Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin *101(2009), 135–148*

Horst-Heino von Borzeszkowski

Relativität und Quanten: Hans-Jürgen Treders Ideen zur Einheit der Physik

Vortrag auf der Sitzung der Klasse für Naturwissenschaften am 13. November 2008

Hans-Jürgen Treder zu ehren ist mir Verpflichtung und Bedürfnis, hat er doch meinen beruflichen Werdegang über viereinhalb Jahrzehnte hinweg maßgeblich bestimmt. Er war mein Lehrer, mein Förderer, jahrzehntelang mein Institutsdirektor, und ich hatte zudem das Glück, immer wieder sein Koautor sein zu dürfen. Diese Zusammenarbeit wurde auch durch den politischen Umbruch von 1989 nicht beendet. Im Gegenteil, sie wurde noch intensiver – galt es doch, gerade in der damit anbrechenden Zeit, die wissenschaftliche Arbeit konsequent fortzusetzen.

Die hier bemühte Erinnerung an die gemeinsame wissenschaftliche Arbeit ist es, die mich ermutigt, etwas über Hans-Jürgen Treders An- und Einsichten vorzutragen. Bei der Fülle der Trederschen Interessen und Arbeiten zur Mathematik, Einheitlichen Feldtheorie, Relativitäts- und Quantentheorie, Kosmologie, Astronomie, Wissenschaftsgeschichte und Philosophie ist es natürlich nötig, sich auf einen Aspekt seiner Arbeit zu beschränken. Hier soll der physikalische Themenkomplex ausgewählt werden, der dem Verhältnis von Quanten- und Relativitätstheorie gewidmet ist. Diese Auswahl bietet sich deshalb an, weil Treder zu diesem Problemkreis seit Beginn seiner wissenschaftlichen Laufbahn gearbeitet hat und noch wenige Monate vor seinem Tod einen Artikel in den *Foundations of Physics* publizierte, in dem seine diesbezüglichen abschließenden Ansichten zusammengefaßt sind. Diese Ansichten sollen im folgenden dargestellt werden, wobei es sich zum besseren Verständnis derselben empfiehlt, sowohl zeitlich als auch thematisch etwas weiter auszuholen.

Geometrodynamik oder „orthodoxe“ Quantenfeldtheorie?

Grundlegend für das im folgenden Darzustellende ist Treders Verständnis des Verhältnisses von Mathematik und Physik, über das er immer wieder nachgedacht hat. Neben seinem philosophischen Interesse an dieser Frage veranlaßte ihn sein Hauptarbeitsgebiet, die Allgemeine Relativitätstheorie, dazu, da in ihr eine einzigartig enge Verflechtung von Physik (in Gestalt der Gravitationstheorie) und Mathematik (in Gestalt der Geometrie) gegeben ist. Besonders stimulierend waren dabei die Diskussionen mit den Mathematikerkollegen in seiner Zeit als Direktor an einem Institut für reine Mathematik und später als Akademiemitglied in den entsprechenden Gremien (s. dazu z.B. seinen Beitrag in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie)[1]. In diesen Diskussionen brachte er vor allem die Denkweisen Einsteins, Plancks, Schrödingers und Bohrs zur Geltung und machte sie für die Lösung aktueller Probleme fruchtbar. Da Treder in dieser Tradition des Denkens stand, ist es sinnvoll, im folgenden von Überlegungen auszugehen, die Einsteins Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie und die nachfolgenden Versuche einer Verallgemeinerung dieser Theorie bestimmten.

Aufgrund des Einsteinschen Äquivalenzprinzips wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Geometrie der Raum-Zeit mit dem Gravitationspotential lokal identifiziert. Damit ist das metrische Feld $g_{ik}(x^l)$, also eine Größe, welche die Geometrie der (3+1)-dimensionalen raum-zeitlichen Mannigfaltigkeit (auch „Lorentzsche Mannigfaltigkeit“ oder kurz „Raum-Zeit“ genannt) bestimmt, gleichzeitig die Potentialfunktion eines physikalischen Feldes, nämlich des Gravitationsfeldes. Während im Falle anderer Theorien Raum und Zeit unabhängig von den physikalischen Feldern, die das physikalische Geschehen beschreiben, gewissermaßen als Bühne des Geschehens vorgegeben sind, ist die Raum-Zeit hier Teil des dynamischen physikalischen Geschehens. Wegen der Identifizierung von metrischem und Gravitationsfeld kann das so gefaßte Geschehen zu Recht auch als geometrodynamisches Geschehen bezeichnet werden; Einstein nannte das auch die Geometrisierung der Physik. Erstmalig in der Geschichte der Physik ist damit der Dualismus von Geometrie und Physik – jedenfalls für einen Teil der Physik – aufgehoben. Das hatte weitere wichtige Konsequenzen, z.B. die, daß die Bewegungsgleichungen aus den Feldgleichungen abgeleitet werden konnten, was ebenfalls einen wichtigen Schritt auf dem Weg zu einer einheitlichen physikalischen Theorie bedeutet.

Es ist daher nicht erstaunlich, daß Einstein und mit ihm andere, wie Weyl, Eddington und später Schrödinger, die Geometrisierung der Physik, die ihm

1 H.-J. Treder, Die Geometrisierung der Physik und die Physikalisierung der Geometrie, in: *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften der DDR*, 1975, 14 N.

für die Gravitation mit der Allgemeinen Relativitätstheorie gelungen war, für das Programm einer großen geometrische Vereinheitlichung der Physik hielten. Man kann sogar sagen, daß Einstein diese große Vereinheitlichung der Physik von vornherein, also schon während der Arbeit an der Begründung der Allgemeinen Relativitätstheorie, im Sinn hatte.[2] Als diese Vereinheitlichung dann mit der Allgemeinen Relativitätstheorie nur partiell gelungen war, arbeitete Einstein an einer Verallgemeinerung dieser Theorie, um sie zu einer einheitlichen geometrischen Feldtheorie (auch „unitäre Feldtheorie" genannt) umzugestalten.

Diese Vereinheitlichung sollte insbesondere das sogenannte Teilchenproblem lösen. Die Teilchen und Körper sollten nicht zusätzlich zu den Feldern in die Theorie eingeführt werden, sondern als besondere Konfigurationen aus einer reinen Feldtheorie zu berechnen sein. Technisch gesprochen sollten Teilchen sich als singularitätsfreie Lösungen der Feldgleichungen ergeben. Diese Forderung nannte Einstein die Lösung des Teilchenproblems. Und in dem Maße, in dem die Physik für Teilchen wie Elektronen und Protonen zeigte, daß diese atomistische bzw. Quanteneigenschaften aufweisen, sollten diese Eigenschaften dann auch aus einer reinen Feldtheorie deduziert werden können. Hinzu kam, daß nicht nur Quellen von Feldern, sondern auch den Feldern selbst Teilcheneigenschaften zukommen sollten. So sollten dem elektromagnetischen Feld Teilchen (Feldquanten, „Photonen" genannt) zugeschrieben werden. Es ging Einstein mithin um eine Lösung des Teilchen- und Quantenproblems auf rein geometrodynamischem Weg.

Die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie machen nun zwar Aussagen über die Bewegung von Teilchen, aber nicht über deren Struktur bzw. Eigenschaften; es gibt keine singularitätsfreien Lösungen, die als Teilchen interpretiert werden können. Einstein hatte das schon 1921 bemängelt, indem er feststellte, die Materie (d.h. die Teilchen und Körper) sei in dieser Theorie etwas „primitiv Gegebenes" bzw. etwas „physikalisch Ein-

---

2 Die Irrungen und Wirrungen, die es auf seinem Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie gab und die in der Literatur vielfach beschrieben wurden, waren maßgeblich dadurch bedingt, daß Einstein nicht nur eine relativistische Theorie der Gravitation, sondern von vornherein eine einheitliche geometrische Feldtheorie anstrebte. Wenn die Allgemeine Relativitätstheorie nun auch nicht die große Vereinheitlichung der Physik erbrachte, so war sie damit aber nicht schlechthin enttäuschend für Einstein. Sie und die bald darauf erbrachte empirische Bestätigung einer ihrer spektakulärsten Aussagen, nämlich der, daß die Lichtstrahlen durch die Wirkung der Gravitation gekrümmt werden, bestärkten vielmehr seine Hoffnung, das große Ziel auf dem von ihr gewiesenen Weg noch zu erreichen.

faches".[3] 1943 hatte er dann zusammen mit Pauli gezeigt, warum seine Gravitationsgleichungen von 1915 keine „Teilchenlösungen" haben können.[4]

Seit der Begründung der Allgemeinen Relativitätstheorie versuchte Einstein daher also, durch eine Verallgemeinerung bzw. Modifikation derselben eine Theorie zu begründen, die seinen Anforderungen an eine einheitliche geometrische Feldtheorie genügte.[5] Während er bis 1925 auch noch wichtige Arbeiten zur Quantentheorie vorlegte, die er durch seinen Beitrag „Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt" mitbegründet hatte,[6] war seine wissenschaftliche Tätigkeit in den folgenden drei Jahrzehnten fast ausschließlich diesem Thema gewidmet. Alle wesentlichen Ansätze dazu wurden von ihm schon in seiner Berliner Zeit erdacht. Einige davon hat er, nachdem er von den Nazis 1933 aus Deutschland vertrieben worden war, in Princeton ausgearbeitet. Dazu gehört auch die Theorie, deren letzte Fassung 1955 als „Appendix II. Relativistic theory of the non-symmetric field" seines Buches *The Meaning of Relativity* publiziert wurde.[7] Von 1943 bis 1950 versuchte auch Schödinger – Einstein (und Eddington)[8] folgend – ebenfalls eine, dieser Einsteinschen ähnliche, einheitliche geometrische Feldtheorie zu begründen.[9]

Treder veröffentlichte seine erste physikalische Arbeit 1955 zu dieser unitären Einstein-Schrödinger-Theorie.[10] In ihr widmete er sich dem Problem

---

3 Vgl. A. Einstein, Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag), in: *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1915, S. 799-801.

4 A. Einstein, W. Pauli, On the non-existence of regular statinary solutions of relativistic field equations, *Annals of Mathematics* 44(1943), 131.

5 Zur Geschichte der einheitlichen geometrischen Feldtheorie siehe auch: H.-J. Treder und H.-H. v. Borzeszkowski, Einsteins Arbeiten zur einheitlichen Feldtheorie. Fundament und Programm der modernen Physik, *Wissenschaft und Fortschritt* 29(1979), 49; dies., On metric and matter in unconnected, connected and metrically connected manifolds, *Found. Phys.* 34(2004), 1541.

6 A. Einstein, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt, *Annalen der Physik*, 17(1905), 132.

7 Vgl. A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, Appendix II: The relativistic theory of the non-symmetric field, Princeton UP, Princeton 1955.

8 Eine erste Verallgemeinerung der Allgemeinen Relativitätstheorie war schon 1918 von H. Weyl versucht worden (vgl. H. Weyl, Gravitation und Elektrizität, in: *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*, 1918, S. 465-480). A. S. Eddington hatte dann 1921 diese Theorie dahingehend modifiziert, daß er eine andere Nicht-Riemann-Geometrie als Weyl zugrunde legte (vgl. A. S. Eddington, A generalization of Weyl's theory of the electromagnetic and gravitation fields, *Proceedings of the Royal Society London*, 99(1921), 19).

9 E. Schrödinger, *Space-Time Structure*, Cambridge University Press, Cambridge 1950.

10 H.-J. Treder, Der Materietensor in der unsymmetrischen Theorie Einsteins, *Wiss. Zs. der Humboldt-Universität zu Berlin*, Math.-nat. Reihe 4(1955), 9.

der Identifikation der Materie und damit der Frage nach klassischen Teilchenmodellen in dieser geometrodynamischen, d.h. rein geometrischen Feldtheorie. Diese Untersuchung wurde mit einer Arbeit in den *Annalen der Physik* fortgesetzt.[11] (Mit Untersuchungen zu dieser Theorie promovierte er dann auch 1957). Dabei machte er sich mit der Entdeckung einer Kraft, die in der einheitlichen Feldtheorie Einsteins auftritt und erstaunlicherweise nicht mit der Distanz schwächer wird, einen Namen. Er fand dadurch Eintritt in den damals noch relativ kleinen internationalen Klub der Relativisten, die Einsteins diesbezügliches Werk fortsetzen wollten und vor allem Probleme der unitären Theorie heftig diskutierten. Die Beschäftigung mit dieser sogenannten unitären Feldtheorie hat Treder später zu vielen neuen Ansätzen geführt, die vor allem der Untersuchung der Tragfähigkeit der physikalischen Prinzipien galten, die relativistischen Theorien und Modellen zugrunde liegen.

Indem Treder sich mit Ansätzen zu einer unitären Feldtheorie und den Möglichkeiten zur Lösung des Teilchen- und Quantenproblems in deren Rahmen beschäftigte, wurde er aber auch immer wieder auf die Frage gelenkt, ob es nicht doch der aussichtsreichere Weg wäre, die Lösung nicht auf rein geometrodynamischem Weg im Sinne des Einsteinschen Programms zu suchen – wie es zu jener Zeit insbesondere von Wheeler versucht wurde. Denn es bot sich auch der – wie Treder ihn nannte – orthodoxe Weg an, den Feynman und andere Quantenfeld- und Elementarteilchenphysiker bevorzugten (Einstein hatte ihn in seiner letzten Vorlesung gemäß der Wheelerschen Nachschrift allerdings „kindisch“ genannt): Man besinne sich auf die Ähnlichkeiten von klassischer Elektrodynamik und klassischer Gravitationstheorie (also Allgemeiner Relativitätstheorie) und löse das Problem dadurch, daß man das Gravitationsfeld ähnlich wie das elektromagnetische Feld quantisiert, indem man die Regeln der Quantenfeldtheorie auf es anwendet.

Treders Überlegungen verwiesen ihn aber zunächst wieder auf den geometrodynamischen Weg – und das nicht nur wegen des Einsteinschen Diktums.[12] Gegen den orthodoxen Weg sprachen nämlich zwei Argumente. Zum einen zeigten Treders eigene Arbeiten zur Gravitationsstrahlung,[13] daß es

11 H.-J. Treder, Stromladungsdefinition und elektrische Kraft in der einheitlichen Feldtheorie, *Ann. Phys.(Leipzig)* 19(1957), 369. – H.-J. Treder erarbeitete zu dieser Zeit auch Stichwörter zur unitären Feldtheorie, in: J. Naas, H. L. Schmid (Hg.), *Mathematisches Wörterbuch*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1961.

12 Siehe dazu: H.-J. Treder, Gravitonen, *Fortschritte der Physik* 11(1963), 81.

13 Treder hat zusammen mit A. Papapetrou sogenannte Stoßwellen berechnet und dazu auch eine mathematisch sehr detaillierte Habilarbeit vorgelegt: H.-J. Treder, *Gravitative Stoßwellen*, Akademie-Verlag, Berlin 1961, und die darin zitierte Literatur.

wegen der Nichtlinearität der Einsteinschen Gravitationsfeldgleichungen zwischen der Gravitationsstrahlung und der elektromagnetischen Strahlung gravierende Unterschiede gibt. Wegen des engen Zusammenhangs von Strahlung und Feldquantisierung sollten sich daher die Elektrodynamik und die Allgemeine Relativitätstheorie auch hinsichtlich der Quantisierung wesentlich unterscheiden. Das machte die Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie nach dem Vorbild der Elektrodynamik äußerst fragwürdig. Zum anderen bewiesen meßtheoretische Überlegungen von L. Rosenfeld,[14] daß auf Grund der Gültigkeit des Äquivalenzprinzips in der quantisierten Allgemeinen Relativitätstheorie eine prinzipielle Unschärfe für die Länge auftritt, so daß sich die Probleme, die der Beziehung von Quantentheorie und Allgemeiner Relativitätstheorie entspringen, „nicht im Rahmen des orthodoxen Schemas der Quanten- und Relativitätstheorie behandeln lassen".[15]

Rosenfelds Argumente zeigten Treder aber nicht nur die Grenzen des orthodoxen Weges, sondern sie brachten ihn auch auf eine neue geometrodynamische Idee. Er interpretierte die Unschärfe der Längen bzw. der Längenmessung dahingehend, daß in Bereichen unterhalb der Planckschen Elementarlänge eine Längenmessung deshalb nicht möglich ist, weil in Bereichen dieser Länge Nullstellen der Determinante $g = \det(g_{ik})$ des metrischen Feldes $g_{ik}(x^l)$ auftreten. Demgemäß sollten die Gravitonen, also die ruhmasselosen Quanten, die dem Gravitationsfeld nach dem Quantenprinzip zukommen, durch geodätische Nulllinien repräsentiert werden, auf denen g verschwindet, während außerhalb dieser Linien $g < 0$ gilt. Damit schien sich ein neuer Weg für die Lösung des Quantenproblems im Rahmen der Geometrodynamik zu eröffnen:[16] Man berechne Lösungen der Einsteinschen Gravitationsfeldgleichungen mit Nullstellen der Determinante g und versuche, sie im Sinne der Quantenfeldtheorie zu interpretieren! Treder zeigte, daß man dazu eine der

14 Diese Überlegungen hatte Rosenfeld erstmalig 1952 veröffentlicht und sie dann 1965 erneut zur Diskussion gestellt: Vgl. L. Rosenfeld, Quanten und Gravitation, in *Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie*, hg. von H.-J. Treder, Akademie-Verlag, Berlin 1966. – L. Rosenfeld, J. A. Wheeler, V. Fock, C, Lanczos, A. Kawaguchi, W. Yourgrau, C. MØller, H. Bondi, A Papapetrou, M. Tonnelat, A. Mercier, J. Vigier, J. Rayski, H. Hönl, G. Ludwig, D. Ivanenko und Yu Novozhilov waren Teilnehmer einer von H.-J. Treder 1965 in Berlin organisierten Konferenz, deren Beiträge in dem Sammelband *Entstehung, Entwicklung und Perspektiven der Einsteinschen Gravitationstheorie* veröffentlicht sind. Das Zustandekommen dieser Konferenz war maßgeblich auf den wissenschaftlichen Ruf, den Treder seinerzeit schon hatte, zurückzuführen. Die Diskussionen auf dieser Konferenz haben Treders weiteren wissenschaftlichen Weg stark bestimmt.

15 H.-J. Treder, Gravitonen, a.a.O., S. 95.

16 Siehe dazu ebd.

Voraussetzungen fallen lassen mußte, die in der Arbeit von Einstein und Pauli gemacht worden war, und daß dies eine gewisse Modifikation der Einsteinschen Gravitationsgleichungen von 1915 bedeutete. Bestärkt fühlte er sich in diesem Unterfangen auch durch eine Arbeit von Einstein und Rosen,[17] die 1935 etwas Ähnliches zur Konstruktion eines klassischen Teilchenmodells mit nicht verschwindender Ruhmasse kurz in Erwägung gezogen hatten.

Diesbezügliche Arbeiten bestimmten einige Jahre lang das Programm der Trederschen Arbeitsgruppe am „Institut für Reine Mathematik der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin".[18] Sie brachten interessante Einsichten in Hinblick auf das seinerzeit in Fachzeitschriften intensiv diskutierte „Singularitätsproblem", führten aber – ebensowenig wie übrigens Wheelers Versuche – zu einem wesentlichen Fortschritt bei der geometrodynamischen Lösung des Teilchen- und Quantenproblems.

Die Argumente gegen die „orthodoxe" Lösung der Beziehung von Relativität und Quanten bestimmten aber auch in den nachfolgenden Jahren und Jahrzehnten die Arbeit Treders auf diesem Gebiet und führten zu vielen wissenschaftlichen Arbeiten. In ihnen profitierte er von seinen geometrodynamischen Erfahrungen, nutzte diese aber nun, um die Relativitätstheorie (oder besser: die relativistische Gravitationstheorie) mit der Quantentheorie insofern orthodoxer zu vereinen, als das Quantisierungsverfahren der Elektrodynamik und anderer Eichfeldtheorien auf die relativistische Gravitationstheorie zwar zu übertragen war, letztere aber eine Modifikation der Allgemeinen Relativitätstheorie sein sollte, für die er einen konkreten Ansatz vorlegte. Leitlinie der diesbezüglichen Arbeiten waren zunehmend die erwähnten Rosenfeldschen Überlegungen, die Treder ab 1979 dahingehend verstand, daß es bei diesem semi-orthodoxen Zugang nur zwei Möglichkeiten gibt: Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie bei gleichzeitigem Verzicht auf experimentell nachweisbare Quanteneigenschaften des Gravitationsfeldes oder eben eine Modifizierung der Allgemeinen Relativitätstheorie.[19]

---

17 A. Einstein, N. Rosen, Particle problem and the general theory of relativity, *Phys. Rev.* 48(1935), 73.

18 Neben vielen Arbeiten Treders zu diesem Thema, siehe z.B. auch: H.-J. Treder, E. Kreisel, D.-E. Liebscher, *Zur Geometrodynamik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1967; H.-H. v. Borzeszkowski, Singularitäten von Einstein-Räumen in synchronisierten Koordinaten, *Veröffentlichungen der Sternwarte Babelsberg* 1(1968), Heft 2.

19 Siehe dazu: H.-J. Treder, On the problem of physical meaning of quantization of gravitational fields, in: *Relativity, Quanta, and Cosmology in the Development of Scientific Thought of Albert Einstein*, ed by F. de Finis, Johnson Reprint Corporation, New York etc. 1979, Vol. II, pp. 783-806.

Treders oben erwähnte letzte, im Jahre 2006 publizierte Arbeit[20] faßt die Begründung dieses Ansatzes zusammen und zieht damit gleichzeitig ein gewisses Resümee seiner jahrzehntelangen Untersuchungen. Wenn im folgenden die Argumentationslinie dieser Arbeit in ihren Hauptpunkten vorgestellt wird, wird sich zeigen, daß auch Treders letzte Ansichten maßgeblich durch die frühe gründliche Auseinandersetzung mit den Argumenten Einsteins, Schrödingers, Plancks und Bohrs (bzw. Rosenfelds) geprägt sind.

Kovarianz und Riemann-Struktur der Raum-Zeit in der Allgemeinen Relativitätstheorie

Gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Struktur der Raum-Zeit durch die folgenden zwei Prinzipien festgelegt: [21]

1. das Kovarianzprinzip, wonach alle Koordinatensysteme äquivalent sind,
2. das Prinzip, demgemäß die Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit einen metrischen Zusammenhang trägt, d.h. eine Riemannsche Struktur hat, die durch einen symmetrischen metrischen Tensor gegeben ist.

Schrödinger stellte fest, daß diese beiden Prinzipien einen sehr unterschiedlichen Status haben. Während man das erste kaum in Frage stellen kann, ist das zweite durchaus zu erschüttern. Selbst dann, wenn man nichts weiter beabsichtigt, als die Allgemeine Relativitätstheorie darzustellen, ist die Voraussetzung eines metrischen Zusammenhangs nicht der einfachste Weg.

Schrödinger folgend ist es daher nur konsequent, zunächst das erste Prinzip bzw. dessen konstruktive Rolle so weit wie möglich auszunutzen, um dann das zweite auf den Prüfstand zu stellen. Da es hier um die Frage des Verhältnisses von Allgemeiner Relativitätstheorie und Quantentheorie geht, ist es naheliegend, das Quantenprinzip dabei zum Prüfkriterium zu machen. Das ist insofern noch der Einsteinsche Standpunkt, als die Lösung des Problems in einer Verallgemeinerung der Allgemeinen Relativitätstheorie gesehen wird. Von Einsteins stringentem geometrodynamischen Programm weicht dieses Vorgehen aber insofern ab, als die Quantentheorie für die Begründung einer einheitlichen Theorie herangezogen wird.

20 H.-J. Treder, H.-H. v. Borzeszkowski, Covariance and quantum principles – censors of the space-time structure, *Found. Phys.* 36(2006), 757-763.

21 E. Schrödinger, *Space-Time Structure,* a.a.O.

Zur Bedeutung des Kovarianzprinzips

Das Kovarianzprinzip wird in der Literatur zwar nicht in Frage gestellt, seine Bedeutung aber sehr unterschiedlich beurteilt. Während Autoren wie Kretschmann und Fock dieses als physikalisch leere und mathematisch selbstverständliche Forderung ansahen, hielten und halten viele es indes für die Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie. Dazu ist zu sagen, daß das Prinzip selbst, wonach die Grundgesetze der Physik kovariant bezüglich beliebiger Koordinatentransformationen formuliert werden müssen, in der Tat insofern eine rein mathematische Forderung ist, als sie immer erfüllt werden kann. Es ist aber eben auch folgendes zu sehen:

1. Das Kovarianzprinzip stellt eine apodiktische Regel für die Gestalt von Gesetzen dar, und es zeichnet dabei die Dimension $n = 4$ als Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit aus. Wie aus der Differentialgeometrie bekannt ist, ist dieses Prinzip nämlich in Riemannschen Raum-Zeiten der Dimension $n < 4$ so restriktiv, daß keine physikalisch sinnvollen Gleichungen formuliert werden können; sie wären „überbestimmt". So würden Einsteins Gleichungen wegen der Tatsache, daß im Fall $n = 2$ der Krümmungstensor dem Ricci-Skalar und im Fall $n = 3$ dem Ricci-Tensor proportional ist, nur Raum-Zeiten konstanter Krümmung zulässig sein. Andererseits führen Raum-Zeiten der Dimension $n > 4$ zu „unterbestimmten" kovarianten Strukturen, so daß immer irgendwelche, physikalisch schwer zu begründenden Zusatzbedingungen eingeführt werden müssen.
2. Etwas, das in diesem Kontext besonders schwer wiegt, ist die Tatsache, daß im Rahmen einer (3+1)-dimensionalen Riemannschen Raum-Zeit das Kovarianzprinzip zu einem wichtigen Werkzeug zur Realisierung des Einsteinschen Äquivalenzprinzips wird. Denn letzteres, welches die lokale Äquivalenz von Trägheit und Schwere besagt, ist der physikalische Umstand, dem es Rechnung zu tragen gilt. Und genau dem kann man gerecht werden, wenn man (allgemein)*kovariante* Gesetzesgleichungen in einer *gekrümmten* (3+1)-dimensionalen Raum-Zeit aufstellt. Daß hier neben dem Wort „kovariante" auch das Wort „gekrümmte" hervorgehoben werden muß, zeigt aber auch, daß durch das Äquivalenzprinzip zum Kovarianzprinzip ein über die Mathematik hinausgehendes physikalisches Moment hinzugekommen ist, das Treder oft mit dem Satz ausgedrückt hat: „Der physikalische Inhalt des Kovarianzprinzips ist das Äquivalenz-Prinzip." (Insofern ist das Kovarianzprinzip für sich genommen in der Tat physikalisch leer, aber es wird zu einem wichtigen Instrument, wenn es durch das Äquivalenzprinzip mit physikalischem Inhalt erfüllt wird.

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist eine Theorie, die all den aus dem Kovarianzprinzip folgenden Forderungen genügt. Ihr liegt eine Riemannsche *4-dimensionale* Raum-Zeit zugrunde, also eine Mannigfaltigkeit auf der ein *kovariantes* symmetrisches Feld (d.h. ein metrisches Tensorfeld $g_{ik}(x^l)$) definiert ist. Mittels dieses Tensorfeldes läßt sich das metrische Zusammenhangsfeld $\Gamma^s_{ik}(x^l)$,[22]

$$\Gamma^s_{ik}(x^l) := \frac{1}{2} g^{sn}(g_{ni,k} + g_{kn,i} - g_{ik,n}) \tag{1}$$

konstruieren, das es erlaubt, allgemein-kovariante Differentialgleichungen zu formulieren. Dabei lassen sich die Differentialgleichungen für das Gravitationspotential, die Einsteinschen Gleichungen,

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = -\kappa T_{ik} \tag{2}$$

aus dem folgenden Wirkungsintegral für das Gesamtsystem „Gravitationsfeld plus Materieverteilung" durch Variation der Metrik ableiten:

$$L = \sqrt{-g}R + 2\kappa L_{mat} \tag{3}$$

(R_{ik} ist der Ricci-Tensor, R der Ricci-Skalar, κ die Gravitationskonstante und T_{ik} der metrische Energie-Impuls-Tensor der Materieverteilung, die das Gravitationsfeld erzeugt; L_{mat} ist die Lagrange-Dichte der Materieverteilung).

Der in (1) gegebene Zusammenhang ist der, von dem Schrödinger sagte (s. o.), daß selbst dann, wenn man nichts weiter beabsichtige, als die Allgemeine Relativitätstheorie darzustellen, es nicht der einfachste Weg wäre, von (1) auszugehen. Es soll hier aber nicht um die Art der Darstellung gehen. Es gibt nämlich neben anderen Argumenten ein mathematisches und zugleich physikalisches Problem, das für die Modifikation der Allgemeinen Relativitätstheorie und damit auch für das In-Frage-Stellen der Beziehung (1) spricht. Es erwächst aus den Forderungen der Quantenphysik.[23] Dieses Problem besteht darin, daß es nicht nur erstrebenswert, sondern geradezu dringend geboten ist, die Relativitätstheorie, also die relativistische Theorie der Gravitation, mit der Quantentheorie zu vereinigen. Denn ohne diese Vereinigung wissen

22 Im Folgenden sprechen wir abkürzend von Metrik und Zusammenhang und lassen im Interesse der Übersichtlichkeit der Formeln das Argument x^l weg.

23 Vgl. ausführlich dazu: H.-H. v. Borzeszkowski, H.-J. Treder, *The Meaning of Quantum Gravity*, Reidel, Dordrecht 1988.

wir eigentlich nicht, was die Einsteinschen Gleichungen (2) besagen. Auf der rechten Seite dieser Gleichungen steht der Energie-Impuls-Tensor T_{ik} der Materie, die das Gravitationsfeld erzeugt. Diese Materie wird aber von der Quantentheorie beschrieben. Rechts steht also ein Operator oder ein Erwartungswert. In beiden Fällen ist es inkonsistent, eine derartige Größe der linken Seite gleichzusetzen, die aus dem c-Zahl-Feld g_{ik} gebildet ist, gleichzusetzen. Der einzige konsequente Ausweg scheint also in einer Quantisierung des Gravitationsfeldes zu bestehen, die dieser linken Seite denselben mathematischen und physikalischen Status gibt wie der rechten Seite. Der Versuch einer Quantisierung des Gravitationsfeldes führt aber zu den erwähnten, von Rosenfeld bemerkten konzeptionellen Schwierigkeiten, die sich mit dem Schlagwort „Quantenbeschränkungen des Raum-Zeit-Konzepts" markieren lassen. Jedenfalls dann, wenn man zu einer Quantentheorie der Gravitation kommen will, die physikalische Folgen in Gestalt von gravitativen Quanteneffekten aufweist, die also nicht nur durch eine möglichst orthodoxe Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie zu einer mathematisch konsistenten Theorie führt, hat man diese Schwierigkeiten.[24]

Affine Quantentheorie des Gravitationsfeldes

Das Rosenfeldsche Problem steht allen Theorien mit einem metrischen Zusammenhang (1), also nicht nur der Allgemeinen Relativitätstheorie, entgegen: Die Verfeinerung der Analyse der Quantenmessung, die von Rosenfeld vorgelegt worden war, zeigt, daß es keine metrische Quantenfeldtheorie der Gravitation geben kann, die zu gravitativen Quanteneffekten führt.[25] Ohne Bezug auf die Feldgleichungen nehmen zu müssen, ergeben sich nämlich für optimale Messungen des metrischen Feldes Beschränkungen für das Quantenregime, die durch die Plancksche Länge $l_p = \left(Gh/c^3\right)^{1/2}$ bestimmt sind. Es gibt nämlich für die Unschärfe Δg des Gravitationspotentials g_{ik} und die Länge Δx die Ungleichung

---

24 Zu den mathematisch-technischen Schwierigkeiten, auf die der orthodoxe Weg der Quantisierung der Allgemeinen Relativitätstheorie stößt, siehe: A. Ashtekar and J. Stachel (Hg.) *Conceptual problems of Quantum Gravity,* Birkhäuser, Boston etc. 1991.

25 Vgl. dazu: H.-H. v. Borzeszkowski and H.-J. Treder, *The Meaning of Quantum Gravity,* a.a.O.; dies., Classical gravity and quantum matter fields in unified field theory, in: P.G. Bergmann, V. de Sabbata, H.-J. Treder (eds.), *Quantum Gravity,* World Scientific, Singapore etc. 1996; H.-H. v. Borzeszkowski, B.K. Datta, V. de Sabbata, L. Ronchetti, H.-J. Treder, Local and Non-Local Aspects of Quantum Gravity, *Found. Phys.* 32(2002), 1701.

$$\Delta g(\Delta x)^2 \geq \kappa\hbar c = l_p{}^2, \tag{4}$$

woraus folgt, daß in Gebieten unterhalb der Planckschen Länge keine Längenmessung möglich ist:

$$(\Delta x)^2 \geq l_p{}^2. \tag{5}$$

Folgt man nun wieder Schrödinger, der allerdings andere Gründe hatte, von metrisch zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten abzugehen, so hat man konsequenterweise 4-dimensionale Mannigfaltigkeiten vorauszusetzen, auf denen keine primäre Metrik g_{ik}, sondern nur ein Zusammenhang Γ^s_{ik} mit nichtverschwindender Torsion

$$T^i_{kl} := \frac{1}{2}(\Gamma^i_{kl} - \Gamma^i_{lk}) \tag{6}$$

und nichtverschwindender Nichtmetrizität

$$Q_{ikl} := -g_{ik//l} \tag{7}$$

definiert ist (das Zeichen "//" bedeutet die kovariante Ableitung bezüglich des allgemeinen Zusammenhangs). Aus dieser Sicht ist der metrische Zusammenhang (1) nur ein Spezialfall, in dem Torsion und Nichtmetrizität gleich Null sind.

Es gibt noch einen weiteren Weg des Abgehens von einer Raum-Zeit-Struktur, die auf einem rein metrischen Zusammenhang beruht. Diesen hatte schon Einstein in seiner einheitlichen geometrischen Theorie des „unsymmetrischen Feldes“ verfolgt,[26] und bei Versuchen, eine die Allgemeine Relativitätstheorie modifizierende Gravitationstheorie zu begründen, spielt er auch heute noch eine große Rolle. Dabei wird eine Mannigfaltigkeit vorausgesetzt, auf der sowohl eine Metrik g_{ik} als auch ein von der Metrik unabhängiger Zusammenhang Γ_{ik} (der also nicht das Aussehen von (1) hat) definiert ist. (Allerdings wird im Unterschied zu Einsteins Ansatz meistens eine symmetrische Metrik vorausgesetzt.) Nach Schrödinger handelt es sich dabei aber um eine inkonsequente Vorgehensweise, da die Voraussetzung zweier voneinander unabhängiger Grundgrößen eine schwer zu rechtfertigende Mischform darstellt.

26 Vgl. A. Einstein, *The Meaning of Relativity,* Appendix II: The relativistic theory of the non-symmetric field, a.a.O.

Ist man also so konsequent wie Schrödinger, so hat man die über die Allgemeine Relativitätstheorie hinausgehende relativistische Gravitationstheorie auf der Basis einer 4-dimensionalen rein affinen Mannigfaltigkeit zu begründen. Diese ist dadurch definiert, daß auf der differenzierbaren 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit nur ein Zusammenhangsfeld (anstelle des metrischen Feldes) definiert ist. Da dieses Zusammenhangsfeld dann die einzige zur Verfügung stehende Struktur ist, hat man von der Lagrange-Dichte

$$L_0 = \frac{2}{\lambda}\left(-\det\left(R_{ik}\right)\right)^{1/2} \tag{8}$$

auszugehen, die in geometrodynamischem Interesse von Edddington, Einstein und später dann ausführlich von Schrödinger diskutiert worden ist:.

Nun ist der Zusammenhang – anders als im geometrodynamischen Fall – allerdings als Gravitationspotential zu interpretieren und nicht als das alle Wechselwirkungen beschreibende einheitliche Feld. Daher ist diese Lagrange-Dichte durch die des Materiefeldes, das das Gravitationsfeld erzeugt, zu ergänzen:

$$L = L_0 + \kappa L_{mat} \tag{9}$$

Der Materieterm kann als derjenige vorausgesetzt werden, der die Dirac-Materie beschreibt:

$$L_D(\Gamma,\varphi,\chi) = \frac{i\hbar c}{2}|\sigma|\left[\left(\varphi^{\dot{\nu}}\sigma^l_{\mu\dot{\nu}}\varphi^{\mu}{}_{//l} - \chi^{\dot{\nu}}\sigma^l{}_{\mu\dot{\nu}}\chi^{\mu}{}_{//l}\right)\sqrt{2} + \frac{imc}{\hbar}\varphi_{\mu}\chi^{\mu}\right] + c.c \tag{10}$$

Dabei bedeutet das Zeichen "//" wieder die kovariante Ableitung bezüglich des allgemeinen Zusammenhangs und $\sigma^l_{\mu\dot{\nu}}$ die kovarianten Spinvektoren, welche im Rahmen eines "reduzierten Spinformalismus" definiert werden können. Dieser Formalismus kann so konstruiert werden, daß er sich nach Einführung einer Metrik auf den Standard-Formalismus reduziert.[27]

Die aus der Variation von (9) nach diesem Potential, also nach dem Zusammenhang Γ^s_{ik}, resultierenden Gleichungen sind demgemäß die Gravitationsfeldgleichungen. Eine Metrik kann man dann, Schrödinger folgend, im Nachhinein durch die zusätzliche Bedingung

$$R_{ik} = \lambda g_{ik} \tag{11}$$

27 Vgl. H.-H. v. Borzeszkowski, H.-J. Treder, Spinorial matter in affine theory of gravity and the space problem, *Gen. Rel. Grav.* 33(2001), 1351.

definieren oder auch auf andere Weise einführen.[28] Im Resultat erhält man eine bezüglich der Eichtransformationen (ϕ ist ein beliebiger Skalar).

$$\Gamma'^{i}{}_{kl} = \Gamma^{i}{}_{kl} + \delta^{i}_{k}\phi_{,l} \qquad \varphi'_{\nu} = e^{i\phi}\varphi_{\nu} \qquad \chi'^{\dot{\nu}} = e^{-i\phi}\chi^{\dot{\nu}} \tag{12}$$

invariante Theorie. Da Treder zudem gezeigt hat, daß die geometrische Struktur der affinen Theorie es erlaubt, spinorielle Materie einzuführen, hat er mit den Gleichungen (8)-(10) einen konkreten Ansatz für eine derartige Theorie vorgelegt. Er hat auch einen Weg zur Hamiltonschen Formulierung dieser affinen Theorie aufgezeigt, die die Grundlage für eine kanonische Quantisierung bietet. [29]

Treders Untersuchungen führten also zu dem Schluß, daß die Frage „Geometrodynamik oder orthodoxe Quantenfeldtheorie?“ zwar zugunsten der Quantenfeldtheorie beantwortet werden sollte, daß dies aber nicht heißen kann, die Allgemeine Relativitätstheorie zu quantisieren. Denn will man zu einer physikalisch signifikanten Quantentheorie des Gravitationsfeldes gelangen, muß man von der metrischen Theorie, die in der Form der Allgemeinen Relativitätstheorie vorliegt, zu einer affinen Theorie übergehen, in der ein Zusammenhang anstelle der Metrik das Gravitationspotential beschreibt.

Gegenwärtige Arbeiten, in denen dennoch die Allgemeine Relativitätstheorie quantisiert wird, bestätigen diese Einsicht. Sie zeigen nämlich, daß die Plancksche Länge eine Konsequenz der (kanonisch) quantisierten Allgemeinen Relativitätstheorie ist, wobei diese Länge die Gültigkeitsgrenze der Quantenfeldtheorie besagt. Diese Länge ist damit im Sinne der Rosenfeldschen Ungleichung eine Abschneidlänge für Quanteneffekte des Gravitationsfeldes.

Es ist noch nicht abzusehen, wie weit der hier vorgestellte Ansatz einer affinen Quantentheorie des Gravitationsfeldes führt, fest steht aber, daß die Arbeiten von Hans-Jürgen Treder wichtige Fragen des Verhältnisses von Relativitätstheorie und Quantentheorie beantwortet haben.

---

28 Vgl. H.-H. v. Borzeszkowski, H.-J. Treder, On metric and matter in affine theory of gravitation, *Gen. Rel. Grav.* 34(2002), 1909.

29 Vgl. H.-H. v. Borzeszkowski, H.-J. Treder, On metric and matter in unconnected, connected, and metrically connected manifolds *Found. Phys.* 34(2004), 1541. – Arbeiten, die in unserer Arbeitsgruppe an der TU Berlin durchgeführt wurden, haben den Hamiltonschen Formalismus weiter ausgearbeitet (vgl. St. Spenling, Über Constraints in affinen Gravitationstheorien, Diplomarbeit, TU Berlin, 2004).