



Roswitha März, Berlin

Schöne Einfachheit als (VER)FÜHRUNG in der Mathematik

Diskussionsbeitrag am 24.03.2011 im Arbeitskreis *Prinzip Einfachheit* der Leibniz-Sozietät

Mathematik ist die *einfachste* unter den Wissenschaften,
denn sie birgt den *geringsten Anlaß zum Streit, ob etwas richtig ist*.
Sie ist nur insofern wie alle anderen, wenn es darum geht, ob etwas gut und wichtig ist.

1 Einleitung

Man weiß, Leonhard Euler (1707-1783) hat als erster ein Prinzip der kleinsten Wirkung für eine spezielle Problemklasse (Bewegung eines Massenpunktes) mathematisch korrekt formuliert¹. Er war zutiefst davon überzeugt, daß der Wirklichkeit mathematische Gesetze innewohnen und daß man diese Mathematik entschlüsseln müsse, um sie nutzbringend anzuwenden. Dennoch mahnte er wissenschaftliche Bedachtsamkeit an in bezug auf das in seinem Umkreis heftig diskutierte universale *Prinzip der kleinsten Aktion*, welches jeder Änderung in der Natur die für diese Änderung kleinstmögliche notwendige Aktionsmenge unterstellt: „Aus diesen Fällen leuchtet die völlige Übereinstimmung des Prinzips ... mit der Wirklichkeit ein: aber es kann noch zweifelhaft sein, ob diese Übereinstimmung auch in komplizierteren Fällen stattfindet. Deshalb muß man sorgfältig die Reichweite dieses Prinzips untersuchen, um ihm nicht mehr zuzuschreiben, als in seiner Natur liegt.“²

Euler gilt als Begründer des *calculus variationum*, der Variationsrechnung, die nächst ihm besonders durch Joseph Louis Lagrange (1736-1813) und William Rowan Hamilton (1805-1865) geprägt wurde. Er veröffentlichte 1744 das erste Lehrbuch zur Variationsrechnung [2]. Noch heute spielen Euler- und Euler-Lagrange-Gleichungen eine erhebliche Rolle nicht nur in der Mathematik. Mit Hilfe der Formalismen von Lagrange und Hamilton konnten sich die klassische Prinzipien-Mechanik und Erkenntnisse der modernen Physik entwickeln, welche insgesamt die Annahme stützen, Grundgesetze der Natur seien prinzipiell einfach. Dazu Werner Heisenberg: „Die moderne Physik schreitet also auf denselben geistigen Wegen voran, auf denen schon die Pythagoreer und Plato gewandelt sind, und es sieht so aus, als werde am Ende dieses Weges eine sehr einfache Formulierung der Naturgesetze stehen, so einfach, wie auch Plato sie sich erhofft hat.“³ Von Plato über Leibniz und Euler, nicht nur bis Heisenberg und Einstein, teilen viele Wissenschaftler diese Ansicht. Infolgedessen ist auch die Suche nach der *Weltformel*, die alle vier fundamentalen physikalischen Kräfte konsistent in einer Theorie erfassen soll, bis heute nicht völlig aufgegeben. Unabhängig davon, ob man selbst zu den zuversichtlich Suchenden gehört, wird man Euler darin zustimmen, daß Sorgfalt geboten ist, wenn die Reichweite eines jeden wissenschaftlichen Prinzips, ob auf Aktion zielend oder auf Einfachheit, einer umsichtigen Prüfung unterzogen werden muß! Und damit sind wir beim Vorhaben unseres Arbeitskreises.

Die bisherige Diskussion des Arbeitskreises orientiert sich weitgehend an der Einfachheit der physikalischen Gesetze und ist darüberhinaus von systemtheoretischen Aspekten geprägt, insbesondere aus dem Bereich dynamischer Systeme. Dies wird begleitet durch das Bemühen um bestätigende Studien in verschiedenen Disziplinen und auch durch sachliche Bedenken⁴, denen ich einige Aspekte hinzufügen möchte. Woran kann eine allgemeine Hypothese hinsichtlich der Einfachheit anknüpfen? Bei Herbert Hörz [3, S.15] ist zu lesen: „Einfachheit als Erkenntnis- und Gestaltungsprinzip basiert auf entsprechenden objektiven Wirkprinzipien. Die ontologischen Grundlagen sind: Einfachheit ist Effektivität. Mit einem Minimum

¹vgl.[1, S.69-93]

²[2, Additamentum II]

³Werner Heisenberg, Physik und Philosophie, 7.Auflage, Stuttgart, Hirzel, 2006, S.106

⁴Wolfdietrich Hartung [3, S.139]: In der Sprache hat sich offenbar nicht das Einfache durchgesetzt....So bleibt Sprache auch dann in einem hohen Maße funktionsfähig, wenn sie an Einfachheit verliert. Oder anders: Je komplexer ein System ist, desto differenzierter sind die Ebenen, auf denen es Einfachheit zeigen kann.

an Aufwand wird eine optimale Strukturierung eines konkreten Systems erreicht, die dessen Funktionserfüllung dient. Das Weltgeschehen ist einfach, weil effektiv.”

Im Vorwort der Sitzungsberichte [3, S.5] schreiben die Herausgeber: „Der Gedanke, ein Naturgesetz in der Form zu beschreiben, daß man eine bestimmte Größe angibt, die bei dem wirklichen Ablauf einen Extremwert annimmt, ist fast so alt, wie das wissenschaftliche Denken überhaupt. Entwickelt und ausgeprägt in der Physik, ist die Frage nach der Generalisierung solcher Prinzipien der Einfachheit in allen Disziplinen immer wieder neu zu stellen, da sie für wissenschaftliches Arbeiten von grundsätzlicher erkenntnistheoretischer und methodologischer Relevanz ist.”

Einfachheit, Effektivität, Aufwand, Aktion, Wirkung, Grad der Strukturierung, was immer man sich darunter vorstellt, müssen konkrete Zielgrößen und Optimierungskriterien enthalten, wenn wir von einem Optimum oder Extremum sprechen wollen. Funktionserfüllung, Aufwand, Aktion müssen gemessen und verglichen werden können. Es bedarf einer Formalisierung, somit eines Modells.

Demgegenüber steht eine Vielfalt an denkbaren, zum Teil gegensätzlichen Optimierungszielen, und vielseitige Möglichkeiten der Formalisierung, Modellierung.

Die Variationsrechnung und die gesamten Optimierungsansätze der Mathematik liefern lediglich Modelle für mögliche wirkliche Zusammenhänge. Euler hat eher als Mathematiker denn als Physiker zum Prinzip der kleinsten Wirkung gefunden: „Außerdem habe ich diesen interessanten Zusammenhang nicht *a priori* entdeckt, sondern *a posteriori*, indem ich nach mehreren Versuchen endlich den Ausdruck für die Größe fand, die bei dieser Bewegung ein Minimum wird.”⁵

Bei weitem nicht jede praktisch durchaus sinnvolle Optimierungsaufgabe, wie sie alltäglich höchst umfang- und erfolgreich gerechnet werden, wird ein Naturgesetz erkennen lassen. Mathematische Extremalprobleme, insoweit sie Zusammenhänge natürlicher Prozesse übereinstimmend reflektieren, können jedoch nach wie vor Denkanstöße liefern.

2 Mathematische Modellierung, Einfachheit und Linearität

Mathematische Modelle natürlicher Prozesse resultieren einerseits aus den bekannten einfachen Extremal- und Erhaltungsprinzipien, die physikalisch *wesentliche Eigenschaften* widerspiegeln, sie werden aber andererseits mittels viel allgemeinerer Ansätze wie Proportionalitäts- und Kompartimentsannahmen aufgebaut.⁶ Letztere sind zwar formal ausgesprochen *einfach*, sie haben jedoch in der Regel sehr eingeschränkte Wirkungsbereiche und enthalten durch Erfahrung noch zu bestimmende Proportionalitätsfaktoren etc. Des weiteren finden zwar durchdachte, dennoch aber pragmatisch-willkürlich gewählte Beschreibungsfunktionen Eingang in die Modellgleichungen, deren Parameter zum Teil nur durch Modellvalidierung experimentell ermittelt werden können. Derartige Modelle sind nur dort gute Approximationen wirklicher Wesenszüge, wo eben durch den Modellansatz für die jeweilige Fragestellung wesentliche Zusammenhänge erfasst sind, also *geeignete Variablen* nebst funktionaler Zusammenhänge und Gültigkeitsbereiche. Nur dann sind eventuell über einfache Reflektion hinausgehende, sinnvolle Rückschlüsse zu erwarten.

Die Qualität der mathematischen Modelle ist sehr unterschiedlich. Es gibt bestechend genaue einfache Proportionalitäten, die den physikalischen unmittelbar gleichen, wie etwa beim Ohmschen Gesetz $u = Ri$ der Elektrotechnik. Es gibt durch vielfache Erfahrung geprüfte Kompartimentierungen wie die der Erdatmosphäre in der Klimaforschung⁷ aber andererseits auch recht vage Proportionalitäts- und Kompartimentsannahmen in diversen Wachstumsmodellen.

Dennoch sind mathematische Modelle unentbehrlich. Seit langem und zunehmend werden extrem komplexe Modell-Systeme mit beeindruckendem Erfolg und Nutzen ausgewertet, wie u.a. in der Klimaforschung und der Schaltungssimulation. Sie operieren in mehreren Skalen, haben zum Teil riesige Dimensionen und bestehen aus stringent verkoppelten Teilsystemen.

⁵[1, S.77]

⁶vgl. Roswitha März: Faszination Mathematik - ohne Illusionen [4, 47-58]

⁷vgl. Vortrag von Karl-Heinz Bernhardt am 25.11.2010 im Arbeitskreis

An dieser Stelle möchte ich auf gewisse Mißverständnisse oder überzogene Simplifizierungen im Gebrauch der Termini *einfach* und *linear* aufmerksam machen, die verdeutlichen, daß Vereinfachung auch zu falschen Ansichten verleiten kann.

In der Alltagssprache ist *linear* ein Synonym für *gerade*, *geradlinig*.

In der Mathematik ist Linearität immer eine wohldefinierte Struktureigenschaft. Es gibt u.a. lineare Mengen, Räume, lineare Funktionen, Abbildungen, Operatoren und lineare Gleichungen. Diese Linearität hat zu tun mit Addition/Additivität und einer homogenen Verknüpfung mit einer Zahl aus dem entsprechenden Zahlenkörper \mathcal{K} . Lineare Funktionen, Abbildungen und Operatoren f haben per definitionem die Eigenschaften

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall x, y \in \text{Dom}_f, \alpha \in \mathcal{K},$$

und das Bild einer Linearkombination von Argumenten gleicht der Linearkombination der Bilder.

Eine lineare reelle Funktion einer reellen Variablen hat die Gestalt $f(x) = ax$, $x \in \mathcal{R}$, mit einer reellen Konstanten a . Geometrisch stellt eine lineare reelle Funktion eine Gerade durch den Koordinatenursprung dar, was gut zur Alltagsvorstellung paßt.

Darüberhinaus heißen auch die Funktionen $f(x) = ax + b$, $x \in \mathcal{R}$ linear (genauer: affin linear), also die Polynome ersten Grades. Geometrisch handelt es sich hierbei auch um Geraden, die für $b \neq 0$ allerdings nicht durch den Ursprung gehen.

Zu den linearen Operatoren gehören beispielsweise Differentiation und Integration.

Lineare Gleichungen sind Gleichungen $f(x) = g$ mit linearen Operatoren f . Eine homogene lineare Gleichung $f(x) = 0$ zeichnet sich dadurch aus, daß zugleich mit je zwei Lösungen auch deren Linearkombination eine Lösung ist. Das ist eine wunderbare Sache, die lineare Gleichungen *relativ einfach* macht.

Dynamische Vorgänge werden in der Regel durch Differentialgleichungen modelliert. Am bekanntesten sind explizite autonome gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$x'(t) = Ax(t) + g(x(t)), \tag{1}$$

mit einer $m \times m$ Matrix A und vektorwertiger Lösungsfunktion $x(\cdot)$, oder in der ursprünglichen, detaillierten Schreibweise mittels skalarer Gleichungen und reeller Funktionen $x_i(\cdot)$ als

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1m}x_m(t) + g_1(x_1(t), \dots, x_m(t)), \\ &\dots \\ x'_m(t) &= a_{m1}x_1(t) + \dots + a_{mm}x_m(t) + g_m(x_1(t), \dots, x_m(t)). \end{aligned} \tag{2}$$

Die Funktionen g_i sind dabei häufig Polynome niedrigen Grades, wie etwa bei der *van der Pol Gleichung* ($m = 2$)

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= x_2(t), \\ x'_2(t) &= -x_1(t) + \varepsilon(1 - x_1(t)^2)x_2(t), \end{aligned} \tag{3}$$

und der *Lorenz Gleichung* ($m = 3$)

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}, \tag{4}$$

mit $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$.

Die Differentialgleichung (1) ist nichtlinear, falls g keine affin lineare Funktion ist. Die Differentialgleichungen (3) und (4) sind beispielsweise nichtlinear, sie enthalten Polynome zweiten Grades.

Während die Lösungen und Lösungseigenschaften der linearen Gleichung $x'(t) = Ax(t)$ sich infolge der Linearität recht bald als sehr leicht überschaubar erwiesen haben, also als *einfach*, bergen die nichtlinearen Differentialgleichungen (1) im Vergleich zu den linearen Versionen völlig neue Phänomene wie Grenzzykeln in (3) und seltsame (chaotische) Attraktoren in (4). Länger als ein volles Jahrhundert beschäftigen und faszinieren ihre Rätsel eine Vielzahl von Mathematikern. Hieraus resultieren u.a. die mathematische

Katastrophentheorie⁸, die Theorie chaotischer Systeme sowie die Bifurkationstheorie⁹, welche vielfache Reflexionen in den Naturwissenschaften gefunden haben.

Dieser Sachverhalt, die einfache Überschaubarkeit der Eigenschaften linearer Systeme $x'(t) = Ax(t)$ gegenüber den komplizierteren Phänomenen, die erst bei nichtlinearen Systemen (1) auftauchen, hat vermutlich dazu geführt, daß heute vielfach Einfachheit als inhärentes Attribut von Linearität angesehen wird, während Komplexität per se Nichtlineares einschließen soll. Darüberhinaus wird zuweilen sogar unterstellt, Nichtlinearität ginge grundsätzlich einher mit der Entstehung großer katastrophaler Folgeerscheinungen aus geringfügigen Ursachen. Dabei wird jedoch vergessen, daß die zugrundeliegenden Differentialgleichungen (1) eine zwar hochinteressante, dennoch aber sehr spezielle Klasse bilden, desgleichen die relevanten dynamischen Systeme. Beim genaueren Hinsehen ergeben sich einerseits viele nichtlineare Systeme dieser Art, die nicht wesentlich komplexer sind als die linearen, z.B. die kontraktiven und dissipativen Systeme mit nur einer stationären Lösung bzw. einer absorbierenden Menge. Auf der anderen Seite gibt es allgemeinere Differentialgleichungen als (1), die linear sind, aber dennoch Lösungsverzweigungen oder unerwartet heftige Verstärkungen von kleinsten Erregungen aufweisen, wie wir in folgendem sehen werden.

In moderneren Anwendungen entstehen, meist durch Verkopplung verschiedenartiger Komponenten, allgemeinere Modelle als man mit der Gleichung (1) erfassen kann, etwa Gleichungen der Form

$$f(x'(t), x(t), t) = 0, \tag{5}$$

welche auch singuläre Linienelemente zulassen. Diese Gleichungen sind meist nicht mehr autonom und die Funktion f ist nur selten polynomial. Derartige Differentialgleichungen, die erst seit etwa 3 Jahrzehnten in der Diskussion stehen, sind erheblich schwieriger zu behandeln und die Ergebnisse sind längst nicht schön einfach. Hier weisen schon die linearen Versionen Phänomene auf, die eben irrtümlich nur Nichtlinearitäten zugeschrieben werden: katastrophale Reaktionen auf geringe Änderungen und Bifurkationen. Sehen wir uns dazu der Einfachheit halber zwei kleine leicht zu lösende akademische Beispiele an.

Für die lineare Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x'(t) + \begin{bmatrix} -\alpha & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma(t) \end{bmatrix}$$

und die Anfangsbedingung $x_1(0) = 0$, erzeugt jede glatte Erregung $\gamma(t)$ je genau eine Lösung, darunter die Komponente $x_2(t)$. Speziell gilt mit $\varepsilon = 0.1$

$$\gamma(t) = \varepsilon \frac{1}{n} \sin(nt), t \in [0, 1] \implies x_2(t) = \varepsilon n^2 \cos(nt), t \in [0, 1].$$

Während bei $n = 1$ Erregung und Systemantwort gleiche Größe haben, ist die Situation bei $n = 100$ ganz anders: die kleine Erregung der Größenordnung 10^{-3} wird zu einer Antwort der Größenordnung 10^3 verstärkt! Der Verstärkungsfaktor n^3 wirkt katastrophal. Wenn n gegen ∞ strebt, konvergiert die Erregung $\gamma(t)$ gleichmäßig gegen Null, aber die Antwort $x_2(t)$ wächst unbeschränkt. Die homogene Aufgabe mit $\gamma(t) = 0$ besitzt nur die identisch verschwindende Lösung, die *triviale* Lösung. Marginale Erregungen erzeugen durch diese einfache lineare Differentialgleichung katastrophale Veränderungen der trivialen Lösung!

Im zweiten Beispiel besitzt die Anfangswertaufgabe für die lineare Differentialgleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & -t \\ 1 & -t \end{bmatrix} x'(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

⁸siehe V.I. Arnold, Catastrophe Theory, Springer, Berlin 1986.

⁹siehe J. Guckenheimer und P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Springer, New York, 1983

mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0$, die sich in $t = 1$ verzweigende, also sich unerwartet dramatisch zur Schar verändernde Lösung (c ist eine beliebige reelle Zahl)

$$x_1(t) = x_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \in [0, 1] \\ c(1-t)^2 & \text{für } t > 1 \end{cases} .$$

Diese beiden Beispiele stehen im Widerspruch zur allgemeinen, sich ausdrücklich auch auf Mathematik beziehenden Definition „Linearität ist die Eigenschaft eines Systems, auf die Veränderung eines Parameters stets mit einer dazu proportionalen Änderung eines anderen Parameters zu reagieren.“¹⁰ Damit erweist sich diese Definition als verfälschende Vereinfachung. Dagegen wird klar:

Linearität im mathematischen Sinne als Struktureigenschaft eines Systems erzeugt nur in gewissem Rahmen Einfaches. Einfachheit der Phänomene ist jedoch im allgemeinen kein Attribut von mathematischer Linearität. Linearität ist kein Synonym für Einfachheit.

In diesem Zusammenhang erweist es sich auch als eine gewisse Verführung, wenn im Rahmen einer Systemtheorie Systeme nur mit Eigenschaften ausgestattet werden, die etwa zur einfachen Differentialgleichung (1) passen.

An dieser Stelle sei noch ergänzt, daß der Terminus *linear* in der Mathematik auch für Ordnungsrelationen Verwendung findet. Sind je zwei Elemente der Menge vergleichbar, so sprechen wir von einer linear geordneten Menge bzw. von *linearer Ordnung*, auch Totalordnung oder Kette. Beispiele hierfür bilden die Mengen der natürlichen und reellen Zahlen. Denkt man also an die Messung irgendeines Aufwandes, so muß man sich die Meßgrößen in eine linear geordnete Menge denken.

3 Anziehende schöne Einfachheit

So wie Philosophen sich gern den relativ einfachen physikalischen Gesetzen zuwenden, favorisieren Mathematiker naturgemäß *mathematisch relativ einfach und aussichsvoll zu behandelnde* Aufgabenstellungen, u.a. die obigen autonomen Differentialgleichungen (1) mit polynomialen Funktionen g . *Es ist Führung und Verführung zugleich, auf diese Weise ausgehend von einfachen Fragestellungen zu einfachen Antworten zu gelangen.* Man kann damit viel eher zu Ruhme kommen, als durch eine Auseinandersetzung mit zwar anwendungsrelevanteren, aber viel komplizierteren Systemen, die selten derart schöne, einfache Antworten erwarten lassen.

Blicken wir zur Veranschaulichung ein wenig zurück. Nachdem Henri Poincaré 1883 erste Beispiele von isolierten periodischen Lösungen (Grenzzykeln) entdeckt bzw. konstruiert hatte, beschäftigte dieses Phänomen zahlreiche Mathematiker. David Hilbert formulierte 1900 in einer bis heute berühmten Rede¹¹ auch die Frage, wieviele Grenzzykeln ein zweidimensionales System der Form (1) haben kann, wenn g_1 und g_2 Polynome des Grades n sind. Nachdem van der Pol in den Jahren 1920-1926 die Affinität des Grenzzykels seiner Gleichung (3) zu elektrischen Schwingungen (Relaxationsschwingungen) klargelegt hatte, steigerte sich das Interesse. Man beschränkte sich weitgehend auf dem Fall $n = 2$, also auf quadratische Polynome g_1, g_2 . In der Mitte des vorigen Jahrhunderts hatte man solche Probleme mit 3 Grenzzykeln konstruiert und versuchte zu beweisen, daß es nicht noch mehr geben kann. Erst hundert Jahre nach Poincaré, machte sich Shi Songling¹² einen Namen mit der Konstruktion eines Systems mit 4 Grenzzykeln. Ob es noch mehr gibt, weiß man bisher nicht.

Es geht viel Faszination aus von derartigen scheinbar einfachen Fragestellungen. Nicht ganz unberechtigt werden wir Mathematiker dafür belächelt, daß wir dadurch ALLES ÜBER NICHTS erfahren.

Eine ganz andersartige weitere Verführung im Zusammenhang mit relativ einfachen dynamischen Systemen führt auf sogar bildhaft Schönes, die Fraktale.¹³ Ganz nebenbei zeigen die herrlichen Produktionen der Fraktal-Kunst, die auch in Ausstellungen zu sehen sind, daß mathematisches Chaos einer Ordnung

¹⁰Wikipedia: de.wikipedia.org/wiki/Linearität, 20.03.2011

¹¹D. Hilbert, Mathematische Probleme, Vortrag auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Paris 1900, Nachrichten der Universität zu Göttingen 1900-1901, S.253-297

¹²Shi Songling, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems, sci. sinica 23, 1980, S.153-158

¹³siehe H.O. Peitgen und P.H. Richter, The Beauty of Fractals, Springer, Berlin, 1986

unterliegt und beherrschbar ist, ganz im Gegensatz zur umgangssprachlichen Unordnung.

Werner Krause¹⁴ berichtet über ein Wirkprinzip Einfachheit in der menschlichen Informationsverarbeitung, welches u.a. auf minimale Anzahlen von Variablen hinzielt. Die Tatsache, daß Grenzzykeln erst in zweidimensionalen Systemen (1) auftauchen, chaotische Attraktoren sogar erst in dreidimensionalen, könnte zur Ansicht verführen, Dimension des Systems und Anzahl der Variablen seien generell brauchbare Größen zur Bemessung von Einfachheit bzw. Komplexität. Dieser Gedanke erübrigt sich sofort im Hinblick auf die Einfachheit hochdimensionaler kontraktiver Systeme einerseits und die hochgradig schwierigen niedrigdimensionalen Systeme andererseits. Eine Parallelität oder lineare Ordnung ist hierzu nicht gegeben. Nur in grober Tendenz wird man einkalkulieren, daß mit den Dimensionen auch die Schwierigkeiten anwachsen.

4 Einfachheit als Leitmotiv und Vereinfachung als Arbeitsmittel

Innerhalb der Mathematik ist Einfachheit wie Klarheit, Eleganz und Schönheit eine *allgemeine, unverbindliche Maxime, ein Motiv*, welches die Forschung begleitet und leitet, zuweilen auch verleitet, wie man schon an der Fraktal-Kunst und der Vorliebe für polynomiale Differentialgleichungen sehen konnte. Vereinfachungen sind dagegen unverzichtbare, alltägliche *Arbeitsmittel oder -methoden*.

Schöne einfache Formeln, wie die ungemein klare, zugleich nützliche Eulersche Formel

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (6)$$

die vielen als schönste mathematische Formel gilt, werden hoch geschätzt. Das trifft auch zu auf klare Zusammenhänge, einfach verständliche Aussagen und elegante Beweise, etwa diese beiden wichtigen Aussagen von Weierstraß von 1861 bzw. 1885:

- Eine stetige reelle Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall ihr Minimum und Maximum an.
Aktuelle Abstraktion: Ein stetiges Funktional nimmt auf einem Kompaktum sein Minimum und Maximum an.
- Eine stetige reelle Funktion kann auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall beliebig genau durch ein Polynom gleichmäßig approximiert werden.
Modernere Fassung: Polynome sind dicht im Raum der stetigen Funktionen.

Die Frage nach Minima und Maxima von Funktionen stand von Anbeginn Pate bei der Entwicklung der Variationsrechnung.

Der Approximationssatz von Weierstraß gilt zuweilen als Begründung für die Zuwendung zu und Beschränkung auf polynomiale Sachverhalten, was jedoch sehr umstritten ist.

Das Streben nach schöner Einfachheit hat nächst dem Problem-Verstehen und Lösen-Wollen durchaus auch Antriebskraft, was u.a. zu mehreren verschiedenen Beweisen für etliche Aussagen geführt hat. Wenn sich nach langwieriger Suche nebst mühevoller technischer Arbeit Sachverhalte ordnen und Strukturen sichtbar werden, haben wir das Glücksgefühl, *endlich zum Einfachen, also dem anscheinend Richtigen* gefunden zu haben. Dann entstehen in der Regel neue Begriffsbildungen, Abstraktionen, die wiederum weitere Fragen und Einsichten eröffnen.

Was man allerdings als einfach schön bzw. als schöne Einfachheit empfindet, ist weitestgehend subjektiv, insbesondere wesentlich abhängig von ganz subjektiver Erfahrung mit Mathematik. Der Gedanke, hier ein Maß angeben zu wollen, erscheint mir absurd, obwohl es u.a. Sammlungen schöner und eleganter Beweise^{15,16} gibt.

¹⁴W. Krause, Einfachheit und menschliche Informationsverarbeitung?, [3, 37-55]

¹⁵J. Naas und W. Tutschke, Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik, Harri Deutsch, 2009, 3.korr. Aufl.

¹⁶M. Aigner und G.M. Ziegler, Das BUCH der Beweise, Springer, Berlin, 2009, 3.erw. Aufl.

Wie in jeder Wissenschaft ist Vereinfachung auch in der Mathematik ein vielseitiges Arbeitsinstrument, eine Methode. In nicht an sich zu einfachen Beweisen und Erklärungen findet sich fast immer die Wendung „*der Einfachheit halber setzen wir (zunächst) voraus*“. Der Sachverhalt wird also auf einen einfacheren zurückgeführt. Nach dessen Klärung wird erforderlichenfalls die Beziehung zum allgemeineren Fall beleuchtet. Auch wenn das etwas berüchtigte Adjektiv *trivial* einer Schlußfolgerung beigegeben ist, heißt das nur, daß es sich um etwas im gegebenen Kontext Einfaches handelt.

Mittel zur Vereinfachung, *Vereinfachungstechniken* gibt es ungezählte. Am häufigsten verwendeten werden

- Linearisierung, sukzessive Linearisierung,
- Diskretisierung, Finitisierung, Projektion,
- Einbettung,

und darüberhinaus allgemeine Methoden der Erkenntnisgewinnung wie

- Zurückführung auf Bekanntes und
- Abstraktion.

Gehen wir etwas näher auf die Abstraktion ein. Abstraktion ist ein selektiver Bewußtseinsprozeß, bei dem von im gegebenen Zusammenhang unwesentlichen Merkmalen, Eigenschaften und Beziehungen des Erkenntnisgegenstandes abgesehen wird und wesentlichere, bestimmende hervorgehoben werden, so daß allgemeinere Begriffe entstehen¹⁷.

Wir erkennen den Schritt von skalaren Gleichungen im System (2) zur Gleichung (1) für vektorwertige Funktionen als Abstraktion, die einfachere Einsicht bietet, und die schon von Peano¹⁸ zum Ende zum 19. Jahrhundert benützt wurde. Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelte sich im Rahmen der Theorie der Differentialgleichungen, der Theorie der Integralgleichungen und der Variationsrechnung die Auffassung einer Funktion als Einzelobjekt, als elementarer Bestandteil einer Menge von Funktionen. Ein solches Element kann dann seinerseits als unabhängige Variable in einer abstrakten Funktion (Abbildung, Operator) fungieren. Erfreulicherweise konnte man vertraute Begriffe wie Abstand und Länge in die so entstandenen Funktionenräume hefteln. Komplizierte Differentialgleichungen erhielten einfache Gestalt mit geeigneten Operatoren. Es konnte an verallgemeinerte Ableitungen und schwache Lösungen gedacht werden usw. Durch die sich formierende *Funktionalanalysis*, speziell der abstrakten Charakterisierung und Klassifizierung von Operatoren in Hilberträumen, wurde u.a. ein erheblicher Fortschritt im Verständnis von partiellen Differentialgleichungen und Evolutionsgleichungen erreicht. Damit verbunden ist die weitere Abstraktion etwa in der Gleichung (1) für Funktionen, die nun nicht mehr nur in endlich-dimensionalen sondern auch in unendlichdimensionalen Räumen wirken.

Auch die Variationsrechnung und Optimierung hat durch diesen Abstraktionsimpuls einen großartigen Aufschwung erfahren [5].

Schöne Einfachheit als Leitmotiv der Forschung kann als ein Aspekt eines *Prinzips der Einfachheit als methodische Prinzip*¹⁹ verstanden werden, wonach man unter verschiedenen möglichen Erklärungen die einfachste bevorzugen soll, als Arbeitserleichterung innerhalb der Forschung. Vereinfachung ist ein Aspekt des allgemeinen methodischen Prinzips, wonach man mit den einfacheren, leichter zu lösenden Dingen beginnen soll, um nach und nach die komplexeren behandeln zu können.

5 Diversa: Effektivitätskriterien im Rahmen der Mathematik

Die mathematische Theorie der Extremalaufgaben vereint Variationsrechnung und mathematische Optimierung - mit beeindruckender Vielfalt und Vielschichtigkeit der Aufgabenstellungen, einschließlich der Optimierungsziele²⁰. Darunter sind einerseits Aufgaben, die auf die Beschreibung wesentlicher wirklicher Zusammenhänge zielen, und andererseits in viel größerem Umfang praktische Aufgaben der optimalen

¹⁷Großes Fremdwörterbuch Leipzig, 1979

¹⁸G. Peano, Demonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Annalen, 37, S.182-228, 1890

¹⁹siehe Philosophisches Wörterbuch, 10. Aufl., Leipzig 1974 Band 2, S.972

²⁰siehe etwa [5]

Steuerung, Regelung, Wirtschaftlichkeit.

Der Wunsch nach gewisser Effektivität, Optimalität nebst deren Messung ist darüber hinaus Hintergrund oder Motivation für weitere mathematische Entwicklungen, auch hier mit extrem verschiedenartigen Optimierungszielen. Es kommt zu Ergebnisse mit andauernder oder wachsender Relevanz, aber auch zu solchen, die bald in Vergessenheit geraten, als Irrwege angesehen werden oder gar Verwirrung stiften. Es handelt sich hier um innermathematische Angelegenheiten, und nicht um die Erfassung von Extremalbedingungen als Wesenszüge der Wirklichkeit. Sehen wir uns einige spezielle Fälle etwas genauer an.

Interpolation von Funktionen

Bei nur tabellarisch gegebenen Funktionen besteht die Aufgabe, den Funktionsverlauf insgesamt darzustellen. Eine analoge Aufgabe entsteht, wenn eine ungewöhnlich kompliziert aussehende Funktion zum Zwecke besserer weiterer Verarbeitung durch eine einfachere approximiert werden soll. Das ist die klassische Aufgabe der Interpolation: Gegeben sind die Stellen t_1, \dots, t_n und die Werte y_1, \dots, y_n . Gesucht ist eine Funktion aus einer Klasse recht einfacher Funktionen, die an den Stellen t_i die Werte y_i annimmt. Die traditionelle Vorliebe in der Mathematik für Polynomem führt zuerst zum Interpolationspolynom, welches man mit der schönen einfachen Lagrange-Formel sofort aufschreiben kann als

$$P(t) = \sum_{i=1}^n l_i(t)y_i,$$

mit den Lagrange-Polynomen $l_i(t) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{t-t_j}{t_i-t_j}$. Der Approximationssatz von Weierstraß scheint Zuversicht zu erlauben, daß man mit ausreichend vielen Stellen eine gute Anpassung an den (vermuteten) echten Funktionsverlauf erreichen kann. Aber das trifft leider nur in recht speziellen Fällen ein. Im allgemeinen hat das Interpolationspolynom für große n sehr unangenehme Eigenschaften. Es fluktuiert erheblich und liefert auch für glatte Funktionen nicht einmal punktweise konvergente Approximationen. Eine weniger elegante, komplizierter zu konstruierende, aber am Ende wesentlich bessere Interpolationsfunktion ist etwa seit 1950 im Gebrauch, die natürliche interpolierende kubische Spline-Funktion $S_{nat}(t)$. Diese Funktion besteht aus Segmenten von Polynomen auf den relevanten Teilintervallen, welche an den Nahtstellen t_i zweimal stetig differenzierbar zusammengefügt sind. Sie liefert für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig konvergente Folgen und hat darüberhinaus noch eine sehr nützliche Minimaleigenschaft:

$$\int_a^b (S''_{nat}(t))^2 dt = \text{Minimum} \left\{ \int_a^b (f''(t))^2 dt : f \in \mathcal{F} \right\},$$

wobei \mathcal{F} die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren, interpolierenden Funktionen bezeichnet, die auch das Interpolationspolynom P enthält. Diese schöne Extremaleigenschaft hat nun ihrerseits eine Flut von Verallgemeinerungen ausgelöst, mit anspruchsvolleren Minimaleigenschaften und mit höherem Abstraktionsgrad, von der nur sehr wenig im Gebrauch geblieben ist.

Quadraturformeln

Um ein Integral praktisch zu berechnen, benützt man Summenformeln, etwa

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n a_i f(t_i) + \text{Rest}(f). \quad (7)$$

Auch hier kommt die Vorliebe für Polynome zum tragen. Man hat die Formeln zunächst so konstruiert, daß für möglichst viele Polynome P anstelle f das Restglied $\text{Rest}(P)$ verschwindet. Damit verbunden war die Hoffnung auf ein zu vernachlässigendes Restglied für die nichtpolynomialen Funktionen f . Die natürliche Zahl κ heißt *algebraischer Genauigkeitsgrad* der Integrationsformel (7), wenn das Restglied $\text{Rest}(P)$ für alle Polynome mit dem Grade $\leq \kappa$ verschwindet, es aber ein Polynom P_* gibt, derart daß $\text{grad}(P_*) = \kappa + 1$, $\text{Rest}(P_*) \neq 0$. Auch der algebraische Genauigkeitsgrad diene als Zielfunktion für die Konstruktion optimaler Formeln. Die *Gaußschen Quadraturformeln* besitzen tatsächlich den *maximal* möglichen algebraischen Genauigkeitsgrad $\kappa = 2n - 1$. Die Konstruktion dieser Formeln mit

dem Nachweis sehr schöner Konvergenzeigenschaften für $n \rightarrow \infty$ bilden eine ausgesprochen elegante Theorie.

Dennoch werden im allgemeinen für die Integration ganz andere, weniger schöne, aber sehr viel bessere Formeln verwendet, z.B. die Romberg-Integration, die auf einen Polygonzug aufbaut, also wieder auf zusammengesetzte Polynomsegmente, und dann eine adaptive Extrapolation hinsichtlich der Schrittweite aufsetzt.

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

Differentialgleichungen werden heute mit ausgeklügelten Verfahren numerisch gelöst, in die neben den Grundverfahren u.a. adaptive Gittergenerierungen, Fehlerschätzungen sowie nichtlineare und lineare Gleichungslöser einbezogen sind, die allesamt sinnvoll ineinandergreifen müssen, damit das Ganze gut funktioniert, mit möglichst geringem Aufwand aber zuvörderst zuverlässig. Man versucht, in jedem einzelnen Teil, grundsätzlich nur so genau zu rechnen, wie es nötig erscheint, also *rationell wirtschaftlich* zu arbeiten. Im Vordergrund steht die *Zuverlässigkeit* im Rahmen der geplanten Genauigkeit und damit verbunden eine Adaptivität der Verfahren.

Dieses zweckmäßige Arbeiten entspricht genau der Maxime von Ingenieuren und Technikwissenschaftlern, von der Gerhard Banse²¹ berichtet. Diesen Leitspruch zum Einfachheitsprinzip zu erheben, scheint mir allerdings zu hoch gegriffen. Hier geht es eher um Wirtschaftlichkeit. Verfahren und Programme bzw. die Lösungen der Ingenieure enthalten jeweils subjektiv ausgelegte Spielräume in der Ausgestaltung. Unbedachtes oder Nichtberücksichtigtes, zu knapp Berechnetes kann zu erheblicher Funktionsstörung führen. Dagegen wirkt sich zu genaues Rechnen (offline) nicht als funktionsstörend aus, sondern wird eventuell unwirtschaftlich.

Modellreduktion

Höchst aktuelle Methoden der *systematischen Vereinfachung* durch Reduktion der Dimension von riesigen linearen Differentialgleichungsmodellen mit Hunderten Millionen von Gleichungen und Variablen entstehen gegenwärtig im Rahmen der Sparte Modellreduktion in der mathematischen Kontrolltheorie²². Hier werden signifikante Dimensionsreduktionen vorgenommen, indem die hochdimensionalen Systeme durch niedriger dimensionale Systeme mit ähnlichem Eingangs-Ausgangsverhalten approximiert werden. Optimierungsziel ist hierbei die Verhaltens-Anpassung des reduzierten Systems in bezug auf spezielle System-Eigenschaften wie etwa Lyapunov-Stabilität.

Ausgleichsrechnung

Die Ausgleichsrechnung (Parameterschätzung, Fit, Regressionsanalyse) spielt eine wichtige Rolle in der Modellbildung, speziell bei der schon erwähnten Modellvalidierung. Es handelt sich um eine Optimierungsaufgabe, die vor allem im Rahmen der mathematischen Statistik behandelt wird. Zu einer gegebenen Reihe von Meßdaten $(y_1, t_1), \dots, (y_N, t_N)$ sollen einige wenige unbekannte Parameter $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ einer Modellfunktion $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t)$, $N \gg n$, mit dem Ziel einer optimalen Anpassung des Funktionsverlaufes an die Messwerte bestimmt werden, d.h. die Länge des Vektors

$$F := \begin{bmatrix} f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_1) - y_1 \\ \vdots \\ f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_N) - y_N \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^N \quad (8)$$

soll möglichst klein werden. Die Ansätze für die Modellfunktionen f fußen jeweils auf Erfahrung. Am häufigsten finden Polynome ersten Grades $f(\alpha_1, \alpha_2, t) := \alpha_1 t + \alpha_2$, $n = 2$ Anwendung. Was heisst aber optimale Anpassung? Die Länge des Elementes $F \in \mathcal{R}^N$ aus (8) wird in einer Norm gemessen, was auf die Optimierungsaufgabe

$$\text{Minimum} \{ \|F\| : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{R} \},$$

²¹G. Banse,,Nicht so exakt wie möglich, sondern so genau wie nötig“Das Einfachheitsprinzip in den Technikwissenschaften,[3, S.93-104]

²²vgl. A.C. Antoulas, Approximation of large-scale dynamical systems, Cambridge University Press, 2005

führt. Welche der Normen ist aber relevant mit welcher Konsequenz? Die bekanntesten drei Normen sind

$$\begin{aligned}\|F\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq N} |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_i) - y_i|, \\ \|F\|_1 &= \sum_{i=1}^N |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_i) - y_i|, \\ \|F\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^N |f(\alpha_1, \dots, \alpha_n, t_i) - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Es sind beliebig viele weitere, vor allem bewichtete Normen vorhanden. Die allgemein bevorzugte ist die Quadratsummennorm $\|F\|_2$ (Methode der kleinsten Quadrate), die zusammen mit dem Polynom ersten Grades, also einer Geraden, als Ansatzfunktion zur sogenannten linearen Regression führt. Diejenige Gerade, die zum kleinsten Wert $\|F\|_2^2$ führt, ist dann tatsächlich die *wahrscheinlichste* in einem mathematisch wohldefinierten Rahmen. Ist dieser Rahmen nicht gegeben, trifft auch die Optimalitätsaussage über die kleinste Wahrscheinlichkeit nicht mehr zu.

Komplexitätsmaße

Geht man von Einfachheit als Antonym zu Komplexität aus, ergeben sich aus Bewertungen und Vergleichen von Komplexitäten zugleich indirekt Informationen zur Einfachheit.

Eine formale Bewertung der Durchführbarkeit von *Algorithmen* ist Anliegen der Komplexitätstheorie in der theoretischen Informatik. Die Algorithmen werden in ihrer Anwendung auf formalen Rechnermodellen geprüft, es werden ihnen *Komplexitätsmaße* zugeordnet, etwa Rechenzeit (Zeitkomplexität), Speicherbedarf (Raumkomplexität) oder die Anzahl benötigter Prozessoren bei parallelen Algorithmen. Die Kolmogorow-Komplexität bezieht sich auf *Zeichenketten*. Sie ist ein Maß der Strukturiertheit (Komprimierbarkeit) von Zeichenketten im Rahmen formaler Sprachen. Genauer, es ist die Länge des kürzesten derjenigen Programme auf einer Turing-Maschine, die diese Zeichenkette erzeugen. Strukturlosigkeit bedeutet hier Unkomprimierbarkeit, Zufälligkeit.

Es gibt in der theoretischen Informatik weitere *Beschreibungskomplexitäten*, wie Komplexitätsmaße für *Automaten* (z.B. Anzahl der Zustände), *Grammatiken* (Anzahl der Regeln) und *Sprachen* (minimale Komplexität der generierenden Grammatik).

Alle diese Maße liefern Anzahlen; und sie sind per definitionem an formale Sprachen bzw. Automaten gebunden.

Wenn Rainer Schimming²³ feststellt: „Für Algorithmen ist typisch, dass einer kleinen Beschreibungskomplexität eine große Zeit- bzw. Raumkomplexität gegenübersteht. Hier liegt eine Analogie zum Erkenntnisprozess vor: Komplexe Erscheinungen stehen einem einfachen Wesen gegenüber.“ ist zu beachten, daß diese Aussage sich auf Algorithmen in sehr eingeschränktem Rahmen gründet. Eine Ausdehnung über diesen Rahmen hinaus ist fragwürdig.

Auf die Gestaltung von Verfahren zur Simulation dynamischer Prozesse haben Komplexitätsmaße bisher keinen Einfluß, denn sie erfassen den adaptiven und komplexen(!) Charakter der hier eingesetzten Verfahren nicht. Beim üblichen Rechnen mit Rundungen kommt es auch nur sehr bedingt auf Raum-, Zeit- und Beschreibungskomplexitäten an. Ungleich wichtiger sind Art und Abfolge der Rechenschritte, die ein gültiges Ergebnis sicherstellen.

Ein Einfachheitsprinzip

Nun noch ein Nachtrag, der nur oberflächlich in bezug auf den Namen mit dem Thema etwas zu tun hat. Auch nachdem die Wahrscheinlichkeitstheorie auf der Grundlage der mathematischen Maßtheorie mittels der Kolmogorow-Axiome²⁴ logisch begründet war und sich das beeindruckende Potential dieses Gebiets innerhalb und außerhalb der Mathematik zu entfalten begonnen hatte, wurde im Rahmen der

²³R. Schimming, Optimierung von Erkenntnis: Einfachheit, Einheitlichkeit, Anschaulichkeit, [3, S.72]

²⁴A.N. Kolmogorow, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Heidelberg Berlin 1933

Grundlagenlogik weiterhin der Versuch der Begründung einer Wahrscheinlichkeitstheorie mit Hilfe von Wettvorstellungen verfolgt. Für Ereignisse stehen hier alle im Rahmen einer formalen Sprache bildbaren Aussagen (Hypothesen), denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet wird. In diesem Zusammenhang wurde ein *Einfachheitsprinzip* diskutiert, welches von der These ausgeht, daß *eine einfachere Hypothese die wahrscheinlichere* ist²⁵, und zwar als ein zusätzliches *Axiom* zu Axiomen, die formal die Gestalt der Kolmogorow-Axiome haben, die jedoch ohne ihren maßtheoretischen Gehalt auch ihre Deduktionskraft nicht mehr besitzen. Einfachheit wird dabei als sprachliche Einfachheit (Kürze in der gegebenen, formalisierten Sprache) gefaßt - eine technisch aufwendige Angelegenheit von fraglichem Nutzen, die im übrigen auch nichts mit der Kolmogorow-Komplexität von Zeichenketten zu tun hat. Die Logiker *motivieren* ihr Einfachheits-Axiom mit dem Verweis auf unter Naturwissenschaftlern verbreitete Ansichten. Hier wird also eine fragwürdige These als Axiom unterstellt! Letzteres ist zwar in der Mathematik nicht verboten, der Gebrauch dieses Einfachheitsprinzips zur Axiomatisierung muß jedoch Außenstehende völlig in die Irre führen.

6 Zusammenfassung

Schöne Einfachheit ist ein allgemeines Leitmotiv in der mathematischen Forschung, ein mentaler, höchst subjektiv geprägter Antrieb. Es verführt andererseits aber auch auf Abwege. Vereinfachungen sind alltägliche Arbeitstechniken. In der Mathematik dient insbesondere auch die Abstraktion als ungemein nützliche Vereinfachung.

Die Vorstellung, ausschließlich bei nichtlinearen Zusammenhänge könnten kleine Ursachen katastrophale Wirkungen erzeugen, und lineare Systeme seien dagegen immun, also einfach, ist an enge Rahmenbedingungen mathematischer dynamischer Systeme gebunden. Sie hält einer Prüfung für allgemeinere Modelle dynamischer Prozesse nicht stand.

Zu bedenken ist, daß die bisherige Systemtheorie weitgehend der mathematischen Theorie dynamischer Systeme angepaßt ist, welche sich ihrerseits ausschließlich auf relativ eingeschränkte Klassen von Differentialgleichungen stützt.

In der Mathematik haben Verallgemeinerung bzw. Abstraktion bisher oft zu grösserer Klarheit geführt. Möglicherweise wird sich das wiederholen, wenn allgemeinere dynamische Vorgänge mit Hilfe allgemeineren Differentialgleichungen in eine modernere Systemtheorie einbezogen werden.

Die Erfolge der Variationsrechnung verlocken zu einer Geltungsthese zur Einfachheit als Wirkprinzip. Jedoch, die Diversität von denkbaren Aufwandskriterien in der mathematischen Optimierung und bei anderen mathematische Konstruktionen, verbunden mit wechselnden Konsequenzen, stellt eine Vermutung über ein generell wirkendes Einfachheits- oder Effektivitätsprinzip infrage. Auch wenn man hierarchisch vorgeht, wird man immer nur für speziellere Eigenschaften und Zusammenhänge Antworten finden, gewissermaßen Antworten im Kleinen. Darüberhinaus können sich mit wechselnden äußeren Zusammenhängen auch inhärente Extremaleigenschaften eines Systems verändern.

Ist nicht infolgedessen der Gedanke an (*genau*) ein sinnvolles, formalisierbares Optimierungsziel für ein komplexeres System, einen Prozess, einen Sachverhalt an sich eine irreführende Vereinfachung?

References

- [1] Rüdiger Thiele, Leonhard Euler, Teubner Leipzig, 1982.
- [2] Leonhard Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*, Lausanne, 1744; meist zitiert als: Variationsrechnung (EO I/24).
- [3] Erdmute Sommerfeld, Herbert Hörz und Werner Krause (Hrg.) *Einfachheit als Wirk-, Erkenntnis und Gestaltungsprinzip*, Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften, Band 108, Berlin, 2011.

²⁵H. Kiesow, Die Anwendung eines Einfachheitsprinzips auf die Wahrscheinlichkeitstheorie. Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, 4, 1958, S.27-41

- [4] Gerhard Banse, Wolfgang Küttler und Roswitha März (Hrg.) *Die Mathematik im System der Wissenschaften*, Abhandlungen der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften, Band 24, trafo Wissenschaftsverlag Berlin, 2009.
- [5] Alexander D. Ioffe und Vladimir M. Tichomirov, *Theorie der Extremalaufgaben*, DVW, Berlin, 1979