
Werner Ebeling und Karl Lanius

Zur Vorhersagbarkeit komplexer Prozesse*

Einleitung

Der Schriftsteller Asimov schildert in einem seiner Werke einen Wissenschaftler, der die Evolution der Gesellschaft über Jahrhunderte hinweg vorhersagen konnte. Wir haben Situationen erlebt, in denen sich die Gesellschaft in völlig unerwarteter Weise entwickelt hat und wir haben lernen müssen, dass die Zukunft komplexer Systeme nur in Form von Wahrscheinlichkeitsaussagen prognostiziert werden kann. Wenn es um komplexe Systeme geht, so sind immer mehrere, in der Regel sogar viele Szenarien der zukünftigen Entwicklung möglich. Diese können mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintreten und auch unerwünschte Ereignisse haben in der Regel von Null verschiedene Wahrscheinlichkeiten.

In der vorliegenden Untersuchung geht es um Vorhersage auf Grund vorliegender Daten, die in Form von Zeitreihen einen gewissen vergangenen Zeitraum umfassen. Schon G.W. Leibniz, der Namensgeber unserer Gelehrtensozietät, hat bereits in seiner Hannoveraner Zeit begonnen, Barometerstände und Wettererscheinungen aufzuzeichnen (Bernhardt und Böhme, 1994). In Weiterführung unserer früheren Ausführungen im Plenum (Ebeling, 1994; Lanius, 1994) wollen wir hier nochmals zur Vorhersagbarkeit komplexer Systeme und globaler Erscheinungen Stellung nehmen. Nach einer methodischen Einführung soll je ein Beispiel einer aktuellen gesellschaftlichen Erscheinung, hier das Auf und Ab der Indizes der internationalen Börse und des globalen Klimawandels, hier das El Niño / La Niña Phänomen konkret untersucht werden.

Was verstehen wir hier unter komplexen Prozessen und worauf beruhen die Möglichkeiten ihrer begrenzten statistischen Prognose? Als komplex be-

* Vortrag, gehalten vor dem Plenum der Leibniz-Sozietät am 13.2.2000

zeichnen wir ganzheitliche Systeme, die aus vielen Teilen zusammengesetzt sind. Der Komplexitätsbegriff spielt heute eine zentrale Rolle bei der Beschreibung hochorganisierter Systeme, obwohl es für ihn bisher keine einheitliche Definition gibt (Ebeling et al., 1990; 1994, 1998). Wir vertreten die Auffassung, dass die verschiedenen Komplexitätsdefinitionen nur einzelne Seiten des Komplexitätsbegriffes umfassen. Als Eckpfeiler betrachten wir einerseits die Verbindung mit der Länge von Beschreibungen und andererseits die Verknüpfung mit der Anzahl von Möglichkeiten von Strukturen bzw. Ereignissen. Die Anzahl der Möglichkeiten hängt nun wiederum eng mit der Entropie zusammen. Die Größe Entropie, die im vorigen Jahrhundert durch Clausius in die Physik eingeführt wurde, hat mit Erfolg in fast alle modernen Wissenschaften Einzug gehalten. In unserem Zusammenhang geht es um die von Claude Shannon eingeführte Entropie, die nicht nur ein Komplexitätsmaß ist, sondern auch in enger Beziehung zu Problemen der Vorhersagbarkeit steht (Shannon, 1951).

Das Problem der Vorhersagbarkeit zukünftiger Ereignisse ist noch älter als die Wissenschaften, aber immer eng mit ihrer Entwicklung verknüpft. Vorhersage war im Verlaufe der Evolution der Menschen stets eine Frage des Überlebens. Vorhersage wurde benötigt, um Ackerbau zu treiben, um Werkzeuge und Maschinen zu entwerfen, um Häuser zu konstruieren, Städte zu planen und Kriege zu führen. Als Beispiele wissenschaftlicher Vorhersagen nennen wir hier nur Galileis und Newtons Untersuchungen über Fall-, Wurf- und Planetenbewegungen und die Forschungen von Carnot und Clausius über den Wirkungsgrad von Kraftmaschinen. In neuerer Zeit hat die moderne Chaostheorie wichtige Beiträge zum Verständnis der Möglichkeiten und Grenzen von Vorhersage geliefert (Haken, 1981; Nicolis und Prigogine, 1983; Ruelle, 1993). Eine zentrale Rolle spielt dabei das neue Konzept der Instabilität von Bewegungen gegenüber einer Variation der Anfangsbedingungen. Die Instabilität von Bewegungen hängt eng mit ihrer Vorhersagbarkeit und mit dem von dem auswärtigen Mitglied der Akademie Andrej N. Kolmogorov entwickelten Konzept der dynamischen Entropie zusammen (Ruelle, 1993). Kolmogorovs Methode stützt sich vorwiegend auf die Shannonsche Untersuchung von Vorhersagbarkeit mit Hilfe des Entropie-Konzeptes (Shannon, 1951). Die vorliegende Untersuchung ist eine Anwendung dieser Konzepte auf konkrete Zeitreihen, wobei wir je ein repräsentatives Beispiel aus dem

natürlichen Bereich (klimatologische Daten) und dem gesellschaftlichen Bereich (Finanzreihen) untersuchen wollen.

1. Shannon-Entropie und Vorhersagbarkeit

Wir beginnen mit einer kurzen Einführung in die Shannonsche Theorie. Betrachten wir eine Menge diskreter Zustände, die mit $i=1,2,\dots,s$ nummeriert sind und denen die Wahrscheinlichkeiten p_i zugeordnet sind. Die Shannon-Entropie erster Ordnung ist dann definiert durch

$$H = - \sum_{i=1}^s p_i \log p_i \quad (1)$$

Bekanntlich bildet die Shannon-Entropie den wichtigsten Grundpfeiler der Informationstheorie; hier werden wir uns auf das Vorhersageproblem beschränken. Diese Anwendung steht in engem Zusammenhang mit der sogenannten symbolischen Dynamik. Diese wesentlich auf Kolmogorov zurückgehende Methode beruht darauf, daß der Zustandsraum, d.h. Raum in dem die Vorgänge geometrisch dargestellt werden, in diskrete Zellen eingeteilt wird. Jede dieser Zellen wird durch einen Buchstaben charakterisiert, der für die Gesamtheit der Zustände in der Zelle steht. Die Menge aller Buchstaben, die verwendet werden, bildet das Alphabet des diskreten Modells des betreffenden Prozesses. Verfolgt man eine Trajektorie d.h. den geometrischen Weg des Prozesses im Zustandsraum und notiert in bestimmten Zeitabständen dt jeweils den Buchstaben, der zu der gerade durchlaufenen Zelle gehört, so ergibt sich eine Buchstabenfolge, eine Sequenz, welche den betrachteten Prozess in einer bestimmten Näherung charakterisiert. Das Problem der Vorhersage reduziert sich auf die Bestimmung der Buchstabenfolgen, welche der Zukunft entsprechen. Die Einführung von Buchstabenfolgen ist in bestimmter Hinsicht ein Trick, der es uns gestattet, den Shannonschen Entropie-Begriff, der zunächst nur für diskrete Sequenzen gedacht war, auf kontinuierliche Trajektorien und reelle Zeitserien zu übertragen.

Nehmen wir an, dass

$$A_1, A_2, \dots, A_\lambda$$

unser dynamisches Alphabet, bestehend aus λ Buchstaben darstellt. Zum Beispiel könnte A, C, G, T für ein dynamisches Alphabet stehen, das nur verzeichnet, in welchem Quadranten die Trajektorie liegt. Unsere zu betrachtende

Sequenz stellen wir uns als eine endliche oder unendliche Folge dieser Buchstaben vor. Eine bestimmte Teilsequenz der Länge n , die vorkommt, sei

$$A_p, A_2, \dots, A_n \quad A_i \in \{A_p, A_2, \dots, A_n\}$$

Es sei angenommen, dass

$$p^{(n)}(A_p, \dots, A_n)$$

die Wahrscheinlichkeit ist, in der Gesamtsequenz die Teilfolge A_p, \dots, A_n zu finden. Weiter möge

$$p^{(n)}(A_p, \dots, A_n / A_k)$$

die Wahrscheinlichkeit sein, nach dem Block A_p, \dots, A_n den Buchstaben A_k auf der Position $(n+1)$ zu finden. Wir definieren dann die Shannon Entropie n -ter Ordnung (Blockentropie):

$$H_n = -\sum p^{(n)}(A_p, \dots, A_n) \log p^{(n)}(A_p, \dots, A_n) \quad (2)$$

und die bedingte Entropie n -ter Ordnung als Ungewißheit des Buchstaben, der auf einen n -Block folgt:

$$h_n = H_{n+1} - H_n \quad \text{wenn } n \geq 1 \\ h_0 = H_1 \quad (3)$$

Der Grenzwert dieser Folge für große n wird auch als dynamische Entropie h bezeichnet. Für ganz regellose stochastische Prozesse, die dem Werfen von Münzen oder Würfeln entsprechen (sogenannte Bernoulli-Prozesse) gilt

$$h_1 = h_2 = \dots = h_n = \log \lambda \quad (4)$$

Das heißt, die Ungewißheit ist für alle Ordnungen gleich dem Logarithmus der Anzahl der Buchstaben im Alphabet. Sie kann auch durch Beobachtung einer längeren Folge von n Zuständen nicht reduziert werden. Im folgenden wird die bedingte Entropie immer in Einheiten der maximalen Unsicherheit, die der Bernoulli-Folge entspricht, gemessen werden. Der Maximalwert von h_n ist in diesen Einheiten 1 . Die Differenz

$$r_n = 1 - h_n \quad (5)$$

bezeichnen wir als Vorhersagbarkeit des Folgezustandes, wenn n Zustände beobachtet wurden. Wenn zwischen den beobachteten Zuständen und dem vorhergesagten Zustand eine Lücke von $(k-1)$ Zuständen liegt, definieren wir die Unsicherheit bzw. die Vorhersagbarkeit als

$$h_n(k) \text{ und } r_n(k) = 1 - h_n(k) \quad (6)$$

Für Markov-Prozesse erster Ordnung fällt die bedingte Entropie nur beim ersten Schritt. Es gilt also

$$h_0 > h_1 = h_n = h \quad (7)$$

Für Markov-Prozesse m -ter Ordnung fallen die bedingten Entropien bis zur m -ten Ordnung und sind dann konstant. Je höher die Ordnung ist, um so besser ist zumindest potentiell die Chance für Vorhersagbarkeit.

Von speziellem Interesse sind Prozesse mit langreichweitigem Gedächtnis, die weitreichenden Korrelationen in den Sequenzen und damit einer guten Vorhersagbarkeit entsprechen.

Die dargelegten Entropie-Konzepte beziehen sich unmittelbar auf Sequenzen. Als Sequenzen bezeichnen wir hier beliebige Folgen von Buchstaben. Ein DNA- (oder RNA) Molekül kann als eine Sequenz von Nukleotid-Buchstaben A, C, G und T (oder U) interpretiert werden (Ebeling und Frömmel, 1998) und ein Text ist eine Folge von Buchstaben über dem Alphabet a, b, c, \dots . Shannons Pionierarbeit aus dem Jahre 1951 war der Prädiktion von Buchstaben in englischen Texten gewidmet, ihr folgte eine ganze Reihe von Untersuchungen von Texten in verschiedenen Sprachen sowie auch von Musikstücken (Jaglom und Jaglom, 1984). Die Existenz weitreichender Korrelationen in Texten mindestens bis zur Ordnung $n = 100$ darf heute als (fast) sicher gelten (Ebeling et al., 1998).

Für die Berechnung von Entropien, die auf einer Schätzung vieler Wahrscheinlichkeiten beruhen, ist es erforderlich, einen möglichst umfangreichen Satz empirischer Daten für Sequenzen verschiedener Länge (aber aus demselben Text stammend) simultan auszuwerten. Diese Auswertung kann auf verschiedenen Wegen erfolgen (Ebeling und Nocolis, 1992; Ebeling et al., 1994).

Für das Thema dieser Untersuchung ist von zentraler Bedeutung, daß über die Methode der symbolischen Dynamik, Sequenzen auch eine sehr enge Beziehung zur Dynamik von Prozessen erlangt haben. Man kann die Trajektorie von Prozessen auch als Folgen von Buchstaben darstellen. Die Buchstaben sind dabei symbolische Bezeichnungen der diskretisierten Zustände. Umgekehrt können Sequenzen von Buchstaben über einem Alphabet $A_1, A_2, \dots, A_\lambda$ auch immer als Prozess in einem Zustandsraum mit Zuständen interpretiert werden. Somit besteht eine sehr enge Beziehung zwischen Sequenzen und Dynamik. Der dynamische Standpunkt, der auf Shannon und Kolmogorov zurückgeht, soll auch dieser Untersuchung zugrunde gelegt werden. Wir betrachten als ein erstes Beispiel das klimatische Phänomen El Niño / La Niña.

2. Bedingte Entropie und Vorhersagbarkeit klimatischer Zeitreihen

Passatwinde überqueren in der Regel den äquatornahen Pazifik zwischen Peru an der Westküste Südamerikas und Indonesien. Sie drücken warmes Oberflächenwasser in den Westpazifik. Der Meeresspiegel vor Indonesien liegt daher um ca. einen halben Meter über dem vor der Küste Südamerikas. Eine weitere Folge ist eine um rund acht Grad Celsius höhere Temperatur des Wassers an der Meeresoberfläche im Westpazifik gegenüber der vor der südamerikanischen Küste. Ablandige Winde bewirken ein Aufsteigen kalten nährstoffreichen Tiefenwassers und damit einen großen Fischreichtum in diesen Gewässern.

Wenn die beständigen Passatwinde nachlassen oder ganz verschwinden, sind die Folgen fatal. Vor der südamerikanischen Küste kann dann kein nährstoffreiches Tiefenwasser aufsteigen, die Fischbestände verschwinden und in Indonesien und Australien bleiben die Niederschläge aus. Da dieses Phänomen ungefähr alle zwei bis sechs Jahre um die Weihnachtszeit auftritt, wurde es von den Fischern Equadors und Perus als „El Niño“, das (Christ) Kindlein, bezeichnet. Unter dem „La Niña“-Ereignis versteht man das Gegenteil, d.h. abnorm niedrige Werte der Oberflächentemperatur des Wassers im äquatornahen Pazifik.

Bis in die Mitte des 20. Jahrhunderts betrachteten die Meteorologen das El Niño-Phänomen als eine lokale Klimaschwankung. Es zeigte sich während der El Niño-Jahre 1957/58, einer Zeit, in der umfangreiche Messungen im Rahmen des Internationalen Geophysikalischen Jahres durchgeführt wurden, dass es sich nicht nur um ein lokales Phänomen handelte. Die großräumige Erwärmung hat Auswirkungen auf die Verlagerung der Niederschlagsysteme über dem tropischen Pazifik. Sie bewirkt ausgedehnte Änderungen der allgemeinen atmosphärischen Zirkulation.

Zum Ausgang des 20. Jahrhunderts wissen wir um die Ursachen von Dürren in Asien und Australien sowie von verstärkten Regenfällen längs der Pazifikküste Südamerikas. El Niño reduziert auch die Zahl tropischer Zyklone über dem Atlantik und erhöht andererseits ihre Häufigkeit über anderen Teilen des Atlantiks. Darüber hinaus zeigen sich Fernverbindungen (Teleconnections) wie z.B. stärkere Winterstürme über dem Süden der Vereinigten Staaten. Dank

einer, wenn auch eingeschränkten Vorhersagbarkeit konnte beispielsweise die Welternährungsorganisation der UNO (FAO) vor Einbußen in der Landwirtschaft vieler Entwicklungsländer warnen. So verzögerte sich die Reisaussaat in Asien. Den Bauern wurde empfohlen solche Sorten anzubauen, die trotz geringer Ernte schneller reifen.

Die beiden stärksten El Niño-Phänomene dieses Jahrhunderts lagen in den Jahren 1982/83 und 1997/98. Während das 82/83er Ereignis erst unmittelbar nach seinem Beginn erkannt wurde, konnte der Beginn des zweiten bereits wenige Monate vor seinem Eintritt vorhergesagt werden. Der weitere Verlauf entsprach jedoch nicht den Vorhersagen der Modellrechnungen.

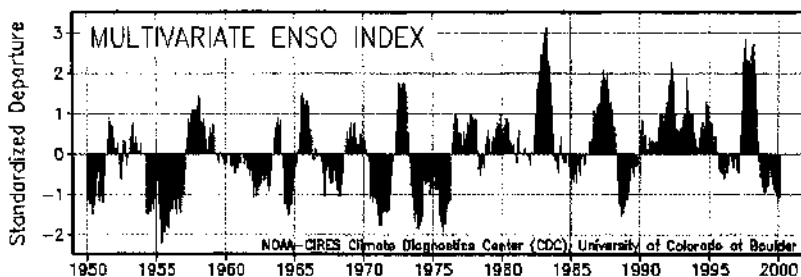
Dieser, wegen der weltweiten Auswirkungen sehr bedeutsame Erfolg war sowohl einer regelmäßigen Messung klimarelevanter Parameter als auch deutlich verbesserten Modellrechnungen zu danken.

In den neunziger Jahren wurden im Pazifik längs des Äquators 70 Messbojen ausgesetzt. Jede misst die Lufttemperatur, die relevante Luftfeuchtigkeit, den Wind an der Meeresoberfläche, die Temperatur des Oberflächenwassers und die Wassertemperatur bis in eine Tiefe von 500 Metern. Das System begann im Dezember 1994 mit der Datenaufzeichnung, zunächst mit 65 Messbojen. Ergänzt werden diese Messungen durch gleichfalls regelmäßige Satellitenmessungen.

El Niño und La Niña werden durch eine Kenngröße charakterisiert – den Multivariate ENSO Index (MEI) –, der aus sechs Messwerten gebildet wird: dem Luftdruck in Meereshöhe, den Komponenten des Windes an der Meeresoberfläche, der Lufttemperatur über der Oberfläche und dem Grad der Bewölkung.

Abb. 1 zeigt die monatlichen Abweichungen der MEI-Werte gegenüber dem Mittelwert der Jahre 1950–1993. Deutlich erkennbar sind die beiden El Niño-Phänomene der Jahre 1982/83 und 1997/98. Gegenwärtig befinden wir uns in einer La Niña-Phase. Sie hatte verstärkenden Einfluss auf die Regenfälle im südlichen Afrika. Erinnerung sei an die verheerenden Überschwemmungen in Mosambik, und die Dürre in den nordafrikanischen Ländern Kenia, Sudan und Äthiopien.

Abb.1 Die monatlichen Abweichungen der MEI-Werte gegenüber dem Mittelwert der Jahre 1950–1993*.



- * Wir danken Dr. Klaus Wolter vom Climate Diagnostic Center, der NOAA, in Boulder, University of Colorado, für die regelmäßige Übermittlung der Daten.

Vorhersagen über das Einsetzen und den Verlauf des El Niño-Phänomens, die wegen seiner weltweiten Auswirkungen so wichtig sind, beruhen auf drei Gruppen unterschiedlicher Modelle.

Am häufigsten werden physikalische Modelle verwendet. Ihre Grundlage sind physikalische Gesetze zur Beschreibung dynamischer Prozesse in Atmosphäre und Ozean. Hinzu kommen empirische Beziehungen. Alle finden ihren Ausdruck in einem die Zirkulation in Atmosphäre und Ozean beschreibenden System mathematischer Gleichungen, das explizit nicht lösbar ist. Wie bei den entsprechenden Modellen zur Wettervorhersage ist eine Lösung nur mit Hilfe rechenaufwendiger Näherungsverfahren möglich.

In statistischen Modellen werden Klimasituationen der Vergangenheit ausgewählt. Sie sollen denen zu Beginn des Vorhersagezeitraums möglichst ähnlich sein. Wie gut daraus resultierende Vorhersagen mit dem tatsächlichen Verlauf übereinstimmen, hängt davon ab, wie gut die Parameter der gegenwärtigen Situation bekannt sind, wie groß die Ähnlichkeit zur damaligen Situation wirklich ist und ob sich damaliger und zukünftiger Klimaverlauf ähneln. Die Entropieanalyse ist eine spezielle statistische Methode, die bereits verschiedentlich bei Klimauntersuchungen eingesetzt wurde (Nicolis et al., 1997, Werner et al., 1999).

In einigen Untersuchungen wird das El Niño-Phänomen auch als chaotischer Prozeß modelliert. Fraedrich (1988) zeigte, dass sich diesem Phänomen

kein niederdimensionaler ENSO-Attraktor zuordnen lässt, sondern dass stochastische bzw. höherdimensionale Effekte dominieren. In einer neueren Untersuchung betrachten Tziperman u.a. (1994) in einem Modell Oszillationen zwischen Atmosphäre und äquatorialen Pazifik, die unter dem Einfluß saisonaler Klimavariationen irreguläre Übergänge erfahren.

Vorhersagen der physikalischen Modelle des National Centers for Environmental Predictions der USA erwarten für die zweite Hälfte des Jahres 2000 eine Abnahme der kalten La Niña-Periode mit normalen Bedingungen zum Jahresende. Die statistischen Modelle sagen eine Fortsetzung der kalten Phase bis zum Jahresende 2000 voraus. (Zur Zeit der Fertigstellung des Manuskripts (Nov. 2000) lagen die MEI-Werte noch im negativen Bereich, d.h. die kalte Phase hielt an.)

Seit 1996 werden in Reading (England), dem Sitz des Europäischen Wetterzentrums, monatlich Vorhersagen über den Klimaverlauf im Südpazifik gemacht. Ihnen liegen einerseits die bereits erwähnten Meßdaten zugrunde andererseits physikalische Modellrechnungen (s. Abb. 2).

Ausgehend von den sich ändernden Messwerten, erfolgen die Modellrechnungen dreimal pro Woche, also 12–15 mal im Monat, jeweils für einen Vorhersagezeitraum von sechs Monaten. In Abb. 2 sind drei Vorhersagen wiedergegeben. Die stark gestrichelten Linien zeigen die Anomalie der Oberflächentemperatur des Wassers (SST) längs des äquatorialen Pazifiks, die bis zum Zeitpunkt der Vorhersage gemessen wurde. Die dünn gezeichneten Linienscharen sind die 12–15 Vorhersagen. Die stark ausgezeichneten Linien zeigen die im Nachhinein während des Vorhersagezeitraums gemessenen Wert.

In Abb. 2a sind die Vorhersagen vom Juni 1998 mit den Temperaturmesswerten des Oberflächenwassers längs des äquatorialen Pazifiks gegenübergestellt. Im Frühjahr 1998 klang das El Niño-Phänomen rasch ab. Obwohl auch die Messwerte eine fallende Tendenz zeigen, sagen die Modellrechnungen eine weit stärkere Temperaturabnahme voraus. Die Messungen in der zweiten Jahreshälfte von 1999 liegen im oberen Bereich der Vorhersagen (Abb. 2b). Auch die Messungen der ersten Monate des Jahres 2000 liegen etwas oberhalb der Vorhersagen (Abb. 2c).

Lineare Modelle ermöglichen sicher nur eine eingeschränkte Vorhersage für dieses komplexe Klimaphänomen. Wir wollen daher eine quantitative Aussage über die Verlässlichkeit der Vorhersage aus einer modellfreien Analyse der Zeitreihe monatlicher MEI-Daten von 1950–2000 ermitteln.

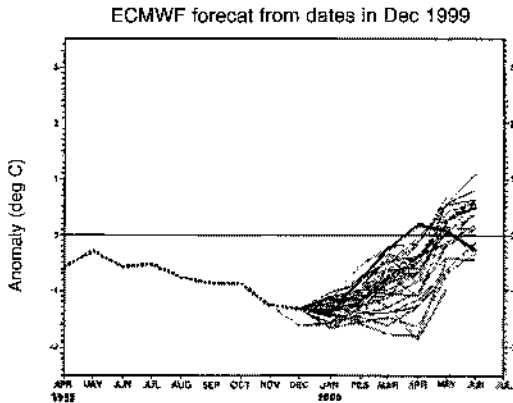
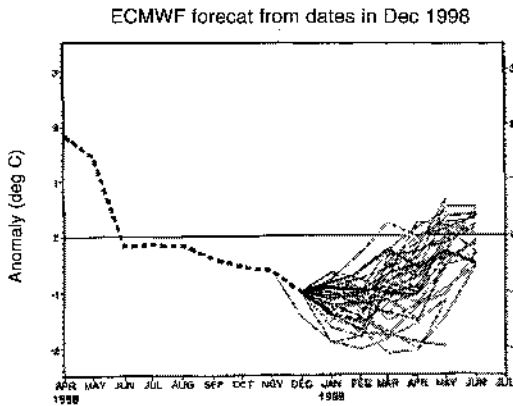
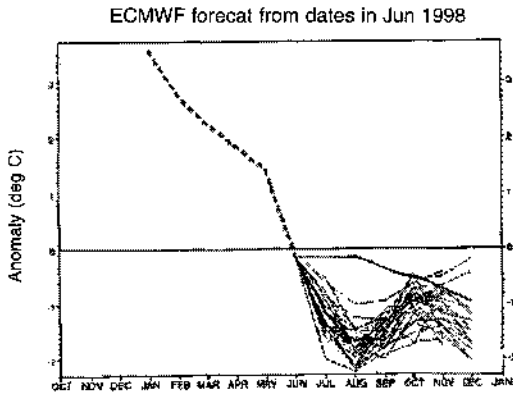


Abb.2a-c.
Vergleich der Vorhersagen eines physikalischen Modells mit den Temperaturmesswerten des Oberflächenwassers längs des äquatorialen Pazifiks.

Dazu kodieren wir die reellwertige Zeitserie MEI in folgender Weise. Wenn der Wert zum Zeitpunkt t , den wir $MEI(t)$ nennen, mehr als ca. 0.1 Punkte über dem Vormonatswert liegt d.h.

$$MEI(t) > MEI(t-1) + 0.124$$

notieren wir ein "M", wenn er mehr als ca.0.1 Punkte unter ihm liegt d.h.

$$MEI(t) < MEI(t-1) - 0.102$$

notieren wir ein "L" und im Intervall dazwischen ein „O“.

So wird die gesamte MEI-Zeitreihe in eine Buchstabenfolge übersetzt, die in vergrößerter Form wesentliche Informationen über den dynamischen Prozess kodiert, man spricht auch von symbolischer Dynamik. Die Länge der Sequenz beträgt 580 Buchstaben, wir nennen sie „mei99.seq“. Der Beginn der Buchstabenfolge sieht wie folgt aus: LOLMLOMMMMLLOMLOMMMM... Auf diese Buchstabenfolge haben wir die Methoden der Entropieanalyse angewendet. In der Tabelle 1 haben wir die nach dem im vorigen Abschnitt berechneten Entropien absoluten und relativen Entropien angegeben. Wie die Daten zeigen, liegen die bedingten Entropien nahe bei Eins, d.h. die Unsicherheit einer Vorhersage ist hoch. Wenn man 4 Monate hintereinander den MEI-Index misst, beträgt die Unsicherheit einer Vorhersage des nächsten Buchstabens immerhin 92%, nach einer Messung von 5 Monaten verbleiben 83% Unsicherheit. Für noch längere Beobachtungsfolgen lässt sich die durch die bedingte Entropie ausgedrückte Unsicherheit nicht mehr angeben. Da die Gesamtfolge mit 580 Buchstaben relativ kurz ist, treten dann starke Längeneffekte auf, die eine Berechnung der relativen Entropien unsicher machen.

n	H_n	n	h_n	Tab. 1
1	0.99999	0	0.99999	Schätzung der Entropien des MEI-Index in diskreter dynamischer Kodierung mit 3 Buchstaben MOL (entspr. "M" = Zunahme > 0,124, "L" = Abnahme < - 0.102, sonst "O"). Ab $n = 6$ ist die Schätzung wegen Längeneffekten unsicher.
2	1.9860	1	0.98599	
3	2.9554	2	0.96938	
4	3.8850	3	0.92967	
5	4.7228	4	0.83775	
6	5.2882	5	0.56541	

Die Möglichkeiten einer Prognose sind dann gut, wenn die bedingten Entropien abfallen. Um konkrete Prognosen zu machen, muss man lokale Regularitäten auffinden. Dafür geben wir drei Beispiele: Wenn man drei mal hintereinander einen starken Abfall findet, so sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Fortsetzungen, die auf LLL folgen:

$$p(M) = 0.10, \quad p(O) = 0.32, \quad p(L) = 0.58.$$

In Worten ausgedrückt, lautet die auf Grund der Daten empirisch gefundene Regel: Wenn der Index dreimal hintereinander fällt, so wird er mit 58% Sicherheit noch ein viertes mal fallen, es bestehen nur 10% Wahrscheinlichkeit, dass er wächst. Beobachtet man drei Anstiege hintereinander, so ist der folgende Schritt mit 48% Wahrscheinlichkeit wieder ein Anstieg und nur in 20% der Fälle folgt ein Abfall. Besonders ausgezeichnet ist die Folge „OMMM“, d.h. Konstanz-Anstieg-Anstieg-Anstieg. Es folgt dann mit 64% Sicherheit ein weiterer Anstieg und nur mit 15% Sicherheit ein Abfall. Wir können hier nicht die möglichen Ursachen dieser empirisch festgestellten Regelmässigkeiten diskutieren.

Tabelle 2 enthält die Häufigkeiten, mit denen die angegebenen MEI-Sequenzen in den Beobachtungen der zurückliegenden fünfzig Jahre auftraten und die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p(L)$, $p(O)$ und $p(M)$ für die drei möglichen Fortsetzungen. Damit läßt sich aus den MEI-Daten dreier vergangener Monate die Wahrscheinlichkeit angeben, welcher Wert des Index im Folgemonat zu erwarten ist.

Wir haben soweit die Vorhersagbarkeit des folgenden Monats diskutiert. Es ist auch (mit geringerer Sicherheit) möglich, etwas über die Vorhersagbarkeit des Index zu sagen, der in k Monaten eintritt ($k > 1$). Wie die Abbildung 3 demonstriert, ist die Vorhersagbarkeit nach $k > 1$ Monaten insgesamt gesehen sehr gering, die Sicherheit der Prognose übersteigt kaum 10%. Interessant sind aber die Maxima, die auf Korrelationen zum Ausgangsmonat hindeute. Nach unseren Berechnungen werden z.B. nach 3, 9, 11, 16 31, 34 und 48 Monaten stärkere Korrelationen beobachtet.

SEQ	Anzahl	p(L)	p(O)	p(M)
LLL	42	0.571	0.333	0.095
LLO	27	0.222	0.333	0.444
LLM	15	0.067	0.667	0.267
LOL	9	0.333	0.222	0.444
LOO	24	0.417	0.417	0.167
LOM	27	0.481	0.185	0.333
LML	12	0.417	0.333	0.250
LMO	21	0.333	0.333	0.333
LMM	15	0.333	0.400	0.267
OLL	22	0.545	0.273	0.182
OLO	14	0.143	0.428	0.357
OLM	18	0.389	0.444	0.167
OOL	23	0.478	0.174	0.348
OOO	30	0.300	0.400	0.300
OOM	20	0.250	0.300	0.450
OML	20	0.350	0.400	0.250
OMO	17	0.529	0.294	0.176
OMM	30	0.333	0.200	0.467
MLL	20	0.300	0.350	0.350
MLO	19	0.000	0.474	0.526
MLM	15	0.267	0.200	0.533
MOL	22	0.364	0.364	0.272
MOO	19	0.211	0.421	0.368
MOM	20	0.100	0.300	0.600
MML	22	0.364	0.318	0.318
MMO	23	0.261	0.304	0.435
MMM	34	0.206	0.324	0.470

Tab. 2

Liste aller 3er-Folgen, ihre Häufigkeiten in me_199_seq und die geschätzten bedingten Wahrscheinlichkeiten der 3 möglichen Fortsetzungen.

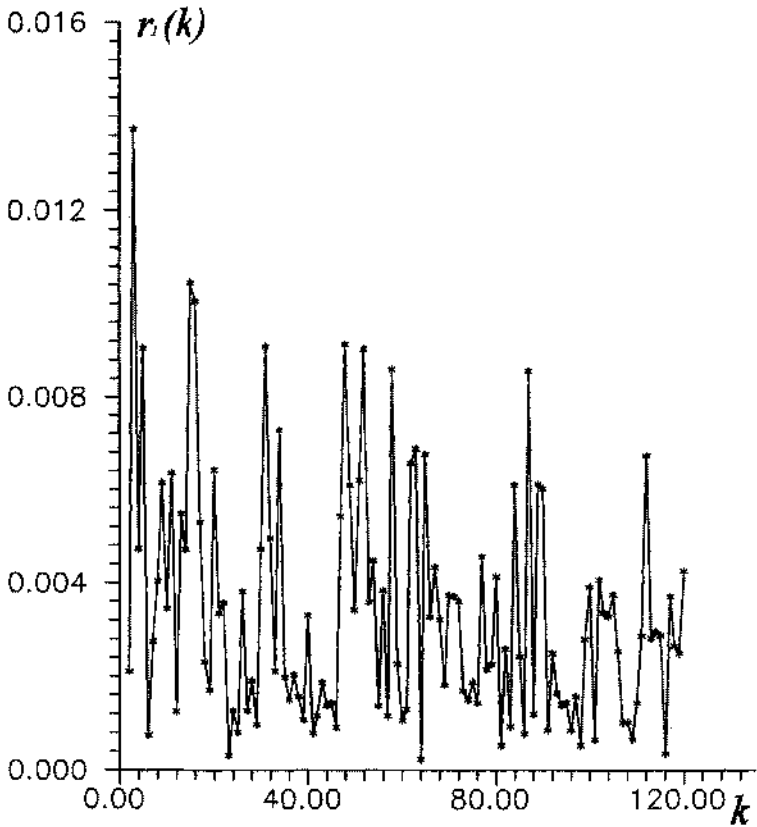


Abb. 3

Vorhersagbarkeit des MEI-Index nach k Monaten auf der Basis einer einmonatigen Beobachtung (ausgedrückt durch die Größe $r_1(k)$ nach Gl. (6)). Die Darstellung für $k = 1-120$ zeigt Maxima (stärkere Korrelationen zum Startzustand) für $k = 3, 9, 11, 16, 31, 34, 48, 87, 113$ Monate.

Auf die Existenz von Korrelationen, die über mehrere Monate hinweg reichen, weisen auch die sogenannten "Correlation Plots" bzw. "Return Plots" hin, die wir in der Abbildung 4 zeigen.

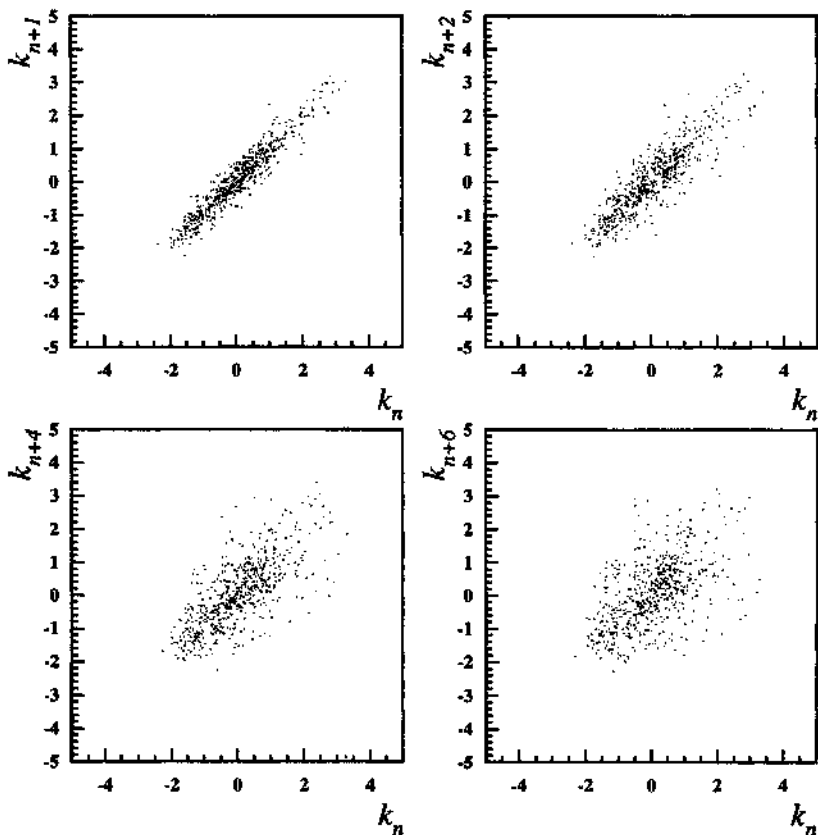


Abb. 4

Correlation Plots für zunehmende Abstände zwischen einem und sechs Monaten. Mit wachsendem zeitlichem Abstand verschwindet die Korrelation.

Schliesslich können wir auch zeigen, dass die Vorhersagbarkeit über die Jahre hin keine konstante Grösse ist. Wir haben dazu die bedingten Entropien über jeweils plus/minus 15 Monate gemittelt über der Zeit aufgetragen und das Resultat in der Abb. 5 aufgetragen.

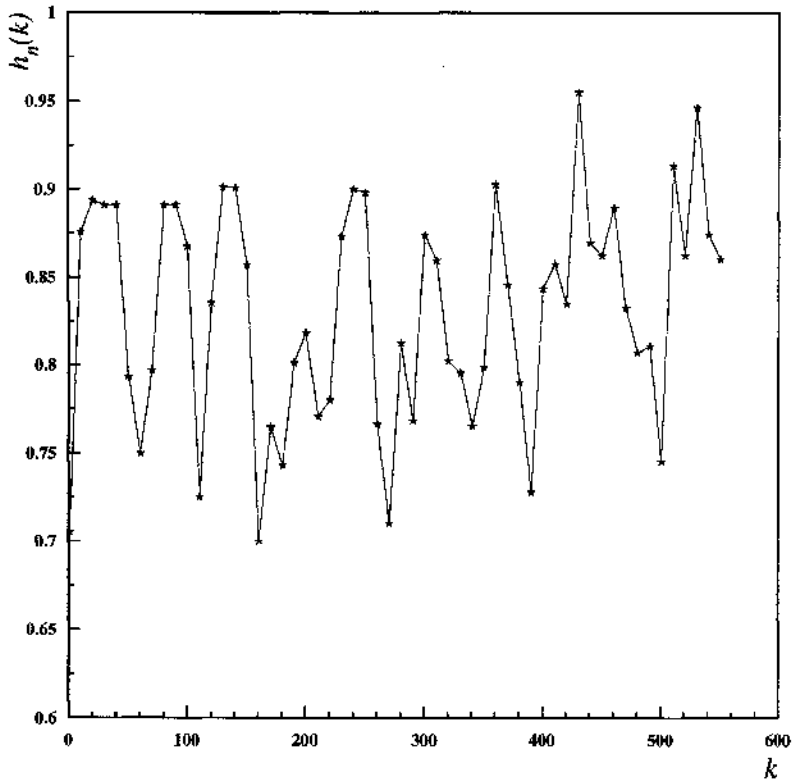


Abb. 5

Unsicherheit der Vorhersage eines Monats (siehe Gl. 6) nach einer zweimonatigen Beobachtung.

3. Bedingte Entropie und Vorhersagbarkeit von Finanz-Zeitreihen

Wir haben die zeitliche Entwicklung des täglich von der Frankfurter Börse publizierten DAX-Index über rund 31 Jahre nämlich von 1959 - 1990 betrachtet. Dabei haben wir der Periode 1959-1983, in welcher der DAX noch fast linear ansteigt, besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Eine Darstellung der neueren Entwicklung des DAX, die durch starke Fluktuationen bei fallender Tendenz gekennzeichnet ist, zeigt die Abbildung 6.

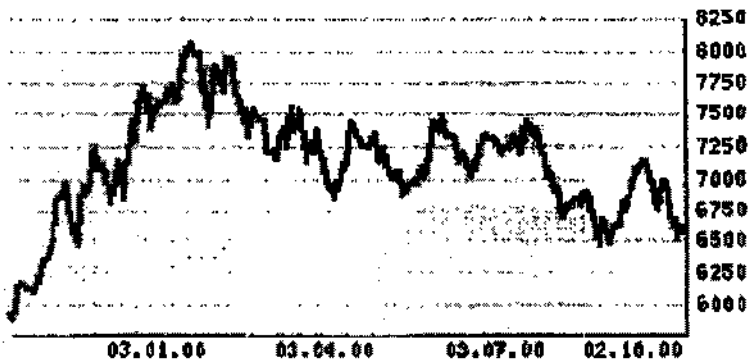


Abb. 6

Entwicklung des DAX in der Zeit zwischen Oktober 1999 und Oktober 2000.

Unsere statistische Analyse wurde für die Zeit 1959-1990 durchgeführt, die hauptsächlich durch die relativ „konservative“ Entwicklung von 1959 bis 1983 geprägt wird. Die reellwertige Zeitreihe $Z(t)$ wurde auf 2 verschiedene Weisen diskret umkodiert:

Variante A: Ein Tageswachstum um mehr als 2,5 Punkte wurde durch ein „M“ kodiert. Ein Tagesabfall um mehr als 2,5 Punkte wurde durch „L“ kodiert und eine ruhige Tagesphase im Bereich $(+2,5; -2,5)$ wurde durch ein "0" kodiert. Die so erzeugte Sequenz, die eine Länge von 7815 Buchstaben hat, haben wir 'dax33.seq' genannt und mit Methoden der Entropieanalyse bearbeitet.

Unsere Sequenz beginnt wie folgt:

„OLMLMLMLOMOLLOOLLMMMLMLMOLLMML ...“

Variante B: Für $Z(t) > Z(t-1) \times 1,0034$ notieren wir ein "M", für $Z(t) < Z(t-1) \times 0,9969$ notieren wir ein "L" und sonst ein "0". Die so generierte Sequenz erhielt die Bezeichnung 'dax3rel8.seq' und wurde ebenfalls analysiert.

n	H_n	n	h_n
1	0.999	0	0.999
2	1.972	1	0.973
3	2.943	2	0.971
4	3.914	3	0.969
5	4.883	4	0.968
6	5.851	5	0.960
7	6.811	6	0.953
8	7.764	7	0.849

Tab. 3

Schätzung der Entropien des DAX-Index in diskreter dynamischer Kodierung Typ A mit 3 Buchstaben MOL (entspr. relative Änderungen +/- 2,5) Länge der Sequenz: 7815,

Name: *dax33.seq* = OLMLMLMLOMOLLOOLLMMMLMLMOLLMML

Ab $n = 8$ ist die Entropie-Schätzung wegen Längeneffekten unsicher.

Die Tabelle 3 zeigt eine Schätzung der absoluten und der bedingten Entropien der nach Variante A kodierten DAX-Zeitreihe. Als Einheit wurde \log_3 gewählt. Die bedingten Entropien weichen nur wenig von 1 ab, was auf einen hohen Grad von Zufälligkeit, eine geringe Vorhersagbarkeit hindeutet.

Der DAX des folgenden Tages kann nur dann auf Grund statistisch gesicherter Regularitäten vorhergesagt werden, wenn die bedingten Entropien wesentlich kleiner als Eins sind. Wie die Tabelle 3 zeigt, ist selbst nach Beobachtung von 7 aufeinanderfolgenden Tagen, die Unsicherheit der Prognose noch etwa 95%. Die einzige Chance konkrete Prognosen zu machen besteht darin, lokale Regularitäten bei der Entwicklung des Index aufzufinden. Dafür geben wir zwei Beispiele (Molgedey und Ebeling, 2000): Wenn man

drei mal hintereinander einen starken Abfall findet, dann einen Aufschwung gefolgt von einem Abfall, so sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Fortsetzungen, die auf LLLML folgen:

$$p(M) = 0.36, \quad p(O) = 0.17, \quad p(L) = 0.46.$$

Wir müssen also mit 46% Wahrscheinlichkeit mit einem Abfall rechnen. Beobachtet man die Folge LMLML so sind die entsprechenden bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Fortsetzung:

$$p(M) = 0.29, \quad p(O) = 0.20, \quad p(L) = 0.51.$$

In Worten ausgedrückt, lautet diese auf Grund der Daten empirisch gefundene Regel: Wenn der Index zwei Aufschwünge macht, die von Abschwüngen gefolgt werden, so wird er mit 51% Sicherheit am folgenden Tage fallen. Es besteht nur 28% Wahrscheinlichkeit, dass er wächst. In der Regel sind die Unterschiede zwischen den Wahrscheinlichkeiten der möglichen Fortsetzungen nicht so groß, was heisst, dass eine Prognose einem Würfelspiel entspricht. Auf jeden Fall lassen sich einige Regularitäten statistisch sichern (Molgedey und Ebeling, 2000). Die Ursachen dieser empirisch festgestellten Regelmässigkeiten sind offenbar nicht bekannt und eine Entropieanalyse kann darüber auch grundsätzlich keine Aussagen machen, sie berichtet nur über statistisch signifikante Regelmässigkeiten der Abfolge.

Wir betrachten nun die Möglichkeiten einer Vorhersage des Index an Tagen, die weiter in der Zukunft liegen.

Die Abb. 7 zeigt die nach Gl. (6) berechnete bedingte Vorhersagbarkeit der Zeitreihe. Ein Tag wird beobachtet und der (diskret kodierte) Zustand im Abstand von k Tagen vorhergesagt. Die Vorhersagbarkeit ist sehr klein, im allgemeinen schlechter als 0.01 d.h. 1%, es treten aber deutliche Maxima im Abstand von 8, 16, 24 und 33 Tagen auf, die auf Periodizitäten hindeuten.

In einer anderen Arbeit wurde der DOW JONES Index mit einer ähnlichen Kodierung untersucht (Molgedey und Ebeling, 2000). Der DOW JONES zeigt weniger stark ausgeprägte Kurzzeit-Maxima, dafür aber Langzeitoszillationen im Rhythmus von etwa 400 bzw. 800 Tagen (Ebeling, Jimenez-Montano und Pohl, 2000).

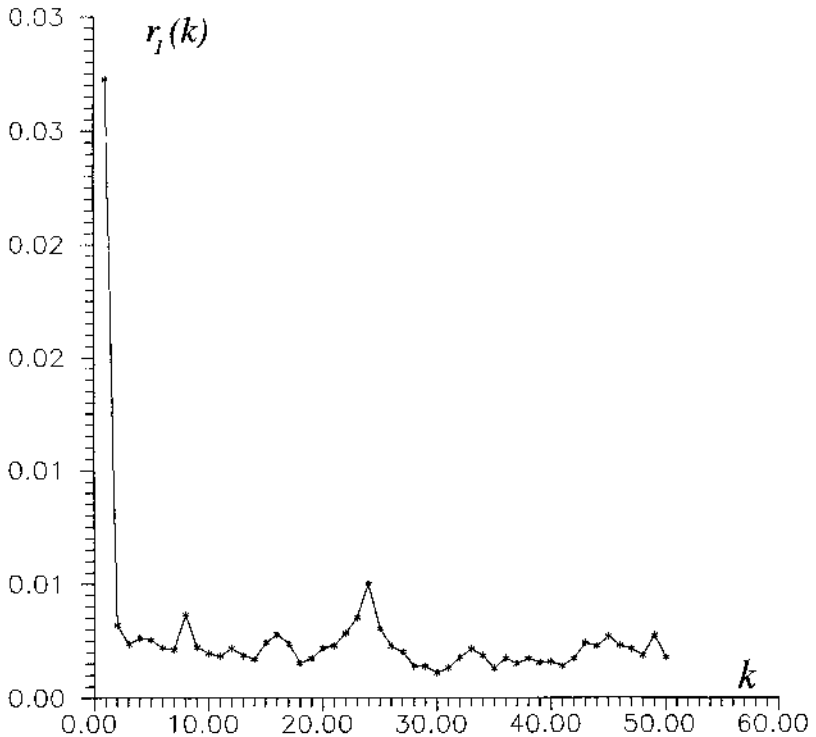


Abb. 7

Vorhersagbarkeit des DAX-Index nach k Tagen auf der Basis der Beobachtung eines Tages.

4. Zusammenfassung

Zusammenfassend darf konstatiert werden, daß die Grösse Entropie nicht nur eine zentrale Grösse der Physik ist, sondern dass sie auch mit Erfolg für die Vorhersage auf Grund von vorliegenden Daten eingesetzt werden kann. Die Entropieanalyse ist eine statistische Methode, die auf einer Auswertung der vorliegenden Daten beruht. Die Methode ist weitgehend frei von modellmässigen Voraussetzungen, bis auf die Annahme einer hinreichenden Stationarität

der Daten. Da eine Entropie-Analyse mit Hilfe Shannonscher Methoden mit einem verhältnismässig geringem Aufwand verknüpft ist, sollte sie in jedem Falle als Ergänzung der häufig sehr aufwändigen Entwicklung und rechnerischen Analyse dynamischer Modelle herangezogen werden.

Literatur

- Bernhardt, K.-H. und W. Böhme, Klima und Menschheit. Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät Heft 1/2 (1994) S. 51–90
- Ebeling, W., Chaos, Ordnung und Information. Urania-Verlag Leipzig und Verlag H. Deutsch, Frankfurt a.M. 1989
- Ebeling, W., A. Engel und R. Feistel, Physik der Evolutionsprozesse. Akademie-Verlag Berlin 1990
- Ebeling, W., Entropie, Vorhersagbarkeit und nichtlineare Dynamik. Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät Heft 1/2 (1994) S. 33–50
- Ebeling, W. und R. Feistel, Chaos und Kosmos, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford 1994
- Ebeling, W., J. Freund und F. Schweitzer, Komplexe Strukturen: Entropie und Information, Teubner-Verlag, Stuttgart-Leipzig 1998
- Ebeling, W., und C. Frömmel, Entropy and predictability of information carriers, *BioSystems* 46 (1998) S. 47–55
- Ebeling, W., Jimenez-Montano, M.A., Pohl, T. In Karmeshu (ed) *Entropy measures, maximum entropy principles and emerging applications*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 2000
- Fraedrich, K., El Nino/Southern oscillation predictability, *Monthly Weather Review* 116 (1988), S. 1002–1012
- Herzel, H. et al., *Phys.Rev. E* 50 (1994) S. 5061–5071
- Haken, H., *Erfolgsgeheimnisse der Natur*, Dt. Verlagsanstalt Stuttgart 1981
- Jaglom, A.M., Jaglom, I.M., *Wahrscheinlichkeit und Information*. Dt. Verlag der Wiss., Berlin 1984
- Lanius, K. *Globaler Wandel*. Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät. Heft 1/2 (1994), S. 7–31
- Lanius, K., *Die Erde im Wandel*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford 1995

- Molgedey, L. und W. Ebeling, Local order, entropy and predictability of financial time series,
Eur. Phys. J. B 15 (2000), S. 733-737
- Nicolis, G. und I. Prigogine, Die Erforschung des Komplexen, Piper-Verlag München-Zürich 1987.
- Nicolis, C., Ebeling, W., Baraldi, C., Markov processes, dynamic entropies and the statistical prediction of mesoscale weather regimes, Tellus 49A (1997) 108-118.
- Prigogine, I. und I. Stengers, Das Paradox der Zeit, Piper-Verlag München-Zürich 1993.
- Ruelle, D., Zufall und Chaos, Springer-Verlag, Berlin u.a. 1993.
- Shannon, C.E., Prediction and entropy of printed English, Bell System Technical Journal 30 (1951) S. 50-64.
- Tziperman, E. et al. Science 264 (1994), S. 72-74.
- Werner, P.C., Gerstengarbe, F.-W., und W. Ebeling, Changes in the probability of sequences, exit time distribution and dynamical entropy in the Potsdam temperature record, Theor. Appl. Climatol. 62 (1999) S. 125-132.