 23 (und höhere Primzahlen) nicht mehr gilt.

KUMMER hat dann, angespornt durch dieses Problem, ein grandioses Werk geschaffen und damit die gesamte moderne Zahlkörpertheorie begründet (s. [DIEU85], Kap.5). Wir wollen die Aufmerksamkeit noch dar-

auf lenken, daß gerade $p = 23$ eine kritische Grenze ist. Das erscheint in Hinblick auf die Ausführungen im nächsten Abschnitt in einem besonderen Licht, indem wir verdeutlichen werden, daß in der Umgebung von 24 „viel geschieht".

In den 150 Jahren seit KUMMER ist ein gewaltiges Gebäude der modernen Zahlentheorie entstanden, das auch immer wieder am Beweis der Fermatschen Vermutung getestet wurde. Schließlich ist der Beweis der Fermatschen Vermutung in den letzten Jahren gelungen (s. [FALT95]). Es gibt also keine ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$, wenn $n>2$ ist. Den entscheidenden Durchbruch erzielte 1983 FALTINGS mit dem Beweis, daß es höchstens endlich viele Lösungen geben kann. Es ist durchaus möglich, daß künftig für das äußerst elementar formulierte Fermatsche Problem auch ein elementarer Beweis gefunden wird. Der gegenwärtige Beweis allerdings benötigt die gesamte moderne Maschinerie einer der neuesten Synthese zwischen Zahlentheorie und Geometrie, der sogenannten „arithmetischen Geometrie", bei deren Ausbau die Faltingsschen Methoden einen Höhepunkt bildeten. Es hat nun erneut äußerste Überraschung hervorgerufen, daß der gesamte mathematische Apparat dieser neuen arithmetischen Geometrie in der Stringtheorie reflektiert ist. Er ist nämlich der mathematische Hintergrund, auf dem die Beziehung (4.4) gefunden und verstanden werden kann. Bei rechtem Licht betrachtet, sollte die Tatsache eigentlich nicht überraschen, denn seit Einsteins gekrümmter Welt ist uns vertraut, daß Geometrie und Physik in enger Verwandtschaft stehen und es sind zahllose Artikel dazu erschienen. Mit der arithmetischen Geometrie haben allerdings die geometrischen Begriffe einen derartigen Abstraktionsgrad erreicht, daß kaum einer ihrer Akteure angenommen hatte, daß sie etwas mit der „wirklichen physikalischen Geometrie" zu tun haben könnte. Zwischen der Einsteinschen Geometrisierung der Gravitation und der Schaffung der „gekrümmten Räume" durch RIEMANN lag immerhin noch ein halbes Jahrhundert. Die neuerliche Synthese zwischen arithmetischer Geometrie und der Stringtheorie vollzieht sich in engster Wechselwirkung.

Die Stimulans, welche das äußerst einfach und elementar formulierbare Fermatsche Problem für die moderne Zahlentheorie bis hin zur arithmetischen Geometrie hatte, ist bereits Legende. Jetzt sehen wir, wie es sogar fundamentale physikalische Theorien befördert. Es ist eine selten

erwähnte Tatsache, daß die Fermatsche Vermutung die moderne Physik über viele Jahre sogar „finanziell gefördert" hat. Aller Welt bekannt ist die Rolle Göttingens bei der Entwicklung der modernen Physik in den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts. Es war das Mekka der Physiker aus der ganzen Welt und die regelmäßigen Vorträge internationaler Gäste in Göttingen haben auch die Bezeichnung „Göttinger Festspiele" gefunden. Viel weniger bekannt ist die Tatsache, daß diesen „Göttinger Festspielen" finanzielle Mittel aus der ungelösten Fermatschen Vermutung zuflossen. Im Jahre 1905 hatte der Göttinger Professor P. WOLFSKEHL der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften die hohe Summe von 100 000 Reichsmark als Preis für denjenigen zur Verfügung gestellt, der die Fermatsche Vermutung beweist. Man kann sich denken, wie viele Schriften zu angeblichen Beweisen in Göttingen eingegangen sind, die geprüft und beantworten werden mußten. Unterdessen konnten aber die Zinsen aus der Wohlfskehlschen Stiftung genutzt werden und flossen den „Göttinger Festspielen" zu. HILBERT soll bemerkt haben, daß er sich über jeden falschen Beweis freut, weil dadurch das Geld weiterhin zur Förderung des wissenschaftlichen Lebens zur Verfügung steht.

Damit ist die innere Verbindung des Fermatschen Satzes zur Physik noch keineswegs ausgeschöpft. Interessant ist nämlich auch ein Zusammenhang zu den „rationalen Zahlen der klassischen Physik", d.h. den Bernoullischen Zahlen. KUMMER hatte seinerzeit für eine große Klasse von Primzahlen die Fermatsche Vermutung beweisen können, für die sogenannten regulären Primzahlen. In ihnen reflektiert sich ein wesentlicher zahlentheoretischer Zusammenhang, der mit der oben diskutierten Mehrdeutigkeit der allgemeinen Primzahlzerlegung zusammenhängt und hier nicht weiter diskutiert werden kann. Aus unserer „physikalischen Sicht" ist aber nun interessant, daß KUMMER die regulären Primzahlen mittels der Bernoullischen Zahlen (3.5) charakterisieren konnte. Eine Primzahl p ist genau dann regulär, wenn p keinen der Zähler der ersten $1/2$ (p-3) Bernoullischen Zahlen teilt. Also beispielsweise für p = 17 ist $1/2$ (p-3) = 7. Nun teilt 17 keinen der Zähler der ersten 7 Bernoullischen Zahlen in (3.5), also ist 17 eine reguläre Primzahl.

Damit sind wir wieder auf die rationalen Zahlen der Physik zu sprechen gekommen. Dieser Vortrag bietet keinen Raum, auf markante ganze Zahlen der Physik einzugehen. Zu denen gehören zum Beispiel die „magi-

schen Zahlen“ der Kernphysik (s. [JOOS59], S.736). Magische ganze Zahlen sind auch in den Isotopenregeln angesprochen. Sei Z die Kernladungszahl, M die Massenzahl eines Elementes und J die Anzahl der stabilen Isotope eines Elementes. So gelten folgende Isotopenregeln ([GRIM75], S.28): 1.Isotopenregel: a) Elemente mit ungeradem Z haben stets $J < 3$. b) Bei geradem Z ist $J > 2$ mit den Ausnahmen $_4$Be ($J = 1$) und 2He, 6C ($J = 2$). 2. Isotopenregel: Zu jeder Massenzahl M gehört mindestens ein stabiler Kern, mit den Ausnahmen $M = 5$ und $M = 8$.

Man kann noch viele magische ganze Zahlen der Physik und Chemie angeben, bis hin zu den 20 Aminosäuren der Biochemie, aus denen sich die Proteine aufbauen. In welche mathematische Richtung man bei solchen magischen ganzen Zahlen denken kann, soll jetzt noch an den Elementarteilchen erläutert werden und damit kommen wir zu den Strings zurück.

Nachdem in der ersten Hälfte des Jahrhunderts die Vorstellung noch gerechtfertigt schien, daß die Stoffe aus ganz wenigen Typen von Elementarteilchen entstehen, änderte sich die Situation markant, als in den 50er Jahren ganze Kaskaden von immer neuen Elementarteilchen entdeckt wurden. Erst nach und nach konnten mit Hilfe von Symmetriegruppen die Elementarteilchen zu einzelnen Typen zusammengefaßt werden. Viele Teilchen, die ursprünglich als verschiedene Teilchen erschienen, erweisen sich nun als das gleiche Teilchen, nur mit anderen Attributen. Man hat für diese Attribute solch „blumige“ Worte wie Farbe, Charme, Flavour eingeführt. Diese Attribute bilden somit einen mehrdimensionalen Parameterraum innerer Eigenschaften und die Symmetriegruppen „drehen“ in diesem Raum, wie die gewöhnlichen Drehgruppen die Kristalle im dreidimensionalen Raum drehen. Wenn man etwa an die Zahl 20 der Aminosäuren denkt, so wäre es nicht verwunderlich, wenn es Dutzende solcher Familien von Elementarteilchen, oder Generationen, wie man sagt, gäbe. Nachdem erst eine ungeheure Vielfalt die Situation verwirrte, ist es umgekehrt erstaunlich, daß diese Vielfalt sich auf drei Generationen reduzierte ([LANI88], S.155). Im Rahmen der Stringtheorie läßt sich nun eine Konzeption entwickeln, die die Anzahl der Elementarteilchengenerationen in Beziehung zur inneren Geometrie der „schwingenden Strings“ bringt.

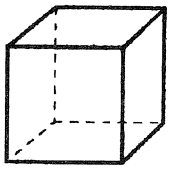
Nehmen wir dazu das Modell der Superstrings. Diese leben in einem 10-dimensionalen Raum. Da wir in unserer makroskopischen Raum-Zeit-

Welt aber nur 4 Dimensionen beobachten, nimmt man an, daß 6 Dimensionen „eingerollt" sind, kompaktifiziert, wie der mathematische Ausdruck heißt. Man kann sich das im 2-dimensionalen Fall anschaulich verdeutlichen. Angenommen, die 2-dimensionale Ebene sei zu einem sehr dünnen Zylinder zusammengerollt,

(4.8)


Dann erscheint uns makroskopisch nur noch eine Dimension, wenn der Kreis K sehr klein ist. In der Superstringtheorie ist K natürlich kein einfacher Kreis, sondern ein kompakter 6-dimensionaler Raum K. Wir werden gleich eine Vorstellung davon vermitteln, was die Eulersche Charakteristik $\chi(K)$ eines solchen Raumes ist. Wenn man der inneren Logik der Stringtheorie folgt, ist die Anzahl der Elementarteilchengenerationen gleich der Hälfte der Charakteristik $\chi(K)$. Da die Existenz von 3 Generationen eine gesicherte Tatsache zu sein scheint, müßte die Charakteristik des eingerollten Raumes K also 6 sein. Die aktuellen mathematischen Forschungen zu dieser Problematik laufen jetzt so, daß die 6-dimensionalen Räume durchgemustert werden nach besonderen Räumen der Charakteristik 6. Sollte es einen ganz ausgezeichneten Kandidaten für einen solchen Raum geben, kann man dann prüfen, was das für Konsequenzen für die Elementarteilchen hat. Wie bei jeder theoretische Konzeption kann es zwei Wege ihrer weiteren Entwicklung geben. Entweder wäre ein solcher Raum mit der Charakteristik 6 zwingend, dann hätte man einen theoretischen „Beweis" für die Zahl 3 der Generationen, oder es gibt eine Vielfalt solcher zulässiger Räume, dann wird man angeregt werden, nach weiteren einschränkenden Bedingungen zu suchen, die die Theorie weiter ausbauen.

Was ist nun die Eulersche Charakteristik eines Raumes? Wir erläutern dies für den Fall eines 2-dimensionalen kompakten Raumes, d.h. für die kompakten Flächen (Flächen ohne Ränder). Nehmen wir z.B. die Oberfläche W eines Würfels,

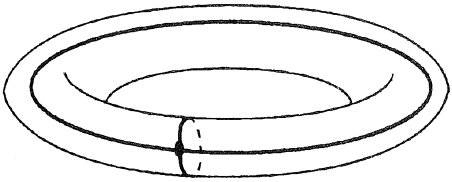
(4.9) 

Diese hat 8 Ecken, 12 Kanten und 6 Flächen. Die Eulersche Charakteristik ist nun die Wechselsumme

(4.10) $\chi(W) = \text{Ecken} - \text{Kanten} + \text{Flächen} = 8 - 12 + 6 = 2$ .

Die Charakteristik wird also mittels einer Triangulation der Oberfläche bestimmt. Man kann sich jetzt in Ruhe überlegen, daß sich diese Wechselsumme aus Ecken, Kanten, Flächen nicht ändert, wenn man weitere Triangulationslinien einzeichnet. Diese Wechselsumme ist somit für alle Triangulationen die gleiche. Damit ist außerdem gezeigt, daß die Charakteristik gegen Deformationen der Fläche invariant ist, weil sich dabei zwar die Triangulationslinien verbiegen, die Zahlen aber unverändert bleiben. Also hat die Sphäre, die Kugeloberfläche, auch die Charakteristik 2. Anders ist es beim Torus T,

(4.11)



Für die in der Skizze angedeutete sehr „entartete" Triangulation durch die beiden Kreise hat man nur eine Ecke, nur eine Fläche aber zwei Kanten. Deshalb ist für den Torus die Charakteristik $\chi(T) = 0$.

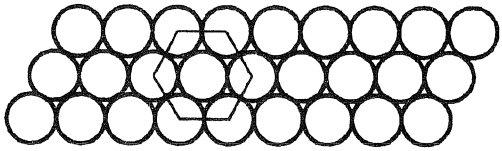
Wenn man davon noch nicht überzeugt ist, kann man weitere Linien einzeichnen, also „richtigere" Triangulationen. Immer wieder wird die Wechselsumme aus Ecken, Kanten und Flächen gleich Null. Für Räume höherer Dimension wird die Eulersche Charakteristik durch eine analoge Wechselsumme definiert. Es geht also bei den 0-dimensionalen Elementen (Ecken) einer Zerlegung los, dann kommen die 1-dimensionalen Elemente (Kanten), dann die 2-dimensionalen und so fort. Für die höheren Dimensionen verläßt einen natürlich die Anschauung und man muß die Zerlegungen und die Abzählungen mit entsprechenden mathematischen Techniken durchführen.

## 5. MINKOWSKI, DYSON und die „26"

Mit den Primzahlen und den Teilbarkeitseigenschaften ganzer Zahlen waren die einfachsten quantitativen Beziehungen der Realität angesprochen, von denen ein direkter Weg über die Zetafunktion zu den Konstanten der klassischen Physik führte. Mit den Kugelpackungen soll jetzt eine der fundamentalsten geometrischen Beziehungen in den Blick genommen werden, die von einfachsten Fragestellungen zu den kompliziertesten mathematischen Problemen führt und auf direktem Wege zu den merkwürdigen Dimensionen und zahlentheoretischen Zusammenhängen in der Stringtheorie.

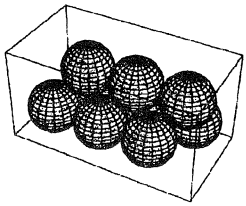
Die Geschichte der Kugelpackungen beginnt im 17. Jahrhundert mit dem wohl bekanntesten Problem der Geometrie. KEPLER stellte 1611 die Frage nach der dichtesten Kugelpackung im 3-dimensionalen Raum und behauptete, daß es keine dichtere als die dichteste gitterförmige Packung gäbe. Dieses Problem gilt bis heute als ungelöst, obwohl seit 1990 W.Y. HSIANG aus Berkeley einen fast 100-seitigen Beweis vorgelegt hat, über den schon viel berichtet wurde, auch in der internationalen Presse, den aber die Mehrheit der Experten nicht als stichhaltig ansieht [WILL95]. Günstiger ist die Situation bei den dichtesten gitterförmigen, also regelmäßigen Packungen. Da bewies LAGRANGE im Jahre 1773, daß die dichteste gitterförmige Packung von gleich großen Kreisen in der Ebene die hexagonale ist:

(5.1)



GAUß bestimmte dann 1831 die dichteste Kugelpackung im 3-dimensionalen Raum. Es ist die in der Kristallographie wohlbekannte Kugelpackung zum flächenzentrierten kubischen Gitter:

(5.2)



Die Dichte $\Delta$ einer Kugelpackung ist das Verhältnis der Volumen des überdeckten Raumgebietes zum Gesamtraum. Für die dichteste Gitterpackungen in der Ebene, die hexagonale, ist die Dichte $\Delta_2 = \pi/\sqrt{12} = 0{,}9069$ und im 3-dimensionalen Raum gilt für die dichteste Gitterpackung $\Delta 3 = \pi/\sqrt{18} = 0{,}7405$. Bis zur Dimension 8 sind die dichtesten Gitterpackungen bekannt. Darüber hinaus liegen nur Teilergebnisse vor. Allerdings nimmt der Bereich bis zur Dimension 24 einen besonderen Platz ein. Es zeigt sich nämlich, daß man die bekannten dichtesten Gitterpackungen bis zur Dimension 8 schrittweise durch Übereinanderschichten gewinnen kann. Und diesen Prozeß kann man über die 8 hinaus fortsetzen. Wir wollen das jetzt beschreiben.

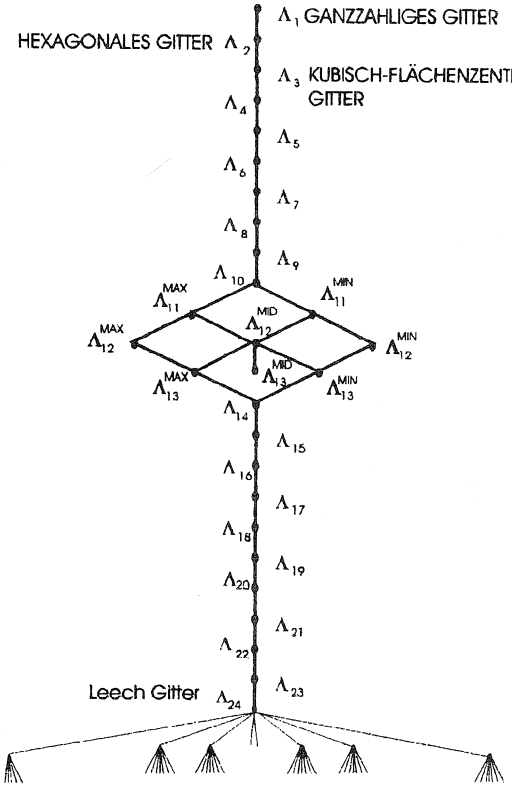
Die eindimensionalen Einheitskugeln sind natürlich einfach Strecken der Länge 2 (Radius 1 um einen Mittelpunkt). Erweitert man diese Strecken (1-dimensionalen Kugeln) zu Kreisen (2-dimensionalen Kugeln) so erhält man aus der dichtesten eindimensionalen Kugelpackung eine Perlenkette von Kreisen:

(5.3)

Schichtet man nun solche eindimensionale Kreisreihen so übereinander, daß die Kreise der nächsten Schicht in die kleinen Lücken rutschen, so erhält man genau die hexagonale Packung (5.1). Man kann nun auf diese Weise weiter fortschreiten. Zuerst die Kreise dieser Packung zu 3-dimensionalen Kugeln erweitern und dann diese Schichten von Kugeln so übereinanderlegen, daß die nächste Schicht genau in die kleinen Lücken der vorhergehenden rutscht. Was man erhält ist die dichteste Packung (5.2) des 3-dimensionalen Raumes. Diese Prozedur läßt sich nun weiter fortsetzen, von einer Dimension zu nächsten. Die durch solche Schichtungen entstehenden Gitterpackungen heißen deshalb auch geschichtete Gitterpackungen (engl. Laminated Lattices). Bis zu Dimension 10 ist das nächste Gitter immer eindeutig bestimmt. Beim Übergang zur 11-ten Dimension gibt es eine Mehrdeutigkeit. Die 10-dimensionalen Schichten können beim Übereinanderlegen auf verschiedene Weise ineinanderrutschen, so daß es verschieden geschichtete Gitter (genau 2) in der 11-ten Dimension gibt. Ab der Dimension 14 gibt es dann jeweils wieder eine geschichtete Gitterpackung,

aber oberhalb 24 fächert die Situation dramatisch auf. 24 ist also eine kritische Grenze, wie man aus folgender Grafik sieht ([CONW92], S.159):

(5.4)




Das 24-dimensionale geschichtete Gitter ist von außerordentlicher Bedeutung. Es ist das berühmte Leech-Gitter und steht im direkten Zusammenhang zur 26-dimensionalen Stringtheorie. Wir werden dazu noch einiges sagen. Außerdem spielt es in der Kodierungstheorie eine Rolle, denn selbstkorrigierende Kodes hängen mit den sogenannten selbstdualen geraden Gittern zusammen, die es nur in Dimensionen gibt, die ein Vielfaches der 8 sind. Davon gibt es nur eins in der Dimension 8, zwei in der Dimension 16, genau 24 Stück in der Dimension 24, unter denen das Leech-Gitter nicht nur wegen seiner Dichte ausgezeichnet ist. In der Dimension 32 gibt es bereits mehr als 80 000 000 solcher Gitter.

Es gibt viele Gründe zu der Vermutung, daß die Gitter $\Lambda_{16}$ und das Leech-Gitter $\Lambda_{24}$ Gitter dichtester Kugelpackung sind. Außerdem kennt man in der Dimension 12 noch ein spezielles Gitter, das Coxeter-Todd-Gitter, von dem man das gleiche vermutet. Von den anderen Dimensionen ist bisher alles unbekannt.

Im Bereich bis zur Dimension 24 gilt eine bemerkenswerte Symmetrie, die DYSON in [DYSO84] hervorhebt. Diese erkennt man, wenn man die sogenannte zentrierte Dichte $\delta_n = \Delta_n/V_n$ einführt, d. h., wenn man die Dichte $\Delta_n$ durch das Volumen $V_n$ der n-dimensionalen Kugel teilt. Dann hat man für die zentrierte Dichte der geschichteten Gitterpackungen bis zu Dimension 24 folgende Liste

(5.5)

$$\begin{gathered}
\text{Zentrierte Dichten} \\
\delta_0 = \delta_{24} = 1 \\
\delta_1 = \delta_{23} = 2^{-1} \\
\delta_2 = \delta_{22} = 2^{-1}3^{-1/2} \\
\delta_3 = \delta_{21} = 2^{-5/2} \\
\delta_4 = \delta_{20} = 2^{-3} \\
\delta_5 = \delta_{19} = 2^{-7/2} \\
\delta_6 = \delta_{18} = 2^{-3}3^{-1/2} \\
\delta_7 = \delta_8 = \delta_{16} = \delta_{17} = 2^{-4} \\
\delta_9 = \delta_{15} = 2^{-9/2} \\
\delta_{10} = \delta_{14} = 2^{-4}3^{-1/2} \\
\delta_{11} = \delta_{12} = \delta_{13} = 2^{-5} \\
\text{Theorem: } \delta_n = \delta_{24-n}\,.
\end{gathered}$$

Schauen wir nochmals auf die Grafik (5.4). Wir sehen, daß nach der 10 ein erster kritischer Bereich kommt. Dies hebt eine Besonderheit der Dimension 10 hervor und korrespondiert auch zu anderen Besonderheiten sowie zur Dimension 10 der Welt der Superstrings, worauf wir aber in diesem Vortrag nicht weiter eingehen können. Außerdem sind für die Dimensionen 10 – 13 die geschichteten Gitterpackungen nicht die dichtesten unter den bekannten. Oberhalb der Dimension 24 ist zwar schon viel bekannt, aber wegen der außerordentlichen Vielfalt, die oberhalb dieser kritischen Dimension auftritt, nur einzelne Beispiele. Allerdings gibt es verschiedene Abschätzungen über die Dichte der Kugelpackungen, und hier kommt MINKOWSKI wieder ins Spiel.

MINKOWSKI ist jedem Physikstudenten wegen seiner Beiträge zur Begründung der Relativitätstheorie bekannt. Weniger allgemein bekannt in der Physik ist MINKOWSKI als großer Zahlentheoretiker. Sein Wirken begann gleich mit einem Paukenschlag. 1881 hatte die Pariser Akademie das Problem der Zerlegung der ganzen Zahlen in eine Summe von fünf Quadraten als Preisthema gestellt (vgl.(0.4)). MINKOWSKI reichte als 17-jähriger Student dazu eine Arbeit ein und gewann den Preis. Seine Arbeit ging weit über das Thema hinaus und war ein großartiger Beitrag zur Zahlentheorie. Obwohl er, entgegen der Regel, seine Arbeit nur in deutscher Sprache eingereicht hatte, erhielt er den Preis wegen seiner außergewöhnlichen Leistung unter ausdrücklicher Betonung des „exzeptionellen Falls" im Kommissionsbericht. Er wurde dann einer der bedeutendsten Mathematiker des ausgehenden 19. Jahrhunderts. Seine ureigenste Schöpfung ist die „Geometrie der Zahlen" . Durch scheinbar einfachste Betrachtungen über gitterförmig verteilte konvexe Körper, konnte er zur Überraschung der Fachwelt tiefe zahlentheoretische Einsichten gewinnen. In diesem Zusammenhang entstand übrigens auch die Theorie der konvexen Körper [MINK89]. Heute sind konvexe Körper in vielfältigen technischen Anwendungen und der Optimierung gang und gäbe . Kaum einer denkt dabei daran, daß die Anfänge ihrer Theorie bei dem Zahlentheoretiker MINKOWSKI liegen, der durch den Minkowskiraum seinen festen Platz in der Physik hat. Mit seinem Gitterpunktsatz leitete er verschiedene wichtige zahlentheoretische Abschätzungen ab, insbesondere über die Klassenzahl algebraischer Zahlkörper. Im vorigen Abschnitt hatten wir gesehen, daß in einem Zahlkörper die Zerlegung in Primfaktoren in der Regel mehrdeutig ist. Der Grad der Mehrdeutigkeit wird durch die Klassenzahl gemessen.

MINKOWSKI gelang nun 1905 eine Abschätzung für die maximale Dichte $\Delta_n$ der Kugelpackungen für alle Dimensionen n mit der Formel

$$\Delta_n \geq \frac{\zeta(n)}{2^{n-1}} . \tag{5.6}$$

Wiederum ist es die wichtige $\zeta$-Funktion, die, über alle Dimensionen hinweg, in ein Maß für die dichtesten Kugelpackungen eingeht.

Die Dimension 24 und das Leech-Gitter sind noch aus der Sicht einer andere Problematik höchst bemerkenswert, die auf NEWTON zurückgeht. Es ist eine Fragestellung, die als das „Kußzahl-Problem" oder auch „13-

Kugeln Problem" bekannt ist. Es war Gegenstand eines Disputes zwischen NEWTON und GREGORY im Jahre 1694. NEWTON war der Ansicht, daß eine Kugel im 3-dimensionalen Raum von höchstens 12 weiteren berührt werden kann, während GREGORY 13 für die maximale Zahl hielt. Nach verschiedenen unvollständigen Beweisen im 19.Jahrhundert, konnte das Problem erst 1953 durch SCHÜTTE und van der WAERDEN endgültig entschieden werden, übrigens zugunsten Newtons. Die Anzahl der Kugeln, die in einer Kugelpackung eine ausgewählte Kugel berühren, heißt auch Kontaktzahl. Es ist erstaunlich, daß oberhalb der Dimension 3 die maximalen Kontaktzahlen noch unbekannt sind, mit Ausnahme der Dimensionen 8 und 24. Für diese sind die maximalen Kontaktzahlen 240 bzw. 196560. Im 4-dimensionalen Raum kann diese Zahl höchstens 25 sein. Ein Gitter mit der Kontaktzahl 24 ist bereits bekannt, aber die Zahl 25 konnte noch nicht ausgeschlossen werden (s. [CONW92], S.21 ff.).

Zusammenfassend sehen wir also, speziell an der Grafik (5.4), wie das einfache geometrische Problem der Kugelpackungen in der Folge aller möglichen Raumdimensionen bis etwa 30 zwei kritische Bereiche hervorhebt. Einer liegt um die Dimension 10 und der andere um die Dimension 24. Welche Verbindung zu der 26-dimensionalen Stringtheorie für Bosonenstrings sich dabei auftut, soll jetzt beleuchtet werden.

Die auch für die Kodierungstheorie wichtigen selbstdualen geraden Gitter gibt es, wie schon gesagt, für die euklidischen Räume nur in den Dimensionen 8, 16, 24, 32 usw., und ab der Dimension 32 in sehr großer Anzahl. Für Minkowskiräume, d.h. für Räume mit der Minskowskischen Metrik $x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 - x_n^2$ sieht es anders aus. Da gibt es immer genau ein gerades selbstduales Gitter, wenn n eine der Zahlen 2, 10, 18, 26, ... usw. (durch Addition der 8) ist. Im 26-dimensionalen Minkowskiraum, also im physikalischen Raum der bosonischen Strings, trägt dieses ausgezeichnete und eindeutig bestimmte Gitter die Bezeichnung $II_{25,1}$. Nun nehmen wir den einzigartigen lichtartigen Vektor w = (0,1, ...,24;70) (s. (0.5)) hinzu. Wenn man jetzt alle Punkte des 26-dimensionalen Gitters $II_{25,1}$ durch zwei Gleichungen einschränkt, erhält man ein 24-dimensionales Gitter. Dies ist genau das Leech-Gitter L24 ([CONW92],S.524):

$$(5.7) \qquad \textit{Leech-Gitter}\ \Lambda_{24} = \begin{cases} x \in II_{25,1} \\ x \cdot x = 2,\ x \cdot w = -1\ . \end{cases}$$

Die letzten Beziehungen waren für sich schon interessant, weil die Einzigartigkeit der 26-dimensionalen Stringtheorie in Beziehungen zum ausgezeichneten Charakter des Leech-Gitters und der kritischen Dimension 24 gebracht wird. Damit ist die Geschichte keineswegs erschöpft, sondern wir können sie weiterführen zum offensichtlichen Zusammenhang der Stringtheorie mit der „Monstergruppe", über die DYSON schon in seinem Vortrag [DYSO84] gesprochen hat, ohne daß damals der Zusammenhang zur Stringtheorie schon sichtbar war.

Die Drehungen oder allgemeiner die Bewegungen in einem Raum (beliebiger Dimension) bilden eine Gruppe, d.h., wenn man zwei Drehungen $D_1$, $D_2$ hat, so kann man sie hintereinander ausführen $D_1 * D_2 = D_3$ und dies ist wieder eine Drehung. Außerdem gibt es zu jeder Drehung D die inverse Drehung $D^{-1}$, so daß $D^{-1} * D = E$ das neutrale Element ist, d.h. es wird nichts gedreht. In der 2-dimensionalen Ebene ist jede Drehung eindeutig durch einen Drehwinkel bestimmt und der Multiplikation der Drehungen entspricht die Addition der Winkel. Deshalb gilt in diesem Fall das Kommutativgesetz $D_1 * D_2 = D_2 * D_1$. Aber schon im gewöhnlichen 3-dimensionalen Raum gilt das Kommutativgesetz nicht mehr. Davon überzeugt man sich leicht, indem man zwei Streichholzschachteln vor sich auf den Tisch legt und die eine zuerst nach hinten und dann nach rechts kippt, während man die andere zuerst nach rechts und dann nach hinten kippt. Man kommt zu verschiedenen Ergebnissen. Das Kommutativgesetz gilt also nicht mehr, aber in jedem Fall gilt noch das Assoziativgesetz $D_1 * (D_2 * D_3) = (D_1 * D_2) * D_3$. Nun kann man nach den endlichen Gruppen fragen. z. B. ist die Menge aller Drehungen, die ein regelmäßiges n-Eck in der Ebene invariant lassen, eine endliche Gruppe aus genau n Elementen. Die bekanntesten endlichen Drehgruppen des 3-dimensionalen Raumes sind die Drehgruppen, die eine bestimmte Kristallstruktur invariant lassen.

Hat man mehrere endliche Gruppen, so kann man sie zu einer größeren zusammensetzen. Gruppen, die nicht zusammengesetzt sind, nennt man einfach. Es ist nun gelungen, alle endlichen einfachen Gruppen zu bestimmen! Das Resultat sieht folgendermaßen aus: Es gibt zu jedem Typ

von kontinuierlichen Drehgruppen (aller endlichdimensionalen reellen und komplexen Räume) gewisse Serien endlicher Gruppen, so wie man aus allen Drehungen des 3-dimensionalen Raumes die endlichen Kristallgruppen gewinnt. Außer diesen Serien gibt es noch genau 26 Ausnahmegruppen, sogenannte sporadische Gruppen, die in keine Serie passen. Unter diesen Gruppen ist eine die größte. Diese Gruppe hat absolut genau

$$(5.8)\ N_{Monster} = 2^{46}\cdot 3^{20}\cdot 5^{9}\cdot 7^{6}\cdot 11^{2}\cdot 13^{3}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29\cdot 31\cdot 41\cdot 47\cdot 59\cdot 71$$
$$= 808\ 017\ 424\ 794\ 512\ 875\ 886\ 459\ 904\ 961\ 710\ 757\ 005\ 754\ 368 \cdot 10^{9}$$

Elemente. Sie trägt die Bezeichnung $F_1$ nach FISCHER, der sie nach vielen Vorarbeiten im Februar 1981 endgültig konstruierte. Sie wird aber auch die Monstergruppe genannt. Man wird sich fragen, wie man eine Gruppe mit einer solch ungeheuren Zahl von Elementen finden bzw. konstruieren kann. Auch hier führte der Weg über das ausgezeichnete Leech-Gitter. Dieses läßt sich sehr genau beschreiben und ist also ein „24-dimensionaler Kristall". Und so, wie man doch recht komplizierte kristallographische Gruppen bestimmt, kann man nach der Invarianzgruppe des Leech-Gitters fragen. Es ist die sogenannte Conway-Gruppe. Ausgehend von einer gründlichen Untersuchung dieser Gruppe gelang dann die endgültige Konstruktion aller noch nicht bekannten sporadischen Gruppen und auch des Monsters.

Die letzten Resultate zeigen, daß der Zusammenhang zwischen Stringtheorie und Monster mehr als zufällig ist. Ganz im Geiste der Anwendung der Symmetriegruppen in der Elementarteilchenphysik wird aus der Stringtheorie heraus eine Liesche Algebra erzeugt, die zur Monstergruppe gehört, auch wenn noch einige Fragen offen sind ([CONW92], S.568). Auch diese hat schon ihren Namen, natürlich Monster Lie-Algbra! Da also die Monster-Zahl $N_{monster}$ ($\cong 10^{54}$) zu einer Theorie der Elementarteilchenphysik gehört, kann man vermuten, daß sie in Relation zu den großen Zahlen der Physik steht, die wir im zweiten Abschnitt erwähnt hatten. Auch wenn das im Moment noch Spekulation ist, „dämmert" hier zweifellos ein tiefer Zusammenhang herauf. Daß von dieser Monsterzahl eine Verbindung zu den großen Zahlen der Physik zu erwarten ist, ist jedenfalls weniger spekulativ als die Berechnungen EDDINGTONS, die ihn zu seiner berühmten Aussage führten ([EDDI38], S.170):

„I believe there are 15 747 724 136 275 002 577 605 653 961 181 555 468 044 717 914 527 116 709 366 231 425 076 185 631 031 296 protons in the universe, and the same number of electrons".

## Literatur


BARR88 Barrow, J.D., F.J. Tipler: The Anthropical Cosmological Principle. Oxford 1988.

CONW92 Conway, J.H., N.J.A. Sloane: Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer New-York, Berlin u.a. 1992.

DIEU85 Dieudonné, J.: Geschichte der Mathematik 1700-1900. Vieweg Braunschweig 1985.

DYSO72 Dyson, F.J.: Missed Opportunities. Bull.Amer.Math.Soc.78,5 (1972)635.

DYSO84 Dyson, F.J.: Unfashionable Pursuits. in: I. Bars, A. Chodos, Chia-Hsiung Tze (ed.): Symmetries in Particel Physics. Plenum Press New-York London 1984.

EDDI34 Eddington, A.: New Pathways in Science (Messenger Lectures 1934). Cambridge Univ. Press 1935.

EDDI38 Eddington, A.: The Philosophy of Physical Science (Tarner Lectures 1938). Cambridge Univ. Press 1939.

FALT95 Faltings, G.: Der Beweis der Fermat-Vermutung durch R. Taylor und A. Wiles. DMV Mitteilungen 2(1995)6.

GRIM75 Grimsehl: Lehrbuch der Physik Bd.4. Teubner Leipzig 1975.

JOOS59 Joos, G.: Lehrbuch der Theoretischen Physik. Leipzig 1959.

KAKU93 Kaku, M., J. Trainer.: Jenseits von Einstein. Die Suche nach der Theorie des Universums. Insel Frankfurt 1993.

KARA92 Karatsuba, A.A., S.M. Voronin: The Riemann Zeta-Function. Berlin New-York 1992.

LANI88 Lanius, K.: Mikrokosmos-Makrokosmos. Das Weltbild der Physik. Urania Leipzig 1988.

MINK89 Minkowski, H.: Ausgewählte Arbeiten zur Zahlentheorie und zur Geometrie. Teubner-Archiv zur Mathematik Bd.12. Leipzig 1989.

PLAN99 Planck, M.: S.-B. Preuß. Akad., Juni 1899. Physikalische Abhandlungen und Vorträge Bd. I, Braunschweig 1958.

ROMP88 Rompe, R., H.-J. Treder: Elementarkonstanten und was sie bedeuten. Akademie-Verlag Berlin 1988.

SCHÖ86 Schönfeld, E.: Versuch einer Deutung des Zahlenwertes der Feinstrukturkonstante auf der Basis eines Teilchenmodells. Exp.Technik der Physik 34(1986)433.

SIMO90 Simonyi, K.: Kulturgeschichte der Physik. Urania Leipzig 1990.

SMIT88 Smit, D.-J.: String Theory and Algebraic Geometrie of Moduli Spaces. Comm. Math.Phys.114(1988)545.

WEIN93 Weinberg, S.: Der Traum von der Einheit des Universums. München 1993.

WEYL19 Weyl, H.: Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. Ann.Phys. 59(1919)129.

WILL95 Wills, J.M.: Kugelpackungen-Altes und Neues. DMV Mitteilungen 4(1995)21.