

Werner Ebeling

Entropie, Vorhersagbarkeit und nichtlineare Dynamik

Vortrag, gehalten im Plenum der Leibniz-Sozietät am 28. Oktober 1993*

I. Einleitung

Das Problem der Vorhersagbarkeit zukünftiger Ereignisse ist uralte. Wir erinnern nur an die Versuche der alten Ägypter, den Wasserstand des Nils vorherzusagen und an die Orakel der alten Griechen. Die Menschen benötigen eine Vorhersagen, um Ackerbau zu treiben, um Fruchtfolge und Züchtung zu planen, um Werkzeuge und Maschinen zu entwerfen, um Häuser zu konstruieren, Städte zu planen und Konflikte zu lösen.

Vorhersage ist auch ohne Wissenschaft möglich; wissenschaftliche Methoden erlauben es allerdings, genauere Aussagen zu machen und auch Grenzen aufzuzeigen. Wissenschaftliche Vorhersagen stützen sich auf Gesetze und Modelle. Als Beispiele nennen wir die Voraussagen über Fall- und Wurfbewegungen, die durch Galileis und Newtons Forschungen möglich wurden, und die Aussagen über den Wirkungsgrad von Kraftmaschinen, die sich auf Carnots und Clausius' Forschungen stützen.

Darüber hinaus ist Vorhersagbarkeit auch ein elementares menschliches Bedürfnis, das mit dem Streben nach Sicherheit und Absicherung der Zukunft zusammenhängt. Schließlich gibt es auch einen Zusammenhang zwischen Vorhersagbarkeit und ästhetischen Kriterien, wie als einer der ersten Forscher der Mathematiker Birkhoff herausarbeitete.

Gegenstand dieser Ausführungen ist nur eine einzige Facette des Problems der Vorhersagbarkeit, nämlich der Beitrag, den nichtlineare Dynamik und Theorie der Selbstorganisation dazu geleistet haben bzw. noch zu leisten vermögen. Insbesondere werden wir dabei auf das Entropiekonzept und seine Leistungsfähigkeit in Bezug auf das Problem der Vorhersagbarkeit eingehen. Dabei müssen wir uns auf die Grundgedanken beschränken und für weiterführende Studien auf die Spezialliteratur verweisen (Haken, 1981; Nicolis und Prigogine, 1987; Ebeling, 1989; Ebeling und Feistel, 1992, 1994; Prigogine und Nicolis, 1993; Ruelle, 1993; Lanus, 1994).

II. Entropie, Information und Unbestimmtheit

Der Entropie-Begriff stammt ursprünglich aus der Thermodynamik und wurde von Rudolf Clausius in der Mitte des vorigen Jahrhunderts entwickelt. Wir verfügen seither mit dem Entropie-Begriff über ein adäquates Maß für Chaos und Ordnung. Im Zuge der modernen Entwicklungen der Theorie der Selbstorgani-

sation und der Chaosforschung sowie der Informationstheorie hat der Entropiebegriff auch neue Dimensionen gewonnen, die auch das Problem der Vorhersage betreffen (Ebeling, Engel und Herzel, 1990; Ebeling und Feistel, 1994).

Der Begriff der Selbstorganisation läßt sich theoretisch auf verschiedenen Ebenen beschreiben. Auf jeder dieser Ebenen spielt die Entropie als ein allgemeines Ordnungsmaß eine wichtige Rolle (Ebeling und Feistel, 1982, 1994). Jeder der möglichen Beschreibungsebenen entspricht ein eigener charakteristischer Zustandsbegriff. Daraus leiten sich auch verschiedene Entropiebegriffe ab. In der Thermodynamik wird die Entropiedifferenz zwischen zwei Gleichgewichtszuständen nach Clausius über die reduzierten Wärmemengen definiert:

$$S(2) - S(1) = \int_1^2 d'Q/T \quad (1)$$

Hierbei ist der Übergang (1) \rightarrow (2) reversibel zu führen; $d'Q$ ist die bei der Temperatur T während dieses Überganges mit der Umgebung ausgetauschte Wärmemenge. Um die Entropie eines Nichtgleichgewichtszustandes zu definieren, kann ein reversibler Ersatzprozeß konstruiert werden, der vom Gleichgewicht zum gewünschten Zustand führt. Genauer ist in diesem Zusammenhang das von Muschik eingeführte Konzept des begleitenden Zustandes. Da die Entropie eine Zustandsgröße ist, deren Wert nicht vom Wege abhängt, kann die Entropieänderung für beliebige Wege (d.h. auch für den Ersatzprozeß oder begleitenden Prozeß) berechnet werden. Eine für die spontane Strukturbildung wichtige Klasse von Nichtgleichgewichtszuständen wird dadurch charakterisiert, daß in einem kleinen Volumenelement, welches immer noch makroskopisch viele Teilchen enthalten möge, die Gleichgewichtsrelationen zwischen den thermodynamischen Größen gültig sind und das makroskopische System sich lokal annähernd im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Diese Voraussetzung ist z.B. bei nichtlinearen chemischen Reaktionen und bei hydrodynamischen Strömungen häufig in guter Näherung erfüllt. Insbesondere Glandsdorff und Prigogine haben die thermodynamischen Eigenschaften dieser Klasse von Nichtgleichgewichtszuständen untersucht, die durch ein lokales Gleichgewicht charakterisiert sind. Soweit zunächst zum thermodynamischen Entropiebegriff.

Wir kommen nun zum Entropiebegriff auf der dynamisch-stochastischen Ebene. Wenn $p(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte für einen Satz von Ordnungsparametern x darstellt, so ist die Shannon-Entropie (H -Funktion) definiert durch

$$H = - \int dx p(x) \log p(x) \quad (2)$$

Für den Fall diskreter Variabler, die mit $i = 1, 2, \dots, s$ numeriert sind und denen die Wahrscheinlichkeiten p_i zugeordnet sind, ergibt sich die Shannon-Entropie

$$H = - \sum_{i=1}^s p_i \log p_i \quad (3)$$

Nach Ruelle (1993) ist die Entropie H die Menge von Zufall, die in dem System steckt. Bekanntlich bildet die Shannon-Entropie den wichtigsten Grundpfeiler der Informationstheorie.

Wir kommen nun zum Entropiebegriff in der statistischen Mechanik, den wir den genialen Arbeiten von Boltzmann, Planck und Gibbs verdanken. In der statistischen Mechanik ist die Entropie eines Makrozustandes nach Boltzmann und Planck als Logarithmus der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit bestimmt.

$$S = k \ln W \quad (4)$$

Die thermodynamische Wahrscheinlichkeit W erhält man, wenn man die Anzahl der Molekülkonfigurationen berechnet, die einem Makro-Zustand entsprechen. Betrachten wir nun mit Boltzmann ideale Gase, sie müssen nicht notwendig im thermodynamischen Gleichgewicht sein. Nach Boltzmann läßt sich die Entropie eines Systems aus N nicht miteinander wechselwirkenden Teilchen (ideale Systeme im äußeren Feld) durch die Einteilchenverteilungsfunktion $f(p, q, t)$ ausdrücken, die von den Koordinaten q und den Impulsen p abhängt.

$$S = - \int (dpdq / h^3) f(p, q, t) \ln f(p, q, t) \quad (5)$$

$$N = \int (dpdq / h^3) f(p, q, t) \quad (6)$$

wobei h die Plancksche Konstante ist.

Die Verallgemeinerung für wechselwirkende Systeme lautet nach Gibbs

$$S = -k \int dpdq \rho(p, q) \ln \rho(p, q) \quad (7)$$

mit ρ als Wahrscheinlichkeits-Verteilung im $6N$ -dimensionalen Phasenraum des Systems, über den die Integration in Gl. (7) läuft. Wie man erkennt, besteht eine enge Beziehung zwischen der Informationsentropie nach Shannon und der statistischen Entropie nach Gibbs, wenn der mikroskopische Phasenraum der N Moleküle als Beschreibungsraum gewählt wird. Sind f oder ρ Gleichgewichtsverteilungen, so führen statistischer und thermodynamischer Entropiebegriff zu äquivalenten Resultaten. So läßt sich z.B. aus der kanonischen Verteilung für ρ die Gibbs'sche Fundamentalgleichung herleiten. Die Gibbs'sche Entropie S enthält alle Effekte der zwischenmolekularen Wechselwirkung und ist der thermodynamischen Entropie des Gleichgewichtszustandes äquivalent. Die Berücksichtigung der Wechselwirkung senkt fast immer die Entropie ab; Gleichheit gilt für ideale Systeme, wenn ρ als Produkt von Einteilchenverteilungsfunktionen darstellbar ist. Der Unterschied zwischen der Boltzmann-Entropie (5) und der

Gibbs-Entropie (7) ist nicht vernachlässigbar, sobald die molekulare Wechselwirkung einen deutlichen Beitrag zu den thermodynamischen Eigenschaften liefert. Für den Fall von Systemen mit fixierter Energie reduziert sich die Gibbs-Entropie auf die berühmte Boltzmann-Planck-Formel (4), wobei W die Anzahl der gleichwahrscheinlichen makroskopischen Zustände ist.

Die Definition der Entropie in der statistischen Mechanik von Boltzmann, Planck und Gibbs ist sowohl auf das Gleichgewicht als auch auf das Nichtgleichgewicht anwendbar. Dazu sagte Max Planck 1908 in einem Vortrag an der Universität Leiden: *„Demnach ist die Entropie proportional dem Logarithmus der Wahrscheinlichkeit ($S = k \log W$). Dieser Satz eröffnet den Zugang zu einer neuen, über die Hilfsmittel der gewöhnlichen Thermodynamik weit hinausreichenden Methode, die Entropie eines Systems in einem gegebenen Zustand zu berechnen. Namentlich erstreckt sich hiernach die Definition der Entropie nicht allein auf Gleichgewichtszustände, wie sie in der gewöhnlichen Thermodynamik fast ausschließlich betrachtet werden, sondern ebensowohl auch auf beliebige dynamische Zustände, und man braucht zur Berechnung der Entropie nicht mehr wie bei Clausius einen reversiblen Prozeß auszuführen, dessen Realisierung stets mehr oder weniger zweifelhaft erscheint“*

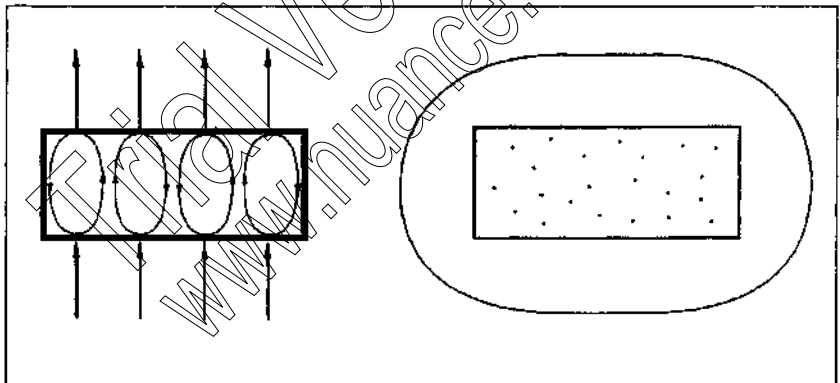


Abb. 1 Eine Nichtgleichgewichtsstruktur, hier z.B. eine Benard-Zelle wird zum Zeitpunkt $t=0$ von der Umgebung vollständig isoliert. Im Resultat steigt die Unordnung und demzufolge die Entropie an

Betrachtet man ein beliebiges Nichtgleichgewichtssystem (Abb. 1) und fixiert seine Energie durch absolute Isolation von der Umgebung, so wird seine Entropie $S(E, X, t)$ solange ansteigen, bis der Gleichgewichtswert $S_{eq}(E, X)$ erreicht wird. Gleichzeitig wird der Anteil des erfüllten Phasenvolumens in der Mikroschale anwachsen.

Nach Boltzmann ist das thermodynamische Gleichgewicht von allen Zuständen, die vorgegebenen Werten der makroskopischen Größen entsprechen, derjenige mit der größten Entropie bzw. dem geringsten Ordnungsgrad. In einem abge-

geschlossenen System mit fixierter Energie E wächst die Energie solange an, bis ein Maximum erreicht wird. Im folgenden wollen wir annehmen, der Parameter u sei ein Maß für den Abstand vom thermodynamischen Gleichgewicht. Betrachten wir beispielsweise eine Flüssigkeit, so kann u eine dimensionslose Größe von der Art der Reynoldszahl, der Taylorzahl usw. sein. Dem thermodynamischen Gleichgewicht ordnen wir den Wert $u = 0$ zu. Wird das System gezwungen, den Gleichgewichtszustand zu verlassen, so nimmt es für $u > 0$ zunächst stationäre Zustände auf dem sogenannten thermodynamischen Ast ein. Wird u weiter erhöht, so kann der thermodynamische Ast bei einem bestimmten kritischen Wert u_{cr} instabil werden. Neue stabile stationäre Zustände zweigen ab, die vom thermodynamischen Gleichgewicht durch die Instabilität bei $u = u_{cr}$ getrennt sind. Ihre Stabilität kann ebenfalls begrenzt sein, so daß bei hinreichend großen Werten von u weitere Instabilitäten folgen. Ein sehr eindrucksvolles Beispiel für dieses allgemeine Szenarium ist die Strömung einer Flüssigkeit um einen Brückenpfeiler in einem Flusse oder die Benard-Strömung in einer von unten erhitzten Flüssigkeit. Wird das System in einem stationären Nichtgleichgewichtszustand plötzlich von der Umgebung isoliert, so relaxiert es zum Gleichgewicht. Während des Relaxationsprozesses wächst die Entropie in Übereinstimmung mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik an.

Wir bezeichnen die Größe

$$\delta S = S_{eq}(E, X) - S(E, X, t) \quad (8)$$

als Entropie-Absenkung. Diese Differenz zwischen der Entropie des erreichten Gleichgewichtszustandes und der Entropie des Ausgangszustandes (in beiden Zuständen hat das System die gleiche Energie), definieren wir als Ordnungsgrad des betrachteten Nichtgleichgewichtszustandes. Die Idee, die auf eine bestimmte Energie bezogene Entropie als quantitatives Maß für die Strukturiertheit eines stationären Nichtgleichgewichtszustandes zu nutzen, liegt dem S-Theorem von Klimontovich zugrunde. Darunter verstehen wir die Aussage, daß die Entropieabsenkung um so größer ist, je weiter das System vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt ist. Wird der stationäre Nichtgleichgewichtszustand durch mehrere unabhängige äußere Parameter $u \in C^n$ bestimmt, so kann man sich $\delta S(u)$ als positiv definite Hyperfläche über dem Parameterraum C^n veranschaulichen. Im Fall der Poiseuille-Strömung einer Flüssigkeit in einem Rohr lautet die Aussage des S-Theorems, daß die Entropie der Flüssigkeit mit wachsender Reynoldszahl monoton fällt, wenn dabei die Energie konstant gehalten wird, indem man die Temperatur der Flüssigkeit entsprechend absenkt.

Wir kommen nun zum Zusammenhang von Entropie und Information. Wie wir bereits gesehen haben, entspricht die Entropie in der stochastischen Beschreibung der Informationsentropie. Nach Shannon (1948) heißt die mittlere Unbestimmtheit einer normierbaren Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$

$$H = M[\ln(1/p(\underline{x}))] = -\int d\underline{x} p(\underline{x}) \ln p(\underline{x}) \quad (9)$$

die Informationsentropie dieser Verteilung. Dabei definiert $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d)$ den Zustand des Systems bezüglich der zu beobachtenden Freiheitsgrade. Ist \underline{x} ein vollständiger Satz von Koordinaten und Impulsen der Teilchen eines makroskopischen Systems $\underline{x} = (q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$, dann gilt

$$S = k_B H \quad (10)$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist. Mit anderen Worten, die statistische Entropie des Makrozustandes entspricht der Information, die notwendig ist, um den Mikrozustand aufzuklären.

Die Informationsentropie steht in keinem direkten Zusammenhang zur statistischen Entropie, wenn die Zustandsvariablen \underline{x} nicht ein kompletter Satz mikroskopischer Variablen sind. Häufig werden die \underline{x} auf der Grundlage einer reduzierten Beschreibung konstruiert (Ordnungsparameter), wobei „irrelevante“ mikroskopische Freiheitsgrade eliminiert werden. Die Informationsentropie der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ordnungsparameter stellt nur einen Bruchteil der gesamten statistischen Entropie dar. Dennoch ist dieser Anteil für die Strukturbildung entscheidend, da dissipative Strukturen durch kollektive Moden charakterisiert werden. Selbstorganisation und Strukturbildung vollziehen sich auf makroskopischer Ebene und werden durch makroskopische Freiheitsgrade bestimmt.

Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen Entropie und Unkenntnis, wie insbesondere Jaynes (1979) herausgearbeitet hat. Jaynes' Theorie befaßt sich (zunächst außerhalb jeden physikalischen Bezuges) allgemein mit dem Problem des Schlußfolgerns auf der Basis unvollständiger Informationen. Die Relevanz dieser Methode für die Physik liegt darin, daß sie auch weitreichende physikalische Schlußfolgerungen zuläßt. Darüber hinaus existieren bereits fruchtbare Anwendungen in fast allen Gebieten der Wissenschaften. Der Zusammenhang zwischen Entropie und Information läßt sich dann nach Jaynes auch für eine Bestimmung unbekannter Wahrscheinlichkeitsverteilungen benutzen.

Während die Anwendbarkeit des Prinzips der maximalen Entropie in abgeschlossenen Systemen auf dem II. Hauptsatz der Thermodynamik basiert, ist die Situation für gepumpte Nichtgleichgewichtssysteme weniger klar. Außerdem muß betont werden, daß das Prinzip der maximalen Informations-Entropie die grundlegende Frage offen läßt, welche Beobachtungsgrößen im konkreten Falle zu wählen sind bzw. welche Nebenbedingungen anzuwenden sind. Die Fixierung der Energie verliert in gepumpten Systemen ihre dominierende Rolle als Nebenbedingung. Von Haken (1981) ist das Prinzip der maximalen Informationsentropie mit dem Ordnungsparameterkonzept und der Bifurkationstheorie

verknüpft worden, um die Willkür bei der Auswahl der Nebenbedingungen zu verringern. So läßt sich z.B. die Verteilungsfunktion für den Ein-Moden-Laser bestimmen, wenn als Nebenbedingungen die Korrelationsfunktionen der Intensität und der Intensitätsfluktuationen des emittierten Lichtes fixiert werden.

III. Entropie, makroskopisches Chaos und Vorhersagbarkeit

Die moderne Chaostheorie beruht auf der Einführung des neuen Konzeptes der Instabilität einer Bewegung gegenüber einer Variation der Anfangsbedingungen, wir sprechen auch von Divergenz der Bahnen. Dieses Konzept der Instabilität bzw. Divergenz der Bewegungen hängt wiederum mit einem weiteren Entropie-Begriff zusammen, der dynamischen-Entropie (Ruelle, 1993).

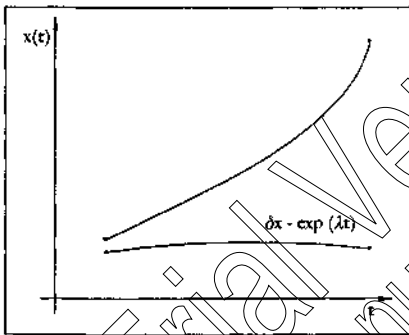


Abb. 2 Charakteristisch für chaotische Dynamik ist das exponentielle Auseinanderlaufen benachbarter Trajektorien. Der im Exponenten auftretende Faktor der Zeit heißt Lyapunov-Exponent.

Unter Instabilität verstehen wir die Eigenschaft bestimmter Systeme, daß benachbarte Bahnen auseinanderstreben. Das heißt, zwei anfänglich dicht benachbarte Trajektorien laufen in kurzer Zeit weit auseinander. Mit anderen Worten, eine kleine Variation der Anfangsbedingungen resultiert nach Durchlaufen eines kleinen Zeitintervalls zu großen Abweichungen (Abb. 2). Damit ist ein enger Zusammenhang von Chaos und Vorhersagbarkeit hergestellt worden. Chaotische Dynamik impliziert strikte Grenzen der Vorhersagbarkeit. Eine kleine Unsicherheit in der Kenntnis

der Anfangsbedingungen führt nach kurzer Zeit zu weitgehender Unkenntnis des tatsächlichen Zustandes des Systems. Für instabile (stochastische) Gebiete des Phasenraumes wächst die Abweichung zweier ursprünglich dicht benachbarter Trajektorien exponentiell mit der Größe des Zeitintervalls an. Solche Systeme bezeichnet man heute als chaotisch. Die Instabilität der mechanischen Bewegungen ist nach dem heutigen Verständnis die Ursache für den unregelmäßigen Charakter der molekularen Bewegungen in Gasen und makroskopischen Körpern. Es existiert ein quantitatives Maß für das Auseinanderstreben von Trajektorien, welches man den Lyapunov-Exponenten nennt. Im engen Zusammenhang mit den Lyapunov-Exponenten steht die sogenannte Kolmogorov-Entropie. Diese Größe, deren strenge Definition wir hier nicht geben können, ist unter recht allgemeinen Voraussetzungen gleich der Summe der positiven Lyapunov-Exponenten einer Bewegung. Auch Kolmogorov war wie Lyapunov

ein russischer Mathematiker; er hat die neueren Entwicklungen noch wesentlich mit geprägt bevor er vor einigen Jahren verstarb. Wichtige Erkenntnisse resultierten aus numerischen Lösungen der Newtonschen Gleichungen für Vielteilchensysteme mit Hilfe moderner Computer. Zum Beispiel haben Orban und Bellemans die Dynamik von 100 Scheiben, welche den Newtonschen Gleichungen und den Gesetzen des elastischen Stoßes folgen, studiert. Als Anfangsbedingungen wurden zufällige Positionen und zufällig orientierte Geschwindigkeiten der 100 Scheiben vorgegeben. Orban und Bellemans berechneten mit diesen Annahmen die Trajektorien aller Teilchen und bestimmten mit deren Hilfe schließlich die Boltzmannsche H-Funktion, d.h. die Entropie. Sie beobachteten, daß die H-Funktion (die negative Entropie) monoton abnimmt.

Warum wird eigentlich Entropie von allein immer größer und niemals kleiner? Die Boltzmannsche Interpretation, der sich Ruelle (1993) anschließt lautet: Anfangszustände, die nicht dem thermodynamischen Gleichgewicht entsprechen, sind sehr unwahrscheinlich. Sie entsprechen nur einem relativ kleinen Volumen im Phasenraum, einer geringen Menge von Zufall. Die Zeitentwicklung führt das System aufgrund der Instabilität der Bewegung in immer größere Volumina des Phasenraumes. Diese Tendenz entspricht dem Übergang zu wahrscheinlicheren Zuständen. Im Prinzip könnte (bei Reversibilität der mikroskopischen Gleichungen) eine Rückkehr zum Ausgangszustand erfolgen. Da die erforderlichen Zeiten aber größer als das Alter der Metagalaxis sind, ist diese Rückkehr nur mathematisch möglich. Unser Kosmos hat einen Zeitsinn, welcher dem 2. Hauptsatz entspricht.

Auch 100 Jahre nach Boltzmanns Arbeiten bleiben allerdings noch viele wichtige Fragen offen, so daß eine endgültige Lösung des Entropie-Problems noch aussteht. Insbesondere dürfte die Einbeziehung der kosmologischen Aspekte unverzichtbar sein. Eines ist jedoch heute schon sicher, die eigentliche Wurzel für die makroskopische Gerichtetheit ist die Instabilität, die Divergenz der mikroskopischen Bewegungen, d.h. das mikroskopische Chaos (Prigogine und Stengers, 1993). Der chaotische Charakter der mikroskopischen Bewegung von Vielteilchensystemen führt zu einer neuen Qualität, der makroskopischen Irreversibilität. Der Übergang zur Nichtumkehrbarkeit der Bewegungen ist wiederum entscheidende Voraussetzung für das Entropiewachstum.

Einen entscheidenden Fortschritt in bezug auf eine quantitative Beschreibung der Vorsagbarkeit verdanken wir der Methode der symbolischen Dynamik. Diese Methode beruht darauf, daß der Zustandsraum in diskrete Zellen eingeteilt wird, wobei jede dieser Zellen durch einen besonderen Buchstaben charakterisiert wird. Die Menge aller Buchstaben, die verwendet werden, bildet das Alphabet des betreffenden Prozesses. Verfolgt man eine Trajektorie und notiert in bestimmten Zeitabständen dt jeweils den Buchstaben, der zu der gerade durchlaufenen Zelle gehört, so ergibt sich eine Buchstabenfolge, eine Sequenz, welche

den betrachteten Prozeß in einer bestimmten Näherung charakterisiert. Das Problem der Vorhersage reduziert sich auf die Bestimmung der Buchstabenfolge, welche der Zukunft entsprechen. Die Einführung von Buchstabenfolgen ist in bestimmter Hinsicht ein Trick, der es uns gestattet, den Shannonschen Entropie-Begriff auf Trajektorien zu übertragen.

Nehmen wir an, daß

$$A_1 A_2, \dots, A_\lambda$$

unser dynamisches Alphabet, bestehend aus λ Buchstaben darstellt. Zum Beispiel könnte A, C, G, T für ein dynamisches Alphabet stehen, das nur verzeichnet, in welchem Quadranten die Trajektorie liegt. Unsere zu betrachtende Sequenz stellen wir uns als eine endliche oder unendliche Folge dieser Buchstaben vor. Eine bestimmte Teilsequenz der Länge n , die vorkommt, sei

$$A_1, A_2, \dots, A_n \quad A_i \in \{A_1, A_2, \dots, A_\lambda\}$$

Wir nennen sie nach Grassberger einen Block. Weiterhin sei vorausgesetzt, daß

$$p^{(n)}(A_1 \dots A_n)$$

die Wahrscheinlichkeit ist, in der Gesamtsequenz den Block $A_1 \dots A_n$ zu finden.

Wir definieren dann folgende Größen:

- 1) Die Entropie per Block der Länge n (Blockentropie):

$$H_n = - \sum p^{(n)}(A_1 \dots A_n) \log p^{(n)}(A_1 \dots A_n). \quad (11)$$

Die Blockentropie bezeichnet die mittlere Unbestimmtheit von n -Blöcken

$$H_n = \langle \log(1 / p^{(n)}(A_1 \dots A_n)) \rangle. \quad (12)$$

- 2) Die Entropie per Buchstabe eines n -Blockes:

$$H^{(n)} = H_n / n \quad (13)$$

- 3) Die bedingte Entropie als Ungewißheit des Buchstabens, der auf einen n -Block folgt:

$$h_n = H_{n+1} - H_n \quad \text{wenn } n \geq 1 \quad (14)$$

$$h_0 = H_1$$

Wir bezeichnen die Größe h_n als die dynamische Entropie n -ter Ordnung.

- 4) Die Entropie der Quelle nach Shannon, Khinchin und Mc Millan (Grenzwert der dynamischen Entropie):

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n / n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n \quad (15)$$

Letztere Größe ist das diskrete Analogon der Kolmogorov-Sinai Entropie dynamischer Systeme, die wir weiter oben eingeführt haben. Für Bernoulli-Prozesse gilt

$$h_1 = h_2 = \dots = h_n = h = \log \lambda$$

Das heißt, die Ungewißheit ist immer gleich und kann durch Beobachtung eines Blockes nicht reduziert werden. Für Markov-Prozesse erster Ordnung fällt die bedingte Entropie nur beim ersten Schritt. Es gilt also

$$h_0 > h_1 = h_n = h.$$

Für Markov-Prozesse m -ter Ordnung gilt

$$h = h_n = h_m \text{ wenn } n \geq m. \quad (16)$$

Von speziellem Interesse sind Prozesse mit langreichweitigem Gedächtnis, die einer weitreichenden Korrelation in den Sequenzen entsprechen. Mc Millan und Khinchin haben für ergodische Prozesse nachgewiesen, daß

$$H_{n+1} \geq H_n, \quad H^{(n+1)} \leq H^{(n)} \quad (17)$$

gilt und daß der Grenzwert in Gl. (15) existiert (Khinchin, 1957). In früheren Arbeiten wurde die Hypothese aufgestellt, daß für eine sehr allgemeine Klasse von Sequenzen folgende Asymptotik gilt (Ebeling und Nicolis, 1991, 1992)

$$H_n = nb + gn^{\mu_0} (\log n)^{\mu_1} + e \quad (18)$$

wobei

$$0 \leq \mu_0 < 1 \text{ oder } \mu_0 = 1, \quad \mu_1 < 0 \quad (19)$$

angenommen wird. In allen Fällen wo $g \neq 0$ gilt, liegt weitreichende Ordnung vor. Von besonderem Interesse ist der Fall

$$g > 0, \quad h = 0 \text{ oder } h \ll 1 \quad (20)$$

Die Asymptotik ist dann

$$H_n = gn^{\mu_0} (\log n)^{\mu_1} + e + nh \quad (21)$$

$$H^{(n)} = gn^{\mu_0-1} (\log n)^{\mu_1} + e/n + h \quad (22)$$

Die Blockentropie zeigt dann lange Korrelationen. Spezielle Fälle sind logarithmische Gesetze

$$H_n = g(\log n) + e \quad (23)$$

und Potenzgesetz

$$H = gn^{h_0} + e, \quad \mu_0 < 1 \quad (24)$$

IV. Entropie, Komplexität und Vorhersagbarkeit von Sequenzen

Als komplex bezeichnen wir ganzheitliche Systeme, die aus vielen Teilen zusammengesetzt sind. Der Komplexitätsbegriff spielt heute eine zentrale Rolle bei der Beschreibung hochorganisierter Systeme, obwohl es für ihn bisher keine einheitliche Definition gibt. Wir vertreten die Auffassung, daß die verschiedenen Komplexitätsdefinitionen nur einzelne Seiten des Komplexitätsbegriffes umfassen. Als Eckpfeiler betrachten wir einerseits die Verbindung mit der Länge von Beschreibungen und andererseits die Verknüpfung mit der Anzahl von Möglichkeiten. Wir beschränken uns hier auf diesen Aspekt von Komplexität und schränken uns auf die Betrachtung linearer Strukturen (Sequenzen) ein.

Als Sequenzen bezeichnet man Folgen von Buchstaben. Ein DNA-Molekül ist in diesem Sinne eine Sequenz von Nukleosid-Buchstaben A, C, G und T. Eine Zahl ist eine Folge von Buchstaben über dem Alphabet 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ein deutscher Text ist eine Sequenz von Buchstaben des lateinisch-deutschen Alphabets. Computer-Programme sind Sequenzen über dem binären Alphabet, bestehend aus 0 und 1. In ähnlicher Weise werden in der modernen digitalen Technik auch Telefongespräche, Musikstücke und viele andere Informationen als binäre Sequenzen verschlüsselt. Die lineare Kodierung ist in Natur und Technik zwar nicht die einzige, aber wohl doch die zentrale Methode der Verschlüsselung von Informationen. Die Diskussion der Entropie und Komplexität von Sequenzen ist somit kein Randproblem, sondern eine Schlüsselfrage für unser Thema.

Für das Thema dieser Untersuchung ist von zentraler Bedeutung, daß über die Methode der symbolischen Dynamik, Sequenzen auch eine sehr enge Beziehung zur Dynamik von Prozessen erlangt haben. Wie wir zeigten, kann man die Trajektorie von Prozessen auch als Folgen von Buchstaben darstellen. Die Buchstaben sind dabei symbolische Bezeichnungen der diskretisierten Zustände. Umgekehrt können Sequenzen von Buchstaben über einem Alphabet A_1, \dots, A_λ auch immer als Prozeß in einem Zustandsraum mit λ Zuständen interpretiert werden. Somit besteht eine sehr enge Beziehung zwischen Sequenzen und Dynamik. Der dynamische Standpunkt, der auf Shannon zurückgeht, soll auch dieser Diskussion zugrunde gelegt werden.

Zwischen dem Charakter eines Prozesses und dem Ordnungs- bzw. Korrelationszustand der zugeordneten Sequenzen bestehen enge Beziehungen. So entsprechen Bernoulli-Prozesse einer ganz unkorrelierten (chaotischen) Buchstabenfolge, periodische Prozesse dagegen korrespondieren zu geordneten

(periodischen) Buchstabenfolgen. Markov-Prozesse erzeugen Sequenzen mit einer kurzreichweitigen Teilordnung. Wie wir zeigen werden, existiert auf der Grenze zwischen Ordnung und Chaos der Fall einer ausgeprägten langreichweitigen Ordnung. Wir gehen nun systematisch daran, die im vorigen Abschnitt entwickelten Begriffe auf Sequenzen zu übertragen.

Unsere Arbeitshypothese besteht darin, daß informationstragende Sequenzen in vielen Fällen Korrelationen mit weitreichendem Charakter zeigen. Für die zugeordneten Prozesse entspricht das einem Gedächtnis sehr langer Reichweite. Um den Nachweis solcher Korrelationen bzw. Gedächtniseffekte zu führen, ist eine Entropieanalyse unter spezieller Berücksichtigung der Asymptotik für große n erforderlich.

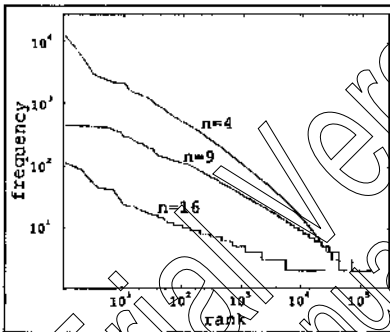


Abb. 3 Die rang-geordneten relative Häufigkeiten von Wörtern der Länge 4, 9 und 16 für den Roman „Moby Dick“ von Herman Melville

Bestimmte Sequenzen, die uns vorliegen, haben praktisch immer eine endliche Länge wie die menschliche DNA, ein Telegramm oder ein Buch. Aus diesem Grunde ist die Entropieanalyse von Sequenzen endlicher Länge von Bedeutung. Seit Shannons berühmter Arbeit über die Entropie gedruckter englischer Texte (Shannon, 1951) gehört die Entropieanalyse zu den Standardverfahren der angewandten Informatik (Jaglom und Jaglom, 1984).

Für die Berechnung der Entropien n -ter Ordnung benötigen wir die Wahrscheinlichkeiten aller möglicher n -Blöcke; insgesamt gibt es λ^n verschiedene Blöcke (Wörter).

Steht für die Analyse eine Sequenz der Länge L zur Verfügung, können die Wahrscheinlichkeiten nur aus den ausgezählten relativen Häufigkeiten geschätzt werden. Für kleine Blöcke, die der Bedingung

$$\lambda^n \gg L$$

genügen, wirft diese Schätzung keine ernstern Probleme auf. Shannons Pionierarbeit folgte eine ganze Reihe von Untersuchungen von Texten in verschiedenen Sprachen sowie auch von Musikstücken (Jaglom und Jaglom, 1984). Die Existenz weitreichender Korrelationen in Texten mindestens bis zur Ordnung $n = 100$ darf heute als (fast) sicher gelten. Ob es für $n > 100$ zu einer Sättigung (Verschwinden der Korrelationen) kommt, wie z.B. Burton und Licklider vermuten, ist noch unklar. Einige Autoren, darunter Hilberg (1990) sowie der

Verfasser mit Nicolis (1992) und Pöschel (1994) schließen auf Grund ihrer Analysen auf einen langsamen Abfall der Korrelationen in Texten nach einem Wurzelgesetz

$$H^{(n)} \approx \beta / \sqrt{n} \quad (25)$$

Seit den 70er Jahren wurden Entropie-Untersuchungen auch auf die Struktur von Biosequenzen ausgedehnt. Als ein wesentliches Resultat dieser Untersuchungen darf man betrachten, daß die Struktur von Biosequenzen der von Markov-Prozessen höherer Ordnung ähnelt (Ebeling und Feistel, 1982; Herzel et al., 1994). Die genaue Ordnung dieser Prozesse steht heute noch nicht fest. Sowohl Gatlins Analyse als auch neuere Untersuchungen (Herzel et al., 1994) deuten darauf hin, daß die Ordnung größer als oder gleich 6 ist. Wir diskutieren nun einige methodische Fragen, die mit der Schätzung der Wahrscheinlichkeiten bzw. der Entropie verbunden sind. Nehmen wir zunächst an, daß ein Ensemble von N Wörtern zur Verfügung steht, von denen N_1 zur Sorte 1, N_2 zur Sorte 2 usw. gehören. Sind $\langle N_n \rangle$ die entsprechenden Mittelwerte, so sind die mittleren relativen Häufigkeiten

$$q_n = \langle N_n \rangle / N \quad (26)$$

die beste Schätzung für die Wahrscheinlichkeiten im Sinne der im 2. Kapitel besprochenen Entropiemaximierung. In Abb. 3 wurden die relativen Häufigkeiten für Wörter der Längen 3, 9 und 16 aus einem englischen Text dargestellt. Dabei wurde eine Darstellung nach Pareto und Zipf entsprechend abfallender Häufigkeit gewählt. Man erkennt, daß die häufig verwandte Approximation durch Potenzgesetze für Wörter fester Länge nicht brauchbar ist. Man sieht weiter, daß mit zunehmender Wortlänge die Verteilung immer flacher wird und sich der Form einer einfachen Stufe nähert. Der mathematische Hintergrund für diese sogenannte E-Eigenschaft ist ein von McMillan und Khinchin für ergodische Prozesse bewiesenes Theorem.

Für die Berechnung der Entropie benötigen wir die Größe $p^{(n)} \log p^{(n)}$; man muß daher diese Größe anhand der Mittelwerte

$$\langle (N_n / N) \log (N_n / N) \rangle$$

schätzen. Im Grenzfall $\lambda^n \gg L$ kann jedes Wort nur einmal auftreten, es muß daher gelten

$$\langle (N_n / N) \log (N_n / N) \rangle \approx (\log N) / N \quad (27)$$

Im entgegengesetzten Grenzfall gilt nach Herzel et al. (1994) die Abschätzung

$$\langle (N_n / N) \log(N_n / N) \rangle \approx p^{(n)} \log p^{(n)} - 1 / 2N \quad (28)$$

Wir benutzen nun das oben schon erwähnte *E*-Theorem vom McMillan and Khinchin. Es besagt, daß für genügend großes n die Menge der n -Wörter in zwei Klassen fällt:

- 1) Die Klasse der Standard-Wörter, welche häufig auftreten. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für Wörter dieser Klasse ist nahezu eins. In dieser Klasse mögen M verschiedene Wörter liegen. Sie sind nach McMillan und Khinchin nahezu gleich häufig und ihre Wahrscheinlichkeit ist näherungsweise $1 / M$.
- 2) Die Klasse der Nicht-Standard-Wörter, welche sehr selten auftreten. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten dieser Wörter ist nahezu Null. Die grafische Darstellung dieser Eigenschaft entspricht der sich in Abb. 3 andeutenden Formation einer Stufenverteilung der Häufigkeiten. Die Zahl der Standard-Wörter hängt mit der Entropie zusammen und ist durch

$$M = \lambda^{H_n} \quad (29)$$

gegeben.

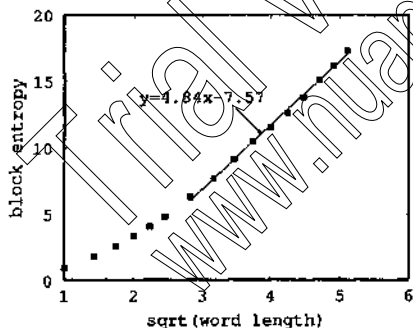


Abb. 4 Die Blockentropie für den Roman „Moby Dick“, der mit einem 3-er Alphabet kodiert wurde.

Die gewonnenen Beziehungen für die Grenzfälle lassen sich durch einfache Interpolationsformeln verknüpfen. Man kann diese Formel zur Berechnung des Grenzwertes H verwenden, indem man jeweils eine Schätzung einsetzt und iterativ den empirischen Mittelwert aus Folgen der Länge N immer besser approximiert. Dabei ist es von Vorteil, einen möglichst umfangreichen Satz empirischer Daten für Sequenzen verschiedener Länge (aber aus demselben Text stammend) simultan

anzupassen. Diese Anpassung kann auf verschiedenen Wegen erfolgen (Ebeling und Nicolis, 1992; Ebeling et al., 1994). Zum Kodieren haben wir einmal das normale Alphabet ohne Unterscheidung von Groß- und Kleinbuchstaben ($\lambda = 32$) und einmal ein verkürztes Alphabet, das nur Vokale, Konsonanten und sonstige Zeichen unterscheidet ($\lambda = 3$) benutzt. Auf diesem Wege wurden z.B. folgende Resultate für Texte gefunden (in $\log \lambda$ -Einheiten):

$$\lambda = 3: H_n / \log 3 = 4.84\sqrt{n} - 7.57 + nb \quad (30)$$

$$\lambda = 32: H_n / \log 32 = 0.9\sqrt{n} + 1.7 + nb \quad (31)$$

mit $b \sim 0.01 - 0.1$.

Eine graphische Darstellung des Wachstums der Entropie von Texten wurde in Abb. 4 gegeben. Man sieht, daß die Beschreibung durch ein Wurzelgesetz recht gut ist.

Für klassische Musik (Sonate 31/2 von L. v. Beethoven), die auf einem Dreier-Alphabet kodiert wurde (Auf, Ab, sonstige Zeichen) wurde ein ganz anderes Verhalten gefunden (Ebeling et al., 1994)

$$\lambda = 3 \quad H_n / \log 3 = 2(\log_3 n + 1) \quad (32)$$

Daraus ergibt sich, daß Musik offensichtlich eine geringere Variabilität als Texte besitzt, es gibt wesentlich weniger verschiedene Worte. Musik hat demzufolge einen höheren Grad von Ordnung als sprachliche Texte. Es muß allerdings gesagt werden, daß diese Untersuchungen noch ganz am Anfang stehen, so daß systematische Aussagen über lange Korrelationen vorläufig noch nicht möglich sind.

Das zentrale Anliegen unserer Untersuchung bestand darin, die Rolle der Entropie für die Charakterisierung von Chaos und Ordnung herauszuarbeiten. Dabei sind wir der Hypothese gefolgt, daß die Klasse der Prozesse, die auf der Grenze zwischen Chaos und Regularität liegt, von besonderem Interesse ist. Um diese These zu beleuchten, haben wir im Detail Texte und Notenfolgen untersucht und hier in der Tat Hinweise auf die Existenz langer Korrelationen gefunden. Es sei erwähnt, daß sich lange Korrelationen auch in den Spektren der Sequenzen widerspiegeln (Schroeder, 1991).

Noch sehr viel schwieriger als die Analyse von Texten oder Musikstücken ist die Untersuchung von Biopolymeren (Herzel et al., 1994). Wie allgemein bekannt ist, spielen Biopolymere eine zentrale Rolle für alle Lebensprozesse. Von besonderer Bedeutung sind dabei die Polynukleotide RNA, DNA und die Proteine. Formal handelt es sich bei diesen Molekülen ebenfalls um Texte über einem Alphabet mit $\lambda = 4$ bzw. $\lambda = 20$ Buchstaben. Es gibt nun

$$N_n = \lambda^n \quad (33)$$

verschiedene Möglichkeiten der Generierung von Sequenzen der Länge n . Wie man sieht, wächst die mögliche Anzahl von Biosequenzen exponentiell mit der Länge an, und diese Zahl ist für $n > 100$ so groß, daß es in der Natur keine Chance für die Realisierung aller Möglichkeiten gibt. Die real vorkommenden DNA-, RNA- und Proteinssequenzen müssen somit ebenso wie sprachliche und musikalische Texte das Resultat einer außerordentlich scharfen Selektion sein. Selektion bedeutet formal, daß die Wörter der Länge n nicht mehr alle mit glei-

cher Wahrscheinlichkeit vorkommen. Nach dem E-Theorem von McMillan und Khinchin wird die Anzahl der häufigen Wörter durch die Entropie bestimmt, und es gilt

$$N_n^* = \lambda^{H_n} \quad (34)$$

Mit den obigen Resultaten für H_n für Texte folgt somit

$$N_n^* = C \lambda^{h \cdot n^2} \cdot g^{\sqrt{n}} \quad (35)$$

Das ist ein sogenanntes *gestrecktes exponentielles Wachstumsgesetz*. Es wird gestreckt genannt, weil das Wachstum viel langsamer erfolgt, als es einem normalen Exponentialgesetz entsprechen würde. Für den Fall von Musik-Strücken (kodierte als Notenfolgen) wächst die Zahl der verschiedenen Worte (Motive) wesentlich langsamer mit der Wortlänge an. Es gilt nämlich nach (29) und (31)

$$N_n^* = C \cdot n^2 \cdot \lambda^{h \cdot n} \quad (36)$$

Unter der Voraussetzung, daß $h \ll 1$ gilt, folgt in beiden Fällen

$$N_n^* \ll \lambda^n \quad (37)$$

Mit anderen Worten, beim Schreiben von Texten oder Musikstücken wird nur ein sehr geringer Teil der kombinatorisch möglichen Fälle ausgeschöpft. Es findet eine sehr scharfe Selektion unter den kombinatorischen Möglichkeiten statt.

Die Entropie erweist sich als ein allgemeines Maß für die Schärfe der Selektion, die zur Auswahl von informationstragenden Sequenzen geführt hat. Der genaue Wert von der Entropie der Quelle h ist heute noch nicht bekannt. Für Texte und Musikstücke haben wir geschätzt, daß er bei 1 - 10 % des maximal möglichen Wertes liegt.

Für die deutsche Sprache hat Küpfmüller bereits 1954 den Wert der Entropie geschätzt zu

$$h \approx 1,3 \text{ bit} \quad (38)$$

Nach Hilbergs Untersuchungen, die durch unsere eigenen Befunde bestätigt werden, ist ein viel kleinerer Wert $h \approx 0,2 - 0,5 \text{ bit}$ in Verbindung mit einem sehr schwachen Abklingen nach einem Wurzelgesetz wahrscheinlicher. Durch die Potenzgesetze (30-31) wird die Existenz von Korrelationen auf allen Skalen ausgedrückt (Schroeder, 1991).

Auch über die Entropie von Musik sind heute noch keine endgültigen Aussagen möglich (Jaglom und Jaglom, 1984). Wir erinnern daran, daß Musik von uns formal als eindimensionale Notenfolge aufgefasst wurde. Diese Annahme ist natürlich eine extreme Vereinfachung, die aber für das hier untersuchte Problem der Existenz sehr weitreichender Korrelationen nicht von essentieller Bedeutung

sein sollte. In den klassischen Untersuchungen von Pinkerton (1956) wurde Musik aus einem Kinderliederbuch auf eine Folge von 7 Noten aus einer einzigen Oktave (do, re, mi, fa, sol, la, si) und dem Zeichen „O“ für „Halten der Note“ abgebildet. Der musikalische Text wurde als Folge von Achtelnoten geschrieben. In unserer Untersuchung wurde eine Beethoven-sonate ebenfalls als Folge von Achtelnoten kodiert. Dabei wurde zunächst ein stark reduziertes Alphabet mit nur 3 Buchstaben (Auf, Ab und Halten bzw. Pause) und später auch ein Alphabet mit 32 Buchstaben (2 ½ Oktaven, Pause und Halten eines Tones) benutzt. Die in den Gleichungen (32) und (36) zusammengefassten Resultate lassen den Schluß auf weitreichende Korrelationen auch in Tonfolgen zu. In anderen Worten, auch Musik (zumindest gute Musik) ist auf der Grenze zwischen Chaos und Ordnung angesiedelt.

Wenn die oben dargestellten Schlußfolgerungen über die Struktur von Texten und Musikstücken zutreffen sollten, so kann darin eine Bestätigung für Birkhoff's Theorie ästhetischer Werte gesehen werden. Nach Birkhoff ist ein Kunstwerk nur dann schön und interessant, wenn es weder zu regulär und vorhersagbar noch zu sehr mit Überraschungen gespickt ist (Schroeder, 1991).

Für Biosequenzen ist unsere Kenntnis noch weit geringer als für Texte oder Musikstücke. Wir wissen nur, daß Biosequenzen eine außerordentlich verwickelte Struktur haben (Eigen, 1987; Herzel et al., 1994). Wir konnten zeigen, daß die spezifischen Entropien für Polynukleotide mindestens bis zur 5. oder 6. Ordnung fallen (Herzel et al., 1994). Gattin hat 1972 für die DNA der Kaninchen-Leber einen Wert

$$h \approx 1,94 \text{ bit} \quad (39)$$

geschätzt. Wir glauben aber, daß exakte Untersuchungen, die weitreichende Korrelationen erfassen, zu noch kleineren Werten führen werden.

V. Zusammenfassung

Zusammenfassend darf konstatiert werden, daß die Größe Entropie nicht nur eine zentrale Größe der Physik ist, sondern daß sie auch von großer Bedeutung für die Aufklärung der Struktur informationstragender Sequenzen ist. Schließlich dürfen wir feststellen, daß Entropie ein Eckpfeiler für die quantitative Erfassung von Vorhersagbarkeit zukünftiger Ereignisse ist. Wir können folgende Standardfälle bezüglich der Vorhersagbarkeit unterscheiden:

- a) Periodische oder deterministisch stabile Prozesse erlauben eine im Prinzip beliebig genaue Vorhersage der zukünftigen Trajektorie.
- b) Deterministisch instabile Prozesse (chaotische Prozesse sowie stochastische Vorgänge, erlauben nur Vorhersagen mit beschränkter Genauigkeit. Die

wachsende Unsicherheit der Vorhersagen zeigt eine (durch die endliche dynamische Entropie beschriebene) Sättigung, die in einem rasch abklingenden Übergang erreicht wird.

- c) Zwischen den Grenzfällen a) und b) liegt eine Klasse von Prozessen mit beschränkter Vorhersagbarkeit, die ein langes Gedächtnis und historisches Verhalten zeigen. Die dynamische Entropie dieser Prozesse nähert sich langsam abklingend dem Grenzwert, der klein oder eventuell sogar Null ist. Die Erforschung der Geschichte dieser Prozesse verbessert die Prognose-Chancen. Dieser Fall ist typisch für reale komplexe Prozesse.

Literatur

- Ebeling, W., Chaos, Ordnung und Information, Urania-Verlag Leipzig und Verlag H. Deutsch, Frankfurt a.M. 1989
- Ebeling, W. & R. Feistel, Physik der Selbstorganisation und Evolution, Akademie-Verlag Berlin 1982, 1986
- Ebeling, W., Engel, H. und H. Herzel, Selbstorganisation in der Zeit, Akademie-Verlag Berlin 1990
- Ebeling, W. und R. Feistel, Chaos und Kosmos, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford 1994
- Haken, H., Erfolgsgeheimnisse der Natur, Dt. Verlagsanstalt Stuttgart 1981
- Herzel, H., Schmitt, A.O. & W. Ebeling, Finite Sample Effects in Sequence Analysis, Chaos, Solitons & Fractals 4(1994)97
- Jaglom, A.M. und I.M. Jaglom, Wahrscheinlichkeit und Information. Verlag d. Wiss. Berlin 1984
- Lanius, K., Natur im Wandel, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford 1994
- Nicolis, G. & I. Prigogine, Die Erforschung des Komplexen, Piper-Verlag München-Zürich 1987
- Prigogine, I. & I. Stengers, Das Paradox der Zeit, Piper-Verlag München-Zürich 1993
- Ruelle, D., Zufall und Chaos, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1993

* Mit freundlicher Genehmigung des Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg/Berlin/Oxford wurden Abbildungen und Teile des Textes dieses Vortrages dem Buch W. Ebeling/R. Feistel: „Chaos und Kosmos. Prinzipien der Evolution“, 1994, entnommen.