Leibniz Online, Nr. 26 (2017)
Zeitschrift der Leibniz-Sozietät e. V.
ISSN 1863-3285

Ewald Gerth

Die Arbeiten Karl Schwarzschilds zur photographischen Photometrie der Gestirne und ihre Bedeutung für die Theorie des photographischen Prozesses [1]

Veröffentlicht: 08.02.2017

Bei der Würdigung der hervorragenden, sogar epochemachenden wissenschaftlichen Leistungen des großen Astronomen und Physikers KARL SCHWARZSCHILD (1873-1916) auf den verschiedensten Gebieten der experimentellen und theoretischen Astrophysik, der Quantenphysik, der Relativitäts- und Gravitationstheorie soll eine im Rang scheinbar weniger bedeutungsvolle Leistung nicht unerwähnt bleiben: die Entdeckung und Formulierung eines grundlegenden Schwärzungsgesetzes für photographische Schichten; denn diese Entdeckung trug dazu bei, den Namen SCHWARZSCHILD in weiten Kreisen von Physikern, Chemikern, Biologen, Technikern usw., die sich der Photoschicht als photometrisches Messinstrument bedienten, bekannt zu machen – allein schon durch die zu termini technici gewordenen Begriffe „SCHWARZSCHILD-Effekt“, „SCHWARZSCHILD-Gesetz“ und „SCHWARZSCHILD-Exponent“.

Befasst man sich mit Schwarzschilds Arbeiten zur *Photometrie der Gestirne* eingehender, so erkennt man schnell, dass es sich auch hierbei um eine Leistung von hohem wissenschaftlichen Rang handelt, die, ebenso wie viele andere SCHWARZSCHILDsche Arbeiten, zukunftweisend wurde. Zwar war es wohl nicht Schwarzschilds Absicht, die Photoschicht um ihrer selbst willen zu untersuchen. Er hatte vielmehr ein mittelbares Interesse an der Aufdeckung der Gesetzmäßigkeiten der Schwärzungsfunktion, das durch die von ihm vorgeschlagene Verwendung der photographischen Schicht als Strahlungsdetektor für photometrische Zwecke in der Astrophysik motiviert war.

Die photographische Methode der Photometrie von Sternen versprach gegenüber der bis dahin angewandten visuellen Methode einige schwerwiegende Vorteile, die besonders in der Objektivität der Messung, in der simultanen dokumentarischen Fixierung vieler Messergebnisse sowie in der Ausdehnung der Messung auf den blauen Spektralbereich lagen. Dem stand aber seinerzeit noch die schlechte Reproduzierbarkeit photographischer Aufnahmen entgegen – vor allem auf Grund noch ungenügender Kenntnisse über die Zusammenhänge zwischen Belichtung und Schwärzung der Photoschicht, so dass die Messgenauigkeit der photographischen Methode nicht an die der visuellen Methode heranreichte. Die photographische Methode musste einen lückenlosen Anschluss an die visuellen Messungen gewährleisten; sie erforderte darüber hinaus die Schaffung einer selbständigen Intensitätsskala für blaues Licht.

Im Rahmen seiner Tätigkeit als Assistent an der v. KUFFNERschen Sternwarte in Wien-Ottakring hatte es sich SCHWARZSCHILD zur Aufgabe gestellt, das Verhalten der photographischen Schicht unter den Bedingungen ihrer Anwendung in der astrophysikalischen Messtechnik labormäßig zu untersuchen und zuverlässige Reduktionsmethoden für photographische Sternaufnahmen auszuarbeiten. Diese Arbeit diente ihm 1899 zur Habilitation an der Universität München [1].

[1] Ursprünglich vorgetragen auf dem Festkolloquium zum 100. Geburtstag von Karl Schwarzschild am 9. Oktober 1973 am Astrophysikalischen Observatorium Potsdam (Zentralinstitut für Astrophysik der Akademie der Wissenschaften der DDR).

1. Die Formulierung des Schwärzungsgesetzes

In grober Übersicht erbrachten Schwarzschilds Untersuchungen folgendes: Das bis dahin auch für photographische Schichten als gültig angesehene BUNSEN-ROSCOEsche Reziprozitätsgesetz, wonach zur Erzielung konstanter photochemischer Wirkungen Intensität E und Zeit t der Belichtung zueinander in einem Reziprozitätsverhältnis stehen,

$$E \cdot t = \text{const}, \tag{1}$$

wurde von SCHWARZSCHILD für den von ihm untersuchten Bereich der Belichtung niedriger Intensität und langer Zeit auf die mit der experimentellen Erfahrung gut übereinstimmende Form

$$E \cdot t^p = \text{const} \tag{2}$$

gebracht.

Abweichungen vom Reziprozitätsgesetz hatten schon vor SCHWARZSCHILD ABNEY, MICHALKE, MIETHE und SCHEINER beobachtet, deren Versuchsergebnisse sich – neben SCHWARZSCHILDS eigenen Ergebnissen – gut durch SCHWARZSCHILDS Formel darstellen ließen.

SCHWARZSCHILD zeigte in einer mathematischen Betrachtung, dass die Form der Schwärzungsfunktion

$$S = f\,(Et^p) \tag{3}$$

der Form

$$S = f\,(E,t) \tag{4}$$

an Allgemeingültigkeit nicht nachsteht, wenn man den Exponenten p als Funktion von E und t ansieht. Es ergibt sich aber der Vorteil, dass wenigstens näherungsweise

$$p = \text{const} \tag{5}$$

ist. Er fand, dass der Exponent p für verschiedene Sorten photographischer Schichten unterschiedliche Werte annimmt, immer aber zwischen $0,5 < p < 1$ liegt.

Der Gewinn an Größenklassen durch Verlängerung der Belichtungszeit bei Sternaufnahmen enthält den SCHWARZSCHILD-Exponenten p als Faktor:

$$m_1 - m_2 = 2,5p \log \frac{t_1}{t_2}. \tag{6}$$

Bilden die Belichtungszeiten also das gleiche Verhältnis wie eine Größenklasse, so entspricht dies noch nicht einer Größenklasse der Sternhelligkeit, da $p < 1$ ist. Der Exponent p setzt die Wirksamkeit einer Verlängerung der Belichtungszeit in zunehmendem Maße herab. Entgegen dem BUNSEN-ROSCOEschen Reziprozitätsgesetz ist es nach dem SCHWARZSCHILD-Gesetz nicht möglich, die Verminderung der Lichtintensität auf die Hälfte durch Verdopplung der Belichtungszeit auszugleichen.

2. Der Durchmesser der Sternbilder

SCHWARZSCHILD zeigte, dass auch das Durchmessergesetz fokaler Sternbilder der gleichen Gesetzmäßigkeit bezüglich der Zeitvariation der Belichtung folgt. Durch das gesamte Abbildungssystem wird zwar das Licht des Sternes über eine gewisse Fläche der Photoschicht schon nach einer von den Eigenschaften des Teleskops und von der Luftunruhe hervorgerufenen Verteilungsfunktion $p(r)$ gestreut; jedoch, um eine definierte Verteilungsfunktion zu erhalten, führte SCHWARZSCHILD die *extrafokale Abbildung* ein. Die Helligkeit des Sterns folgte nun über eine Schwärzungsskala aus dem Durchmesser des Sternbildscheibchens.

Zur Definition des Durchmessers wird eine bestimmte Schwärzung des Schwärzungsfleckes der photographischen Sternabbildung zugrundegelegt, deren geometrischer Ort für

$$[\varphi(r)E\,]t^p = \text{const} \tag{7}$$

ein Kreis ist. Die geometrische Figur einer solchen selektierten Schwärzung, die sich durch spezielle photographische Verfahren hervorheben lässt, wird als „Äquidensite“ bezeichnet.

3. Doppel- und Mehrfachbelichtungen

SCHWARZSCHILD befasste sich auch mit dem Einfluss der Vorbelichtung, der Nachbelichtung und dem Intermittenzeffekt bei photographischen Aufnahmen. Die Vorbelichtung (genannt: „Hypersensibilisierung“[2]) und die Nachbelichtung (genannt: „Latensifikation“) waren für Aufnahmen schwacher Sternbilder wichtig, da hierdurch zu der Belichtung noch eine weitere Energie hinzugefügt wurde, durch welche die Ansprechschwelle im sogenannten „Durchhang“ der Schwärzungskurve überschritten wird. Auch die Wirkung der intermittierenden Belichtung wurde untersucht, da die Belichtung stellarer Objekte durch den Vorüberzug von Wolken häufig unterbrochen wurde und man hoffte, durch Fortsetzung der Belichtung in mehreren Nächten die Effektivität der Belichtung vergrößern zu können. Die Untersuchung von Doppelbelichtungen wurde auch auf kurze periodische Intervalle der Mehrfachbelichtung ausgedehnt, wie es das SCHEINER-Sensitometer mit rotierender Sektorenscheibe erforderte.

Zwar stellte man fest, dass auch für die unterbrochene Belichtung Abweichungen vom Reziprozitätsgesetz Gl. (1) auftreten; diese ließen sich aber nicht so einfach in die SCHWARZSCHILD-Formel Gl. (2) einfügen. Offenbar treten in den Dunkelphasen zwischen den Teilbelichtungen noch Prozesse auf, die das Endergebnis der Schwärzung beeinflussen. Auch Art und Zeit der Lagerung der belichteten Photoplatten bis zur Entwicklung ist von Bedeutung.

Für die Unterbrechung der Belichtung in mehrere Abschnitte, also auch für Doppel- und Mehrfachbelichtungen, erwies sich die Potenz der Zeit t^p mit einem vielleicht noch zeitabhängigen Exponenten $p(t)$ als ungeeignet: die Zeit t musste möglichst linear in den analytischen Ausdruck eingehen. Das ließ sich leicht erreichen, indem aus Gl. (2) den auf die Zeit bezogenen Exponenten auf die Intensität umlagerte:

$$E^q\, t = \text{const} \tag{8}$$

Der „andere“ SCHWARZSCHILD -Exponent q steht damit zu p in einem Reziprozitätsverhältnis

$$p \cdot q = 1. \tag{9}$$

Eigentlich scheint es nun gleichgültig zu sein, ob man Gl. (2) oder Gl. (8) verwendet. Gl. (8) hat aber den entscheidenden Vorzug, dass die Zeit linear vorangeht. Damit ist die Anknüpfung von Belichtungen – wie beim Intermittenz-Effekt – möglich. Für die Mehrfachbelichtung gilt

$$\sum_{i=1}^{k} E_i^q t_i = E_g^q t_g, \tag{10}$$

wenn $t_a = Y,^k\, t_i$ die Gesamtzeit mit den Einzelbelichtungszeiten t_i und E_i die gemittelte Gesamtintensität E_a ist. Der Exponent q konnte in den einzelnen Belichtungsbereichen auch unterschiedlich sein, wird aber als konstant in allen Bereichen angenommen. Nach dem für Summen gültigen Kommuta-

[2] Zur Hypersensibilisierung wurden die Photoplatten auch physikalisch und chemisch vorbehandelt.

tivgesetz müsste die Wirkung der Gesamtbelichtung von der Reihenfolge der Einzelbelichtungen unabhängig sein. Für unterschiedliche Bereiche von Intensität und Zeit der Einzelbelichtungen sind jedoch Doppel- und Mehrfachbelichtungen *nichtkommutativ* – ein Phänomen, das seinerzeit noch nicht erklärt werden konnte.[3]

4. Die Abweichung vom Reziprozitätsgesetz

Der Effekt des vom Reziprozitätsgesetz abweichenden Verhaltens der Photoschicht – der SCHWARZSCHILD-Effekt, wie wir ihn heute nennen – ist aber nicht nur für die photometrische Messpraxis von Interesse. Schon SCHWARZSCHILD erkannte die grundlegende Bedeutung dieses Effektes für die Erforschung der durch die Belichtung in der photographischen Emulsion ausgelosten Prozesse. Deshalb hielt er es für notwendig, auch den außerhalb des für die Astrophysik allein interessanten Gültigkeitsbereiches der Gl. (2) liegenden Bereich der Kurzzeitbelichtung zu untersuchen.

Hiermit beauftragte SCHWARZSCHILD [1] seinen Mitarbeiter KRON [2], der mit umfangreichen photographischen Experimenten einen sehr großen Belichtungsbereich erfasste und für die „Kurven konstanter Schwärzung“ (heute: „KRONsche Reziprozitätsfehlerkurven“) analytische Beziehungen aufstellte, mit denen sich die Messdaten gut darstellen ließen. Die symmetrische Form der Funktion wurde von HALM [3] durch die Catenaria (Kettenlinie) dargestellt.

Das SCHWARZSCHILD-Gesetz Gl. (2) ergibt sich für S = const nach diesen Formeln als Näherung für kleine Intensitäten und lange Belichtungszeiten.

Die KRON-HALMschen Formeln haben aber – ebenso wie die SCHWARZSCHILD -Formel – von ihrer Genesis her nur die Bedeutung von Interpolationsformeln, die aus den experimentellen Daten deduziert wurden, ohne dass dafür eine physikalische Begründung angegeben werden konnte. So schließt SCHWARZSCHILD seine Habilitationsschrift[4] mit den Worten:

> „Es braucht nicht erst gesagt zu werden, wie viel auf diesem Gebiete noch zu wünschen und zu tun ist. Als wichtigstes, noch ausstehendes Problem erscheint namentlich die Entdeckung der Ursachen, von denen die Variabilität des Exponenten p abhängt.“

Die Theorie des photographischen Prozesses war zu jener Zeit noch wenig entwickelt. Andererseits lag es aber seit der Auffindung der photographischen Gesetzmäßigkeiten durch SCHWARZSCHILD und KRON auf der Hand, dass alle aus einer Theorie des photographischen Prozesses folgernden Ergebnisse mit den SCHWARZSCHILD- KRONschen Formeln in Einklang stehen müssten. So haben diese Formeln, insbesondere das SCHWARZSCHILD-Gesetz für konstante Schwärzungen Gl. (2), bis zum heutigen Tage die Bedeutung eines *strengen Prüfsteins einer jeden Theorie des photographischen Prozesses,* mit der der Zusammenhang zwischen Belichtung und Schwärzung der Photoschicht beschrieben werden soll.

5. Neuere Theorien zur Deutung des Schwarzschild-Effekts

Es gilt heute als gesichert, dass der SCHWARZSCHILD-*E f f e k t* durch *physikalische Vorgange im Kristallgitter des Silberhalogenids* verursacht wird und dass er mit dem geometrischen Aufbau der Schicht, mit der Korngrößenverteilung in der Emulsion und mit den Besonderheiten der Entwicklung – wie früher häufig angenommen wurde – nichts zu tun hat. Die moderne Festkörperphysik liefert klare Vorstellungen über die infolge des Photoeffektes im Kristallgitter erzeugte Elektronenkonzentration, über die Fehlordnungen im Kristallgitter, über die Bewegung der Elektronen und Zwischengitterionen, über Umladungs- und Konglomerisationsvorgänge usw. Es besteht auch Einigkeit darüber, dass die Reduktion eines Silberhalogenidkorns im Entwicklungsbad schon von nur e i n e m Entwick-

---

[3] Mit der Hypersensibilisierung der Photoschicht durch Blitz-Vorbelichtung und Normal-Nachbelichtung (vice versa) hatte schon Schwarzschild die *Nichtkommutativität von Doppelbelichtungen* bemerkt.

[4] Karl Schwarzschild: Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne. Publikationen der v. Kuffnerschen Sternwarte Wien-Ottakring, 5 (1899), C 1-54 (Habilitationsschrift)

lungskeim auf der Kornoberfläche ausgelöst wird (Literaturübersicht in [7]).

Ohne große Theorie liefert bereits eine Plausibilitätsbetrachtung wesentliche Erkenntnisse: Aus einer Reihe experimenteller Befunde ist zu schließen, dass der Keim mehrere Aufbaustufen durchläuft, ehe er entwickelbar wird. Offenbar treten während der Belichtung unter der Wirkung der Photoelektronen mehrere Silberionen sukzessive zu einem Konglomerat zusammen, das erst von einer Mindestanzahl n der Atome an entwickelbar wird. Es ist naheliegend, dass diese Mindestanzahl $n = 4$ sein muss, denn erst 4 Punkte lassen sich zu einem räumlichen Gebilde anordnen, das einem metallischen Mikrokristall von 4 Silberatomen entspricht, der dem Silberhalogenid-Makrokristall aufsitzt und die Schutzpotentialschicht an der Phasengrenze Halogenidkristall/Entwickler durchstößt. Der Aufbau der Keime lässt sich somit als eine kinetische Reaktion von 4 Stufen darstellen [4].

Die stochastisch bedingte Übergangswahrscheinlichkeit zu jeder Stufe ist der für die Umladungsvorgänge erforderlichen Elektronenkonzentration N im Kristallgitter und der Einwirkungszeit t der Elektronen, also insgesamt $N \bullet t$, proportional. Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von der niedrigsten Keimstufe bis zum entwickelbaren Keim ist dann nach der Produktregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Potenz $(N\,t)^n$ proportional. Für konstante Wirkungen gUt somit

$$N^n t^n = \text{const.} \tag{11}$$

Nimmt man nun an, dass die erste Keimstufe sehr instabil sei, so stellt sich im Verlauf der Reaktion zwischen der Ausgangsstufe und der ersten Keimstufe bald ein Gleichgewichtszustand ein, in dem keine zeitliche Abhängigkeit mehr vorliegt, der somit zur Verringerung der zeitlichen Ordnung um eine Stufe führt; also gilt dann:

$$N^n t^{n-1} = \text{const.} \tag{12}$$

Dies ist bereits die Grundform des SCHWARZSCHILDschen Schwärzungsgesetzes für konstante Schwärzungen, welche allein aus der Reaktionsfolge der Keimstufen folgt, ohne dass bisher die Belichtung betrachtet wurde.

Bei einer Belichtung konstanter Intensität befindet sich die Elektronenkonzentration N wegen des Verschwindens der vom Photoeffekt ständig erzeugten freien Elektronen durch Fallen und Rekombination mit Defektelektronen im Gleichgewicht. Bei niedriger Intensität - also im Belichtungsbereich des normalen SCHWARZSCHILD -Effektes - ist die Elektronenkonzentration N der Intensität E proportional. Man erhält somit

$$E^n t^{n-1} = \text{const} \tag{13}$$

oder

$$E t^p = \text{const} \tag{14}$$

mit

$$p = 1 - \frac{1}{n}. \tag{15}$$

Für $n = 4$ ergibt sich $p = 0,75$ in guter Übereinstimmung mit dem von SCHWARZSCHILD gefundenen häufigsten Wert $p = 0,76$.

Auf der Grundlage der Festkörperphysik lässt sich eine geschlossene Theorie der Schwärzungsfunktion aufbauen, die – ebenso wie die hier dargelegten Plausibilitätsbetrachtungen, aber in einer exakten Herleitung – das SCHWARZSCHILDsche Schwärzungsgesetz ergibt. Die näheren Ausführungen über diesen Gegenstand sind in einer Abhandlung enthalten,[5] die SCHWARZSCHILDS späterem Amtsnachfolger, dem Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums Potsdam, Professor Dr. J. WEMPE, anlässlich SCHWARZSCHILDS 100. Geburtstag am 9. Oktober 1973 gewidmet ist [6].

6. Folgerungen aus der Theorie für die Praxis

Von besonderem Interesse für die astrophysikalische Messpraxis sind aber Folgerungen aus den Grundlagen der Theorie. Um einen möglichst großen Gewinn an Größenklassen bei zeitlicher Verlängerung von Sternaufnahmen zu erzielen, ist der Astronom an Photoschichten mit einem SCHWARZSCHILD-Exponenten nahe 1 interessiert. Hieraus ergibt sich die Forderung an die Hersteller von Photomaterialien, Forschungsarbeiten mit dem Ziel durchzuführen, den SCHWARZSCHILD-Exponenten der Photoschichten zu vergrößern. Dies bezieht sich auf die Emulsionsherstellung, aber auch auf spezielle Verfahren der Behandlung der Photoschichten vor der Belichtung – z.B. durch die bereits erwähnte *Hypersensibilisierung*.

Gemäß der Theorie kommt es darauf an, dass sich in der Emulsion möglichst a l l e Keime auf einer Reaktionsstufe befinden, die um eine Stufe niedriger ist als die kritische Keimstufe, bei der die Entwicklung ausgelöst wird. Die Rückreaktionen, die nur beim Übergang in den unteren Keimstufen den SCHWARZSCHILD-Effekt hervorrufen, haben beim Übergang von der letzten unkritischen Keimstufe zur ersten kritischen Keimstufe keine Bedeutung. Bei der Konzentration aller Keime in der letzten unkritischen Stufe würde also der SCHWARZSCHILD-Effekt wegfallen und auch die Empfindlichkeit der Photoschicht groß sein, da die Keime dann mit der relativ geringen Belichtungsenergie von nur einem Stufenübergang in den entwickelbaren Zustand versetzt würden.

Dieses Ziel ist bei den hochempfindlichen Emulsionen der Gegenwart schon durch Reifungs- und Sensibilisierungsverfahren zu einem gewissen Grade erreicht worden. Auf der Grundlage der genauen Kenntnis der physikalischen Zusammenhänge könnte man aber sicher noch zielgerichteter an der Verbesserung der photographischen Schichten für Astro-Zwecke arbeiten. Die besonderen Eigenschaften der photographischen Schicht als flächenhafter simultaner Akkumulator für Lichteinwirkung machen sie weiterhin unverzichtbar für die astrophysikalische Messtechnik.

Die Theorie liefert aber noch viel mehr Einsichten: Die Entstehung des photographischen Bildes nach der Belichtung und der dazwischen stattfindenden Verarbeitung in der Dunkelkammer mit Entwicklung, Zwischenwässerung und Fixierung ist ein Prozess; und ein Prozess ist ein *Vorgang in der Zeit.* Und so ist auch die Entstehung des Latenten Bildes während der Belichtung der photographischen Schicht – *ein Prozess.*

7. Der stufenförmige Aufbau der Entwicklungskeime

Während der Belichtung verändern sich Zusammensetzung, Mengenverhältnisse und gegenseitige Affinität der Reaktionspartner im Reaktionsraum, dem Kristallgitter des Silberbromids, also der freien Elektronen und Defektelektronen und der sich bildenden Konglomerate metallischen Silbers, die „Keime“. Dabei treten Gleichgewichtsreaktionen zwischen den Partnern auf, die zur Reduzierung der Reaktionsordnung n der Zeit t führen.

---

[5] Analytische Herleitung des SCHWARZSCHILDschen Schwärzungsgesetzes aus der Belichtungsmatrix. Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums Potsdam Nr. 174, (1974), S. 199-216 (Nachdruck). Internet: www.ewald-gerth.de/45.pdf

Die reaktionstreibenden Größen im Silberbromidkristall sind die freien Elektronen, welche den stufenweisen Aufbau der Silberkonglomerate durch elektrische Umladungen bewirken. Es geht also um die Elektronenkonzentration und damit um die Intensität E der Belichtung in der Zeit t und nicht – wie früher angenommen wurde – um die Zahl der Photonen, die mindestens ein Silberbromidkorn treffen müssten, um es entwickelbar zu machen.

Bei der Belichtung werden im Kristallgitter des Silberbromids durch den inneren Photoeffekt gleichzeitig Elektronen und Defektelektronen freigesetzt, die durch das Gitter diffundieren und durch Rekombination paarweise wieder verschwinden. Die Elektronenkonzentration *N* steigt dabei bis zu einem Gleichgewicht von Entstehen und Verschwinden der freien Elektronen an. Eine Bilanzrechnung mit dem Ansatz einer nichtlinearen Differentialgleichung[6]

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \eta E - \alpha N - \beta N^2, \tag{16}$$

in der *nE* die Reaktionsgeschwindigkeit der durch den inneren Photoeffekt hervorgerufenen Konzentration der freien Elektronen bei konstanter Intensität *E* während der Zeit *t* der Belichtung mit dem Koeffizienten *n* ist, welche durch Fallen mit dem Koeffizienten *a* und Rekombination mit Defektelektronen mit dem Koeffizienten *ß* vermindert wird.

Die schließlich mit d*N*/dt = 0 erreichte Sättigungselektronenkonzentration N^ ist eine Funktion der Intensität E. Die Lösung der quadratischen Bestimmungsgleichung ergibt

$$N_\infty = \frac{\alpha}{2\beta}\Big(\sqrt{1 + \frac{4\beta\eta}{\alpha^2}E} - 1\Big). \tag{17}$$

Mit dieser Beziehung und der Zusammenfassung aller Koeffizienten zu einem gemeinsamen Empfindlichkeitskoeffizienten $\varepsilon = 4\beta\eta/\alpha^2$ lässt sich eine Formel für das Reziprozitätsverhalten im gesamten Bereich der Kurz- bis Langzeitbelichtung zusammenstellen, welche die experimentellen Ergebnisse von KRON [2] gut wiedergibt und auch den von SCHWARZSCHILD [1] untersuchten Bereich der langen Belichtungszeiten mit der Potenz t^p einschließt:

$$\Big(\sqrt{1 + \varepsilon E} - 1\Big)t^p = \mathrm{const} \tag{18}$$

Der ganze Belichtungsbereich von kurzen bis langen Belichtungen wird also von einem einheitlichen SCHWARZSCHILD-Exponenten *p* überdeckt. Die Veränderung bewirkt allein die von der Intensität *E* abhängige Elektronenkonzentration *N*.

8. Der Prozess des Keimaufbaus als Reaktionskette

Der Aufbau der Keime, welche die photographische Entwicklung des Silberbromidkorns auslösen, erfolgt während der Belichtung und auch in der Dunkelphase nach der Belichtung, solange noch freie Elektronen durch das Kristallgitter diffundieren. In der Photoschicht sind auf den Silberbromid-Mikrokristallen Sensibilitätszentren vorhanden, von denen aus durch Umladungen von Elektronen

---

[6] Herleitung - Internet: www.ewald-gerth.de/16.pdf und www.ewald-gerth.de/22.pdf

und Zwischengitterionen metallische Silberkonglomerate – die „Keime“ – in einer Reaktionskette über mehrere Stufen aufgebaut werden [5].

Die Reaktionskette kann analytisch durch ein System linearer Differentialgleichungen dargestellt werden, das als *eine* Matrix-Differentialgleichung formuliert wird:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{K}\mathbf{c} \tag{19}$$

Hierin ist c der zeitabhängige Spaltenvektor der Konzentrationen der „Keimstufen“ und K die konstante quadratische Matrix der Übergangskoeffizienten. Die formale Lösung dieser Gleichung ist die lineare Transformation des Anfangsvektors c(0) in den Endvektor c(t) durch eine „Resolventenmatrix“ R(t) als Matrix-Exponentialfunktion

$$\mathbf{c}(t) = \mathrm{e}^{\mathbf{K}t}\mathbf{c}(0) = \mathbf{R}(t)\mathbf{c}(0). \tag{20}$$

Im Prozess der Belichtung erfolgt eine Umverteilung der Keime auf die Stufen, also eine Transformation des Anfangsvektors c(0) mit einer von der Intensität E und der Zeit *t* der Belichtung abhängigen Resolventenmatrix R(E, t), die für den photographischen Prozess speziell als „Belichtungsmatrix“[7] B(E, t) bezeichnet wird,

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{B}(E,t)\mathbf{c}(0). \tag{21}$$

Nach der Umverteilung der Keime werden aus der Stufenkette nur *die* Keime photographisch „entwickelt“, die eine kritische Anzahl von Silberatomen (nach experimentellem Ergebnis: 4 Atome) konglomeriert haben. Die Auswahl erfolgt durch einen Zeilenvektor der Entwicklungswahrscheinlichkeiten w. Das Skalarprodukt des Spaltenvektors c(t) und des Zeilenvektors w ergibt nach der Transformation mit der Belichtungsmatrix B(E, t) die dem SCHWARZSCHILDschen Schwärzungsgesetz Gl. (2) äquivalente Beziehung

$$\overline{\mathbf{w}}\mathbf{B}(E,t)\mathbf{c} = \mathrm{const}, \tag{22}$$

in der das gesamte Reaktionssystem der Belichtung in Struktur und Funktion enthalten ist. In diesem Sinne ist das „SCHWARZSCHILD-Produkt“ - in der Form Et^p und auch E^qt - eine reduzierte Version der „Belichtungsmatrix“ nach Gl. (21), also der Resolventenmatrix des Reaktions-Differentialgleichungssystems für den Keimaufbau des Latenten Bildes [7].

[7] Belichtungsmatrix - Internet: www.ewald-gerth.de/43.pdf und www.ewald-gerth.de/36.pdf Gesamtdarstellung - Internet: www.ewald-gerth.de/habilitation.pdf

9. Die Nichtkommutativität von Doppelbelichtungen

Doppel- und Mehrfachbelichtungen ergeben sich aus der Multiplikation der Belichtungsmatrizen Bi, wobei entsprechend der Definition der Matrizenmultiplikation die Indizes von rechts nach links laufen,

$$\mathbf{B}_{1,2,\ldots n} = \mathbf{B}_n \cdots \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1. \tag{23}$$

Die Nichtkommutativität von Prozessabschnitten kann man als Vertauschungsrelation der Matrizenmultiplikation beschreiben. So gilt für die Prozessmatrizen B_1 und B_2 mit der Nullmatrix **O**:

$$\mathbf{B}_2\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 \neq \mathbf{O} \tag{24}$$

Die Betrachtung der Entstehung des latenten Bildes als Prozess ermöglicht jedoch auch noch die Erklärung weiterer photographischer Belichtungseffekte. Insbesondere sind es die Doppelbelichtungseffekte – wie der WEINLAND-Effekt und der CLAYDEN-Effekt – die sich dadurch auszeichnen, dass die Umkehrung der Reihenfolge von Kurz- und Langbelichtungen zu unterschiedlichen Schwärzungsergebnissen fährt. Nicht-kommutativ sind aber auch der HERSCHEL-Effekt (Normal- und Rot-Belichtung), der ALBERT-Effekt (Normal- und diffuse Vor- oder Nachbelichtung), der VILLARD-Effekt (Normalbelichtung und Röntgenstrahlen-Exposition) und der BECQUEREL-Effekt (Normalbelichtung und Kernstrahlungs-Exposition).

Eine Erklärung für das Verhalten der Photoschicht bei der Vertauschung unterschiedlicher Belichtungen liefert allein die Betrachtung der Entstehung des latenten Bildes als Prozess: *Es ist ein generelles Merkmal aller Prozesse, dass die Vertauschung von Prozessabschnitten mit unterschiedlichen Einflussbedingungen im allgemeinen nicht-kommutativ ist!*

10. Was bleibt vom Reziprozitätsgesetz?

Bei der Exposition der Photoschicht mit RÖNTGEN- oder Kernstrahlung ergibt sich noch eine Besonderheit: es gilt exakt das Reziprozitätsgesetz nach Gl. (1).

Es gibt aber keinen grundlegenden Widerspruch zu dem Keimstufen-Modell; denn durch die Treffer der energiereichen RÖNTGEN- bzw. Kernstrahlungsquanten auf ein Silberbromidkorn erfolgt eine Überschwemmung des Kristallgitters mit Elektronen und damit ein Durchlaufen aller Keimstufen der Reaktionskette mit einem Schlage – ohne dass zwischen einzelnen Stufen Reaktionsgleichgewichte eintreten konnten.

Hier schließt sich also der Kreis der Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes, von dem SCHWARZSCHILD ausgegangen war.

Seine große Entdeckung lag in der Schwachheit des Lichtes der Gestirne!

11. Allgemeine Bedeutung des Schwarzschild-Gesetzes

Der Wert einer wissenschaftlichen Erkenntnis wird oft an ihrer Tragkraft für darauf aufbauende weitere Entwicklungen gemessen. Mit seinen – bleibende Maßstäbe setzenden – photographischen Arbeiten zur Photometrie der Gestirne hat SCHWARZSCHILD nicht nur dem beobachtenden und messenden Astronomen ein wertvolles Rüstzeug in die Hand gegeben, sondern er hat auch die Entwicklung der wissenschaftlichen Photographie entscheidend beeinflusst.

Die Bedeutung der SCHWARZSCHILDschen Arbeiten endet jedoch nicht mit der gegenwärtig schon erkennbaren Ablösung der silbergebundenen Photographie durch andere Methoden. Die Reaktion

der Silberhalogenide auf die Belichtung ist als ein *Prototyp eines kinetischen Prozesses* anzusehen.

Das SCHWARZSCHILD-Gesetz besitzt somit auch über den Rahmen der Astrophysik und der wissenschaftlichen Photographie hinaus eine Bedeutung. Beispielsweise sprechen Biologen bei der Behandlung teilweise eintretender Gleichgewichte in verketteten biologischen Systemen von einem „Schwarzschild-Gesetz" – selbstverständlich noch in Anführungsstrichen.

Das SCHWARZSCHILDsche Schwärzungsgesetz erweist sich in weitgespannter Verallgemeinerung auf die Prozesskinetik als ein reaktionskinetisches Näherungsgesetz für mehrstufige Reaktionen, wobei die reaktionsbeeinflussenden Grüßen – d. h. auch die Reaktionszeit t – wegen des Eintretens von Gleichgewichtszustanden zwischen einzelnen Stadien des Reaktionssystems in ungleicher Weise in die Bruttoreaktion eingehen. Obwohl die Zeit t unter den Einflussgrößen des dynamischen Prozesses eine Sonderstellung einnimmt, kann sie formal gleichrangig mit den anderen Einflussgrößen behandelt werden.

In verallgemeinerter Form ist das SCHWARZSCHILD-Gesetz für konstante Reaktionswirkungen ein Potenzprodukt von k Einflussgrüßen x_i mit den „SCHWARZSCHILD-Exponenten" Pi – vergleichbar mit dem Massen-Wirkungs-Gesetz der Physikalischen Chemie –

$$\prod_{i=1}^{k} x_i^{p_i} = \text{const.} \tag{25}$$

Literatur

[1] SCHWARZSCHILD, K.: Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne.
Publ. der v. Kuffnerschen Sternwarte, Wien-Ottakring, 5 (1899) C1 bis C50, C129 bis C135.

[2] KRON, E.: Über das Schwärzungsgesetz photographischer Platten.
Publ. des Astrophys. Obs. Potsdam 22 (1913) Nr. 67.

[3] HALM, J.: On a Method of Determining Photographic Star Magnitudes without the Use of Screens or Gratings.
Monthly Not. R. A. S. 82 (1922) 472

[4] GERTH, E.: Analytische Darstellung der Schwärzungskurve unter Berücksichtigung des SCHWARZSCHILD-Effekts.
Z. wiss. Phot. 59 (1965) 1.

[5] GERTH, E.: Analytische Darstellung der photographischen Schwärzungsfunktion mit Hilfe von Matrixfunktionen.
Annalen der Physik. 7. Folge, Band 27, Heft l, 1971, S. 126-128.

[6] GERTH, E.: Analytische Herleitung des Schwarzschildschen Schwärzungsgesetzes aus der Belichtungsmatrix.
Mitteilungen des Astrophysikalischen Observatoriums Potsdam Nr. 174, (1974), S. 199-216.
Nachdruck aus J. Signal AM 2 (1974) 5, 367-384.

[7] GERTH, E.: Analytische Darstellung der Kinetik des Keimaufbaus beim photographischen Prozess. Habilitationsschrift, TU Dresden 1972.
Monografie: Herbert Utz Verlag GmbH, München, 2013, ISBN 978-3-8316-4299-1.

Adresse des Verfassers: Ewald-Gerth@t-online.de