Leibniz Online, Jahrgang 2015, Nr. 19
Zeitschrift der Leibniz-Sozietät e. V.
ISSN 1863-3285
http://www.leibnizsozietaet.de/wp-content/uploads/2015/06/moritz.pdf

Helmut Moritz

Erik Grafarend und die theoretische Geodäsie

Zusammenfassung

Man findet heute kaum einen Wissenschaftler, einen Geodäten, der in seinem Denken und seinem Werk eine so umfassende und vollständige Synthese aller relevanten Gebiete der Mathematik und Physik aufgebaut hat wie Erik Grafarend. Nicht nur der Theorie wegen, sondern immer auch in Hinblick auf Anwendungen. Seinem Feuergeist gelingt es immer wieder, jüngere Wissenschaftler aus Geodäsie, Mathematik und Physik zur Mitarbeit zu gewinnen. Seine Universalität erinnert an Leibniz (Leibniz-Sozietät !); ich möchte ihn als Humanisten bezeichnen.

Einführung

Der Begriff der Geodäsie als Vermessung und Kartierung der Erdoberfläche ist eine der ältesten Aufgaben der Menschheit. Auf Deutsch heißt sie „Erdmessung“, ins Griechische übersetzt: „geometria“. Die „Geometrie“ ist aber bald ein sehr allgemeiner Begriff geworden, ein Teil der Mathematik, und Geodäsie (griechisch wörtlich „Erdteilung“) ist nur mehr ein Teil der Geometrie, zusammen mit grundlegenden Methoden der Physik. Freilich haben die Probleme der Erdmessung seit mehr als zwei Jahrtausenden wesentliche Anregungen für Mathematik und Physik geliefert, von Pythagoras über die großen französischen Mathematiker des 18. Jahrhunderts und schließlich über Carl Friedrich Gauß (1777-1855) bis in die heutige Zeit.

Der Begriff der Erdfigur hat von der „Erdteilung“, der Agrarvermessung der alten Ägypter, bis heute wesentliche Wandlungen und Präzisierungen erfahren: Erde als Ebene, als Kugel, als Ellipsoid als „abgeplattete Kugel“ (die Bestimmung der Abplattung war die berühmte Aufgabe der Gradmessungsexpeditionen der Französischen Akademie der Wissenschaften in Peru (Bouguer) und Lappland (Maupertuis) um 1740), bis man im 19. Jahrhundert entdeckte, dass die Erdfigur überhaupt nicht als einfache mathematische Fläche zu definieren ist, sondern physikalisch als „Niveaufläche“, als Fläche konstanten Schwerepotentials (*Geopotentials*), wie sie als ruhende Wasseroberfläche zu verstehen ist; die „Wasserwaage“ des Bautechnikers gibt eine anschauliche Deutung. Die entsprechende Niveaufläche in Meeresniveau ist die neue Erdfigur (Gauß), sie wurde bald als „**Geoid“** (Listing) bekannt. So einfach ist aber auch das noch nicht: die Meeresoberfläche ist nicht ruhend, sie wird von Stürmen gepeitscht und ist durch die Anziehung von Sonne und Mond einer Gezeitenbewegung (Ebbe und Flut) unterworfen. Solcher kleiner „zeitlichen Effekte“ gibt es noch viele. Ein weiteres Hauptproblem ist die Definition auf dem Festland: hier ist das Geoid eine „Fortsetzung der ruhenden Meeresoberfläche unter die Kontinente“, **aber wie?** Das Problem hat viele Lösungen, aber keine davon ist eindeutig. Das hat dazu geführt, dass der große russische Geoid M. S. Molodensky um 1945 vorschlug, das Geoid überhaupt aufzugeben, und nur die physische (sichtbare) Erdoberfläche und das äußere Geopotential zu bestimmen. (Dem genius loci huldigend, muss ich allerdings sagen, dass er einen großen Vorgänger hatte, nämlich Heinrich Bruns (1878), den aber außer Friedrich Robert Helmert zunächst kaum jemand „praktisch“ ernst nahm.) Als Näherung wird aber der Begriff des Geoids heute noch verwendet.

Die Ergebnisse der heutigen Geodäsie, im Rahmen des umliegenden Weltraums, liefern die messenden Grundlagen für Geophysik und Geodynamik, einschließlich Ozeanographie und Meteorologie, und für andere Geowissenschaften.

Man wird aber daraus ersehen, dass die präzise Definition der „theoretischen Geodäsie“ immer komplizierter geworden ist, und dass es kaum noch jemand gibt, der das gesamte Gebiet in einer schöpferischen Weise beherrscht, die auch für die „praktische Geodäsie“ wesentlich ist. Ein solcher Wissenschaftspionier ist Erik Grafarend.

Hauptarbeitsgebiete von Erik Grafarend

Physikalische Geodäsie

Das heute klassische Gebiet der *physikalischen Geodäsie* umfasst also die Anwendung der Mathematik und Physik auf die Erdmessung, einschließlich der Satellitengeodäsie. Für Grafarends Denken grundlegend ist die moderne Differentialgeometrie, vor allem die sogenannten *alternierenden Differentialformen* von Elie Cartan (1869-1951), der die seither vielzitierten *anholonomen Koordinaten* konsequent verwendet. Dies führt Grafarend aber auch zur Anwendung der klassischen Mechanik (und verschiedener Variationsprinzipien nach Fermat, Hamilton, Jacobi usw.) auf verschiedene Fragen der modernen Geodäsie. Auf letzterem Gebiet ist ihm gelungen, namhafte Mathematiker und Physiker zur Zusammenarbeit zu gewinnen, vor allem aber auch jüngere Wissenschaftler aus aller Welt. Hier würde ich ihn als Pionier bezeichnen. Neuerdings arbeitet er auch auf dem schwierigen Gebiet der Differentialgeometrie im Großen, nicht nur theoretisch, sondern auch auf die geodätische Anwendung hin orientiert.

In einem Brief vom 22.9.2014 sagt Grafarend ganz klar:

> *„Warum ist die Geodäsie "physikalisch"? Weil die Wegintegrale eines natürlichen Referenzsystems "nicht schließen" : der Spezialist sagt : "anholonom". Dagegen ist das Gravitationspotential "holonom", d.h. "integrierbar"! Beigeschlossen findet Ihr eine alte Arbeit von 5 Autoren, hier nur den ersten theoretischen Teil; es folgen weitere Teile. Beispiele! "Elie Cartan and Geodesy" ist u.a. von Antonio Marussi entwickelt worden. Dieser Teil wurde vorgetragen in Siena (Italien) April 2-5 im Jahre 1975 auf der Hotine - Konferenz…“. (F. Bocchio, E. Grafarend, N. Grossman, J.G. Leclerc, A. Marussi: Elie Cartan and Geodesy. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 37(4), 1978.)*

Wegen der Wichtigkeit dieser Frage sei dies auch für den Nichtgeodäten an einem einfachen Beispiel, dem klassischen Nivellement, näher erläutert.

Es sei die unbekannte Höhe *H* eines Berges *B* durch Nivellement von einem bekannten Ausgangspunkt *A* aus zu bestimmen. Dazu geht man von *A* nach *B* und misst mit einem sogenannten Nivellierinstrument (eigentlich einer Verallgemeinerung der Wasserwaage) die sukzessiven Höhendifferenzen zwischen aufeinanderfolgenden Zwischenpunkten auf der Wegstrecke von *A* bis *B*. Folgt man der Intuition (oder einer ganz einfachen Vermessungsausbildung), so müsste die Addition der gemessenen Höhendifferenzen zwischen den sukzessiven Messpunkten von *A* bis *B* die Höhendifferenz zwischen *A* und *B* ergeben. Das tut sie aber nicht genau, nicht nur wegen der Messfehler, sondern vor allem wegen der Nichtparallelität der bereits erwähnten Niveauflächen. Wären die Niveauflächen auf verschiedenen Höhen parallel (unscharf spricht man dann von Holonomität), dann würde dieses primitiv-intuitive Verfahren (abgesehen von Messfehlern) genau funktionieren. In der Natur sind benachbarte Niveauflächen aber nicht exakt parallel, und daher funktioniert das reine Summieren für Höhendifferenzen auf langen Wegen zwischen Berg und Tal nicht. (Auf einer lokalen Baustelle darf der Bautechniker freilich diese Feinheiten vernachlässigen, ohne dass das Haus zusammenbricht!) „Nivellierte Höhendifferenzen“ zwischen Berg und Tal sind aber nicht „holonom“, man spricht von Anholomität („an“ heißt auf Griechisch „nicht“). Nach Cartan kann man diese Anholomität mathematisch exakt allgemein formulieren, und Grafarend benützt sehr schön diesen Umstand in der physikalischen Geodäsie, wie wir schon erwähnt haben.

Das klassische Nivellement misst eigentlich Differenzen des schon erwähnten *Geopotentials,* die streng genommen physikalische Größen sind.

Relativistische Geodäsie

Grafarend wäre kein theoretischer Physiker und moderner Differentialgeometer, wenn er sich nicht mit der Relativitätstheorie Einsteins beschäftigte. Relativistische Effekte sind sehr klein, weil sie grundsätzlich durch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit c ($c \approx 300\,000$ km/sec) dividiert auftreten. In der Satellitengeodäsie sind die relativistischen Korrektionen an der Grenze der Messgenauigkeit (bisher etwa $10^{-9)}$, sie können und müssen aber bei der Berechnung präziser Satellitenbahnen mitgeführt werden.

In den letzten Jahren aber gelang ein Durchbruch: Die Messgenauigkeit bei einer Atomuhr am Institut NIST in Boulder, Colorado (*http://en.wikipedia.org/wiki/NIST-F2*) stieg so enorm, dass das mit der Höhe zusammenhängende Geopotential *W* direkt gemessen werden kann, und das mit einer Genauigkeit für die grundlegende *physikalische* Größe *W*, die an eine *geometrische* Genauigkeit von etwa 1 m heranreicht. (Gemessen wird zu diesem Zweck eine relative Genauigkeit für die Frequenz f von $\delta f / f \approx 10^{-16}$.) Ein solches Gerät misst das Geopotential *W* als solches (mit dem oben genannten klassischen Nivellement kann man nur relativ kleine Differenzen von *W* messen) und könnte daher vielleicht „*Geopotentiometer*" genannt werden, in genauer Analogie zum bekannten (Absolut-) „*Gravimete*r", das die Schwerkraft misst und das mit der geringeren Genauigkeit der klassischen Mechanik auskommt. Das neue relativistische Gerät ist eine Atomuhr, die über 300 Millionen Jahre auf 1 Sekunde stabil ist.

Nun aber kommt eine Überraschung (zumindest für den Verfasser). Die Diskussion nach diesem Vortrag am 13.2.2015 ergab, dass auch andere Institutionen (z.B. in Deutschland und Japan) gerade in diesen Tagen an ähnlichen Atomuhren mit z.T. noch wesentlich höherer Genauigkeit, um $\delta f / f \approx 10^{-17}$ oder gar 10^{-18}, arbeiten, entsprechend einem Abstand δW zweier benachbarter, noch trennbarer Niveauflächen *W* = konstant von etwa 1 dm oder gar 1 cm ! (Mitteilung von Jakob Flury an Hans Sünkel vom 16.2.2015, dem ich auch den Artikel „Optical Atomic Clocks", arXiv:1407.3493 vom 10.2.2015, verdanke.] Damit haben wir ein *physikalisches* Äquivalent zum globalen *geometrischen* „GPS-Nivellement" von ebenfalls einer Genauigkeit von etwa 1 cm !

Beide Arten von Höhenmessung, das (relativistische) *physikalische* Nivellement und das (schon klassische) *geometrische* GPS- (oder GNSS-) Nivellement sind global, ergänzen einander und sind beide notwendig. Natürlich wird es noch einige Zeit dauern (und viel Können und Geld kosten), bis eine transportables relativistisches „Geopotentiometer" operationell wird, aber es geht oft schneller als man denkt.

Erik Grafarend, der immer die praktische Wichtigkeit der Relativitätstheorie betonte, hat wieder einmal Recht gehabt.

Ausgleichungsrechnung und mathematische Statistik.

Je höher aber die gesuchte Genauigkeit ist, desto genauer muss man messen, desto genauer muss aber auch die mathematisch-physikalische Beschreibung sein. Man spricht heute gern von mathematischen Modellen. Für den Geodäten ist es selbstverständlich, dass es eine *absolute* Genauigkeit nicht gibt. Der reinen Mathematik als solcher spricht man intern meist absolute Genauigkeit und Beweisbarkeit zu (obwohl z. B. Kurt Gödel das etwas relativiert hat), aber das gilt nicht für empirische, also messende und rechnerische Anwendungen. (Misst man 3 Winkel in einem Dreieck, so ist die Winkelsumme nicht genau 180 Grad.)

Jetzt kommt aber ein Umstand, der von Nichtmathematikern oft als paradox empfunden wird. Die Mathematik liefert das Werkzeug, mathematische Modelle zu schaffen, die *so exakt als möglich* sind, aber physikalisch doch immer nur *approximativ* gelten. Wie kann man eine solche Approximationsmathematik formulieren? Das hat sehr schön der bekannte Mathematiker Felix Klein (1849-1925) gesagt: „Die *Geodäsie ist derjenige Teil der Geometrie, in welchem die Idee der Approximationsmathematik ihre klarste und konsequenteste Durchbildung gefunden hat* ". Sie macht also aus der Not eine Tugend, und das Stichwort heißt „mathematische Statistik".

Der Pionier für eine solche paradoxe Situation und ihre mathematische Bewältigung ist wieder der „princeps mathematicorum" Carl Friedrich Gauß. Er schuf eine statistische Theorie der Messfehler und eine geniale Methode, den genauesten mit den Messfehlern kompatiblen Schätzwert zu liefern: die Ausgleichungsrechnung. (Der Schätzwert sei allerdings noch so genau, er wird streng genommen immer nur approximativ bleiben, und daraus folgt, dass er auch nicht ganz eindeutig ist: er hängt von der verwendeten Ausgleichungsmethode ab.) Als ich mein Geodäsiestudium abschloss (1959), war gerade das Satellitenzeitalter angebrochen, und die Genauigkeit lag etwa bei 10^{-6} (1 mm auf 1 km); heute spricht man von 10^{-17} (Verhältnis eines Atomdurchmessers zum Erddurchmesser). Die der

Statistik zugeordnete Disziplin der reinen Mathematik ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung , vornehmer Wahrscheinlichkeitstheorie. In der Terminologie gelten mathematische Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Wahrscheinlichkeitstheorie als synonym.

Aber nicht nur die *Messungen*, sondern auch in der Natur vorkommenden *Größen*, wenn sie unregelmäßig genug sind, können vorteilhaft mit mathematischer Statistik behandelt werden. Das klassische Beispiel ist die Meteorologie und die darauf beruhende Wettervorhersage. Man spricht auch von „stochastischen Prozessen“. Sie können mathematisch äußerst schwierig und hochkompliziert sein.

Hier fühlt sich Grafarend in seinem Element. Er verwendet moderne Schätztheorie, Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie auf höchstem Niveau, einschließlich der Darstellung des Erdschwerefeldes als stochastischer Prozess auf Flächen (Kugel und Ellipsoid).

Kartographie und Kartenprojektionen

Schon früh hat Erik Grafarend seine mathematischen Kenntnisse in neuartiger Weise auf das klassische Gebiet der mathematischen Kartographie angewendet.

Photogrammetrie und Fernerkundung

gelten als spezielle Fachgebiete der messenden und rechnenden Geodäsie (letztere heute allgemein als **Geoinformatik** zusammengefasst). Grafarend hat sich intensiv auch mit diesen Gebieten beschäftigt.
Er hat seine Forschungsergebnisse in einer Reihe von Büchern niedergelegt.

Allgemeines und Schlusswort

Erik Grafarend ist ein durch und durch mathematisch-physikalischer Denker. Er ist aber auch ein feinsinniger und stets hilfsbereiter Mensch (was ich persönlich erleben durfte). Auch seine vielseitigen Interessen (von Musik bis Philosophie) und sein Humanismus sind bemerkenswert. Er ist er ein seltener Universalgelehrter, der an Gottfried Wilhelm Leibniz erinnert.

Adresse des Verfassers:

Prof. Dr. Helmut Moritz, Mariatrosterstraße 114, 8043 Graz, Österreich; helmut.moritz@tugraz.at