Gerd Laßner

# Die Leibnizsche Monadologie aus der Sicht der modernen Naturwissenschaften*

## 1. Einleitung

Es gibt kaum einen Gelehrten, der wie Leibniz es wagte und wagen konnte, am Ende seines Lebens sein philosophisches System in „axiomatischer Form" zusammenzufassen. Leibniz' Monadologie, geschrieben 1714, ist seine letzte Systemschrift, zwei Jahre vor seinem Tod. Dieser Schrift hat Leibniz keinen Titel gegeben. Die Bezeichnung „Monadologie", unter der sie bekannt wurde, erhielt sie erst durch den Jenaer Naturrechtler Heinrich Köhler, der sie ins Deutsche übersetzte und 1720 veröffentlichte. In weiten Kreisen, besonders auch unter der mathematisch-naturwissenschaftlichen Intelligenz, hat „Monadologie" nicht selten auch heute noch einen solch abwertenden Klang wie „Zahlenmystik", und es herrscht immer noch die Meinung vor, daß er mit den scharfen Formulierungen seines philosophischen Systems die Sache weit überzogen hat und sich im wesentlichen irrte. Daß man Leibniz bis in unsere Tage so gründlich mißdeutet, obwohl man ihn übereinstimmend als das letzte Universalgenie bezeichnet, liegt gerade an seiner Genialität. Er war mit seinen Ideen der Zeit soweit voraus, daß erst durch die mathematisch-naturwissenschaftlichen Entdeckungen unseres Jahrhunderts die Grundbegriffe seines philosophischen Systems, das er axiomatisch in den 90 Punkten seiner Monadologie zusammenfaßte, einen naturwissenschaftlich untermauerten Sinn erhalten. Man ist oft erstaunt, wie in Büchern über „Große Philosophen" oder „Große Denker" Leibniz ausgeklammert wird, obwohl schon Diderot formulierte: „Dieser Mann hat allein Deutschland so viel Ruhm gebracht, wie Platon, Aristoteles und Archimedes zusammen Griechenland."

Gleich zu Beginn des Vortrages muß ich etwas zur Interpretation des Titels sagen. Das Universalgenie Leibniz wird auch als großer Philosoph

* Vortrag, gehalten im Plenum der Leibniz-Sozietät am 19. November 1998

bis in ferne Zukunft immer wieder einer kritischen Wertung unterzogen werden, ausgehend vom jeweiligen Stand der wissenschaftlichen Erkenntnis. In diesem Sinne werden Vortragsankündigungen mit einem Titel wie der heutige in der Regel mit der Erwartung verbunden, über diejenigen Seiten der Leibnizschen Philosophie zu hören, die durch die moderne Wissenschaftsentwicklung überholt sind. Das bezieht sich besonders auf solche Formulierungen und Grundprinzipien von Leibniz wie „beste aller Welten", „prästabilierte Harmonie", „alles folgt aus einem einzigen Prinzip" usw. Dieser Vortrag ist einer solch einschränkend kritischen Wertung des Gehaltes der Leibnizschen Philosophie diametral entgegengesetzt. Kurz gesagt, will ich an einigen ausgewählten Kernpunkten der Leibnizschen Philosophie zeigen, daß diese durch die jüngsten mathematisch-naturwissenschaftlichen Ergebnisse ihre volle und teilweise unerwartete Bestätigung erfahren haben.

Weiterhin: Entgegen einer weit verbreiten Meinung, daß Leibniz nur Fragmente und kein geschlossenes System der Philosophie hinterlassen hat, folge ich ganz und gar der Richtung, die unser Mitglied Hans-Heinz Holz mit seinem hervorragenden Buch „Gottfried Wilhelm Leibniz – Eine Monographie" zum Leibnizverständnis weist. Ich kann die Problematik nicht besser charakterisieren, als durch ein längeres Zitat aus einem Anfangskapitel des Holzschen Buches mit der Überschrift „Schwierigkeiten des Leibnizverständnisses" [HOLZ83, S. 12]: „Eben die Neuartigkeit der geistigen Situation Leibniz', der auf der Schwelle eines neuen Zeitalters stand, bedingt die Doppelsinnigkeit seines philosophischen Ausdrucks. Für das, was er meinte, fand er kein begriffliches Instrumentarium vor, das er hätte benutzen und verfeinern können. Er mußte vielmehr jedem Denkgebilde erst eine angemessene Form verleihen, er mußte selbst die begrifflichen Mittel entwickeln und bereitstellen, mit denen er dann arbeiten konnte. Das erschwert in höchstem Maße das Verständnis des Leibnizschen Ausdrucks. Es hilft wenig, wenn wir die Herkunft dieses oder jenes Denkgebildes, des einen oder anderen Terminus aufspüren. Im Leibnizschen System wandeln sich die Begriffe und nehmen einen eigenen, aus der Tradition nicht ableitbaren Sinn an. So ist die erste Aufgabe einer Leibniz-Interpretation, diesem Hintergrund nachzugehen in immerwährendem Überdenken der Leibnizschen Intentionen. Nichts darf ungeprüft hingenommen werden. Die „Richtigstellung der Begriffe" ist hier wie je

nicht nur der Anfang, sondern ein entscheidender Teil der Arbeit. Ist er vollbracht, so liegt der Zugang zum System offen – was bislang dunkel erschien, wird deutlich und läßt sich in einen übergreifenden Zusammenhang einordnen."

Keineswegs dürfen diese Formulierungen etwa so mißverstanden werden, als ob dadurch der willkürlichen Interpretation der Leibnizschen Philosophie Tür und Tor geöffnet würden. Ganz im Gegenteil. Ich will mich nicht scheuen, es sehr kompakt zu formulieren: Unter Leibnizscher Monadologie verstehe ich das dialektische System der Leibnizschen Philosophie, und dort, wo sein voller Gehalt erst durch die wissenschaftlichen Resultate unseres Jahrhunderts verstanden werden kann, offenbaren sich neue Seiten seines richtungsweisenden Charakters. Das betrifft keineswegs nur die philosophischen Aspekte seines Systems, sondern auch sehr detaillierte mathematisch-naturwissenschaftliche Erkenntnisse, die im Leibnizschen Sinne sowieso nicht von den philosophischen Aussagen getrennt werden können. Drei der markantesten Beispiele dieser Art sind:

1. Leibniz' vollkommen richtige Auffassung von der Existenz und den Eigenschaften der unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen und des Rechnens mit ihnen.
2. Eine weit über seine Zeit hinausreichende Einsicht in das Wesen von Zeit und Raum, die erst durch Einstein und die jüngsten Entwicklungen der modernen Geometrie und deren physikalische Anwendungen die volle Bestätigung erfahren hat.
3. Die Formulierung des Energieerhaltungssatzes in vollkommener Allgemeinheit.

Das Leibnizbild wird bis in unsere Tage wesentlich durch die Äußerungen Voltaires über Leibniz geprägt. Ich will diese Einleitung mit einigen knappen Feststellungen darüber abschließen, nur um die Tendenz zu verdeutlichen, wie Leibniz zu verstehen ist: In der Art, wie Voltaire Leibniz interpretiert und einseitig für die von ihm in weiten Zügen selbst definierte sog. Newtonsche Philosophie Position bezieht, hat er eindeutig gefehlt, und Leibniz nicht nur „ironisch pointiert" fehlinterpretiert, sonder zweifellos gar nicht verstanden. Wollte man mit der ironischen Schärfe von Voltaire an ihn selbst herangehen, so kann man auf Voltaire gut und gern Sätze anwenden, die er selbst zur Charakterisierung von Descartes gebraucht hat [VOLT81, S. 12]: „Alsdann war seine Philosophie höch-

stens nichts als eine sinnreiche Geschichte, welche den Weltweisen jener Zeit ziemlich wahrscheinlich vorkam. ... Er trieb seine Irrtümer in der Grundlehre so weit, daß er auch vorgab, 2 mal 2 würde nicht 4 machen, wenn Gott es nicht gewollt hätte. Allein, man sagt nicht zuviel, wenn man behauptet, daß er auch in seinen Irrtümern bewunderungswürdig sei. ... Ich glaube nicht, daß man seine Philosophie mit der des Newton wirklich nur im geringsten im Vergleich setzen könne. Die erste ist ein Versuch, die andere ein Meisterstück."

Selbst Madame Du Chatelet, die Übersetzerin von „Newtons Prinzipien", unternahm in der Einleitung zu dieser Übersetzung den Versuch, das Universums Newtons mit der Metaphysik Leibniz' zu harmonisieren. In einer Rezension aus dem Jahre 1741 schreibt Voltaire: „Leibniz ist nur gekommen, um die Naturwissenschaft zu verwirren."

Mit seinen „Elementen der Newtonschen Philosophie" aus dem Jahre 1738 wurde eine Richtung der Newton-Interpretation vorgezeichnet, die vielfältig bis heute fortgeschrieben wird, sehr verschieden von den wirklichen Intentionen Newtons. Es ist bemerkenswert, wie gerade auch in der Streitfrage zwischen Newton und Leibniz über den Raum, wir werden darauf noch eingehen, Voltaire eindeutig Position bezieht. Voltaire schreibt: „Die gesamte Newtonsche Philosophie führt notwendigerweise zu der Erkenntnis von einem höchsten Wesen. Denn wenn die Welt endlich ist, wenn es leeren Raum gibt, ist die Materie also nicht notwendigerweise vorhanden.. Sie verdankt ihre Existenz also einer freien Ursache ... Sie hat die Schwerkraft von Gott erhalten." [VOLT81, S. 14].

Voltaire macht sich zwar in „Candide" geistreich über „die beste aller Welten" lustig, eine Welt, in der die Materie gesetzmäßig so existiert wie sie ist, aber er bleibt mit seinem aus heutiger Sicht abwegigen Schluß auf die Existenz Gottes weit hinter der Leibnizschen Konzeption zurück. Das gilt auch für das kompliziertere Problem der Willensfreiheit. Voltaire schreibt [VOLT81, Bd. 3, S. 290]: „Es wäre in der Tat höchst merkwürdig, daß die ganze Natur, alle Gestirne, ewigen Gesetzen gehorchen und es ein kleines, fünf Fuß großes Tier geben sollte, welches unter Mißachtung dieser Gesetze immerfort handeln könnte, wie es ihm beliebt, allein nach seinem Gutdünken. Er würde zufällig handeln, und man weiß ja, daß der Zufall nichts ist. Wir haben dieses Wort erfunden, um damit eine bekannte Wirkung irgendeiner unbekannten Ursache auszudrücken."

Im Gegensatz dazu Leibniz, der in der „besten aller Welten" zu folgenden Schluß kommt [LEIB68, Theodizee, §55]: „Durch diese Erwägung wird zugleich das sog. Faule Sophisma der Alten hinfällig, demzufolge man überhaupt nichts tun soll: wenn das, sagte man, was ich erflehe geschehen soll, so wird es auch geschehen, wenn ich nichts tue; und wenn es nicht geschehen soll, so wird es niemals geschehen, trotz aller Mühe, die ich mir gebe. ... Aber die Antwort darauf ist leicht: so gewiß die Wirkung ist, so gewiß ist auch die Ursache, die sie erzeugen wird; und wenn die Wirkung geschieht, so tritt sie auf Grund einer ihr entsprechenden Ursache ein. So ist deine Trägheit vielleicht daran schuld, daß du nichts von dem erhältst, was du dir wünschst, und daß du Übel erleidest, die du durch sorgsames Handeln hättest vermeiden können. Die *Verbindung der Ursache mit der Wirkung* hat also durchaus keine sklavische Notwendigkeit zur Folge, sie gibt uns vielmehr ein Mittel zu ihrer Beseitigung."

Hier ist nicht der Platz, um weiter das Problem der Willensfreiheit im Leibnizschen Verständnis abzuhandeln. Aber das Leibnizzitat ist ganz eindeutig, und widerlegt unzweifelhaft alle Fehlinterpretationen über eine schicksalhafte Vorbestimmung, die man landläufig mit den Thesen „beste aller Welten" und „prästabilierte Harmonie" verbindet.

Mit der Willensfreiheit ist mir auch ein Stichwort gegeben, um den Titel des Vortrages nochmals zu kommentieren. Die Beispiele im Vortrag sind im wesentlichen nur aus der Physik und Mathematik gewählt. Die Erwähnung der Naturwissenschaften im Titel soll markieren, daß im Vortrag die Geistes-, ökonomischen, technischen, Kulturwissenschaften etc. ausgeklammert sind. Ich möchte aber uneingeschränkt der Überzeugung Nachdruck verleihen, daß die Leibnizschen philosophischen Ideen, man kann auch sagen Entdeckungen, wie er es oft auch selbstsicher formulierte, gerade ihre Kraft bei einer künftigen erneuten Vereinheitlichung der Wissenschaften, im Sinne von Marx, beweisen werden. Unter dem Eindruck des Wandels des naturwissenschaftlichen Weltbildes formuliert das ein Jahrhundert später Heisenberg so: „... so sind doch schon deutliche Anzeichen dafür vorhanden, daß sich eine engere Verbindung der verschiedenen Wissenschaften unter anderen und neueren Gesichtspunkten anbahnt, und es kann kaum daran gezweifelt werden, daß damit das einseitige naturwissenschaftliche Weltbild des späten 19. Jahrhunderts durch andere Denkformen abgelöst wird." [HEIS44, S. 83].

Wenn auch die Beschränkung auf Beispiele aus der Mathematik und Physik durch mein Arbeits- und Erkenntnisfeld bedingt ist, so glaube ich doch, daß es für eine erneute Rückbesinnung auf die Leibnizsche Philosophie von größter Bedeutung und Stimulans ist, daß nicht nur der Philosoph sondern auch der Physiker und Mathematiker Leibniz gerade dort den Nagel auf den Kopf traf, wo man seine größten mathematisch-naturwissenschaftlichen Irrtümer zu sehen glaubte und das seit Voltaire.

Bevor wir auf den zentralen Begriff der Leibnizschen Philosophie, die Monaden, zu sprechen kommen, wollen wir zuerst auf die „Wiederentdeckung" der unendlich kleinen Zahlen durch Robinson 1960 eingehen. Das war keineswegs nur eine große mathematische Sensation, sondern bringt genau einige der Gesichtspunkte des Leibnizschen mathematischen und erkenntnistheoretischen Denkens in das Zentrum der Betrachtung zurück, die man als seine zeitbedingten Fehler interpretiert hat.

## 2. Infinitesimale Zahlen und die Nichtstandardmathematik

Kant selbst hat seine Resultate als „kopernikanische Wende der Philosophie" bezeichnet, eine selbstbewußte Wertung seiner Leistung, die auch heutzutage immer wieder im gleichen Sinne zitiert wird. Trotzdem ist das „Kantsche philosophische System" an den Stellen, wo er sich selbst von Leibniz abhebt, ein Rückschritt gegenüber Leibniz. Man muß in den Bewertungen nicht so rigoros wie Hegel sein [HEGE30, S. 84] „...daß die Kantische Philosophie auf die Behandlung der Wissenschaften keinen Einfluß hat haben können. Sie läßt die Kategorien und die Methode des gewöhnlichen Erkennens ganz unangefochten." Auch heute noch geben die meisten Naturwissenschaftler, sofern sie nicht die Philosophie gänzlich ablehnen, Kant einen Vorzug gegenüber Hegel, und würden deshalb die Hegelsche Kritik zurückweisen, sofern sie sie überhaupt zur Kenntnis nehmen. Um so bemerkenswerter ist die eindeutig hohe Wertung, die Heisenberg dem „Hegelschen System" zuteil werden läßt: „An einen Gedanken gliedern sich durch vielfache Bezüge neue Gedanken an, aus diesen entstehen wieder neue, bis schließlich durch die inhaltliche Fülle des von den Gedanken durchmessenen Raumes nachträglich ein getreues Abbild des gemeinten Wirklichkeitsbereiches entsteht. Diese Art der Darstellung

beruht auf der Lebendigkeit des Wortes. Hier kann ein Satz im allgemeinen nicht „richtig" oder „falsch" sein. Aber man kann einen Satz, der fruchtbar zu einer Fülle weiterer Gedanken Anlaß gibt, als „wahr" bezeichnen. Das Gegenteil eines „richtigen" Satzes ist ein „falscher" Satz. Das Gegenteil eines „wahren" Satzes wird aber häufig wieder ein „wahrer" Satz sein. Die berühmteste systematische Fassung dieser „dynamischen" Darstellung der Wirklichkeit ist die Hegelsche Dialektik." [HEIS90, S. 42].

Die damit verbundenen Überlegungen öffnen auch wieder die Tore über Kant zurück zu Leibniz. Es sind Türen zu einem tieferen Naturverständis bei Leibniz, die Kant als Lücken interpretierte und von denen er glaubte, sie geschlossen zu haben. Wählen wir ein Beispiel um zu zeigen, worum es geht: Für Kant bestand an der realen Existenz von Dingen außerhalb des Menschen kein Zweifel. Die Ausführungen in der „Prologomena" zur Abgrenzung vom Berkeleyschen Idealismus können deutlicher nicht sein. Andererseits schreibt er sehr prononciert: „Der Verstand schöpft seine Gesetze (a priori) nicht aus der Natur, sondern schreibt sie dieser vor." Genau im Nebensatz liegt das Problem und ein „Rückschritt" gegenüber Leibniz. Dieser unterscheidet noch klar zwischen wirklichen Dingen und Gedankendingen. An dieser Stelle muß aber hinzugefügt werden, daß diese Bemerkungen nichts Einschränkendes über Kant aussagen sollen, sondern nur über die Rezeption seiner Ideen in der Geisteswelt. Es ist offensichtlich nicht einmal klar, wie Kant die wesentlichen Seiten der Leibnizschen Philosophie überhaupt gekannt hat. Rosenkranz schreibt noch aus der Nähe zu Kant [ROSE87, S. 33]: „Doch läßt sich nicht genau abnehmen, ob Kant Leibniz's nichtmathematischen Werken ein eigentliches Studium gewidmet hat und es ist wahrscheinlich, daß er ihn, wie auch die griechischen Philosophen, mehr aus den Berichten kannte, welche in der Wolff'schen Schule darüber herrschend waren. Höchst auffallend ist, daß er nirgends den 1765 von Raspe editierten Dialog der gegen Locke gerichteten *Nouveaux essais* erwähnt, in welchem für Kant so viel wichtige Anlässe gewesen wären. Überhaupt scheint dieses Buch noch immer nicht da zu sein."

Die Gedankendinge der Mathematik sind für Leibniz „Projektionen" von „wirklichen Beziehungen" zwischen den Dingen. Er unterscheidet die Gerade der Mathematik (als Gedankending), von der „wirklichen Gera-

den". Die Äußerungen Leibniz' dazu sind ganz eindeutig [LEIB66, II, Brief an de Volter, S. 322]: „Gemeinhin aber sorgen die Menschen, zufrieden, der sinnlichen Anschauung Genüge zu leisten, nicht um Gründe; daher denn die vielen Ungeheuerlichkeiten, die zum Schaden der wahren Philosophie ihren Einzug gehalten haben. So wendet man gemeinhin nur die unvollständigen abstrakten oder mathematischen Begriffe an, die das Denken gutheißt, die aber die Natur als losgelöste Existenzen nicht kennt. Von dieser Art sind der Begriff der Zeit, imgleichen der des Raumes oder der bloßen mathematischen Ausdehnung, der rein passiven Masse, der Bewegung im mathematischen Sinne usw. Hier kann man denn leicht Verschiedenes ohne Verschiedenheit fingieren, z. B. zwei gleiche Teile einer Geraden, weil ja die Gerade etwas Unvollständiges und Abstraktes ist, das man nur in der Theorie zu untersuchen hat. In der Natur aber ist jede beliebige Gerade von jeder beliebigen anderen inhaltlich verschieden. Hier kann es nicht vorkommen, daß zwei Körper einander vollkommen gleich und ähnlich sind. Auch was nur der Lage nach von einander verschieden ist, muß seine Lage, d.h. seine Umgebung zum Ausdruck bringen, es muß sich somit nicht nur der Lage nach, d. h. nicht nur, wie man gewöhnlich meint, kraft seiner äußeren Bestimmung unterscheiden."

Dieses Zitat ist in vielerlei Hinsicht äußerst bemerkenswert. Im besonderen Maße auch wegen seiner eindeutigen Hervorhebung, daß die abstrakten mathematischen Begriffe ärmer sind als die konkreten Dinge, ein Gedanke den erst wieder Hegel aufgreift in seiner markanten Auffassung des Abstrakten und Konkreten, das Konkrete als das reiche, vielseitige, unerschöpfliche, wohingegen das Abstrakte immer abgehoben, vereinfacht, ärmer ist, auch und gerade dann, wenn es „so schwierig" ist, wie die kompliziertesten mathematischen Begriffe. Wir wollen aber vor allem die Leibnizsche Auffassung vom Wesen der mathematischen Begriffe pointieren, also den Unterschied der „mathematischen Geraden" von den unendlich vielen „wirklichen Geraden", gleichzeitig aber auch ihre dialektische Einheit, denn im Sinne des „großartigsten Systems der Dialektik" von Hegel, gehört zu der wirklichen Geraden auch die gedachte mathematische Gerade. Wer hier „seinen Hegel" versteht, versteht auch Leibniz nachträglich. Aber der wirkliche Gang der Dinge führt von Leibniz zu Hegel, einen „auf die Füße gestellten" Hegel, d. h. zu einer Dialektik, die eine Dialektik der Natur ist und nicht nur eine Dialektik des Geistes.

Gerade auch bezüglich der Mathematik dominiert bei Naturwissenschaftlern eine Auffassung, die Kant den Vorzug gegenüber Leibniz gibt. Hier liegen auch die Ursachen dafür, daß man in der „Nachkantischen Periode" die Leibnizschen Infinitesimalen nicht mehr für voll genommen hat. So wirkte es wie eine „Ohrfeige für die Mathematiker", als Robinson 1960 die Leibnizschen unendlich kleinen Zahlen „wiederentdeckte". Das Problem besteht darin, daß man die dialektische Tiefe der Wirklichkeitsauffassung bei Leibniz nicht erfaßte. Objektiv war es so, daß die gesamte „Newtonsche Physik" (so wie man sie heute auffaßt, was nicht zu verwechseln ist mit den philosophischen Ansichten von Newton selbst) diese vertiefte Wirklichkeitsauffassung von Leibniz „nicht benötigte". Dabei waren auch zum Problem der unendlich kleinen Zahlen die Äußerungen von Leibniz ganz eindeutig, mit denen er auf die Einwendungen gegen sie reagierte, und die eine Wahrheitsauffassung ganz ungezwungen vorwegnahmen, die erst durch die Resultate zur „Hilbertschen Axiomatik" ihren festen Platz auch in der Mathematik gefunden hat. Damit ist allerdings nicht die formalistische Interpretation gemeint, bei der es Wahrheit im (Leibnizschen Sinne) überhaupt nicht mehr gibt, sondern nur noch Ableitbarkeit.

Bevor wir dies an den transfiniten Zahlen erläutern, lassen wir noch einmal Leibniz selbst sprechen, um weiter zu verdeutlichen, wie er das Verhältnis der gedachten mathematischen Dinge zu den wirklichen Dingen sieht [LEIB66, II, Brief an de Volder, S. 309]: „Ich sehe nun einen neuen feinen Einwand Ihrerseits voraus, der sich auf ein geometrisches Beispiel stützt, denn – so könnten Sie etwa sagen – der Begriff der Ellipse z. B. hängt nicht von einer Ursache ab, da verschiedene Ursachen dieselbe Ellipse geben können: nämlich ein Schnitt eines Kegels, der Schnitt eines Zylinders und die Bewegung eines Fadens. Die Existenz der Ellipse aber kann nicht anders begriffen werden, als daß man irgend eine bestimmte Ursache setzt. Hierauf ist nun meine weitere Entgegnung, *erstens*, daß, wenn es auch zum Begreifen der Wesenheit einer Ellipse nicht nötig ist, sich eine bestimmte Erzeugungsart derselben zu denken, doch weder die Ellipse noch irgend ein anderer Gegenstand seiner Wesenheit nach vollkommen begriffen werden kann, ohne daß seine Möglichkeit a priori durch eine formale Ursache bewiesen wird, die einer jeden besonderen Erzeugungsart innewohnt. ... *Zweitens* aber komme ich auf meine früheren

Feststellungen zurück, daß es nämlich bei unvollständigen Gegenständen, so bei den Linien oder den Figuren, einander ähnliche Inhalte geben kann, die dennoch durch verschiedene Ursachen hervorgerufen sind, wie z. B. die Ellipse, die durch einen Kegelschnitt entsteht, derjenigen, die durch eine Bewegung in der Ebene erzeugt wird, ähnlich ist. Im Gebiet der (konkreten) völlig bestimmten Objekte aber ist dies unmöglich und es kann weder eine Substanz einer anderen vollkommen ähnlich sein, noch auch ein und dieselbe auf mehrere Weisen erzeugt werde."

Leibniz verknüpft also den Inhalt mathematischer Begriffe und die mit ihnen formulierten mathematischen Wahrheiten mit konkreten praktischen Operationen und Handlungen (dem „wirklichen" Schneiden eines Kegels, der „wirklichen" Erzeugung einer Ellipse in der Ebene mit einen Faden, so wie die Gärtner bei beim Anlegen elliptischer Beete vorgehen usw.). „Auf diese Weise läßt sich auch der Ansicht Hobbes begegnen, nach der alle Wahrheiten willkürlich sein sollen, weil sie nur von Nominaldefinitionen abhängen; – wobei er nicht erwog, daß die Realität der Definition selbst nicht in unserer Wahl steht, und daß nicht alle beliebigen Begriffe sich miteinander verknüpfen lassen. Schließlich erhellt hieraus auch der Unterschied zwischen wahren und falschen Ideen."[LEIB66, I, S. 26]. Diese Leibnizsche Auffassung vom Wahrheitsgehalt der Mathematik wurde in der „Mathematikphilosophie" unseres Jahrhunderts bisher vornehm umgangen. Wenn sie von „Nichtmathematikern" vertreten wird, hat man sie in der Regel aus mathematischen Fachkreisen hart attackiert. Aber an Leibniz wagt man sich nicht so direkt heran. Ihm kann man kaum unterstellen, daß er nicht wußte, was Mathematik ist. Nun ist man durch die „Wiederentdeckung" der unendlich kleinen Zahlen eines besseren belehrt worden. Daß man den Differential- und Integralkalkül auch ohne die unendlich kleinen Zahlen streng begründen kann, sagt nämlich über die Existenz der unendlich kleinen (und großen) Zahlen noch gar nichts aus. Die Begründung dieses Kalküls aus dem Grenzwert heraus war für Leibniz nie zweifelhaft. Man kann sie auch den Newtonschen Zugang zur Infinitesimalrechnung nennen. In der „wirklichen Existenz" der Differentiale dx, dy als unendlich kleine Zahlen liegt aber viel mehr. Sie können als mathematische Begriffe genauso von der Realität abgezogen werden, wie der Begriff der Ellipse. Es ist aber eine reichere Realität, nicht mehr die der „Statik" der Antike sondern die der „dynamischen Physik" des 17. Jahrhunderts.

Wie schon gesagt, war die Begründung der Nichtstandard-Mathematik durch ROBINSON zu Beginn der 60er Jahre ein gewaltiger Paukenschlag in der Mathematik und eine von den „kanonischen Wissenschaftlern" schon nicht mehr erwartete Bestätigung der Leibnizschen Konzeption der infinitesimalen Zahlen als „wirkliche Zahlen" und nicht nur als eine Umschreibung von Grenzübergängen. Uspenski weist darauf hin, daß in der Chemie zur gleichen Zeit, 1962, eine ähnliche Revolution stattfand, nämlich die Entdeckung, daß Edelgase doch Verbindungen eingehen können. Er schreibt dann: „Stellen wir uns einmal vor, daß man jeden Chemiker, der bis zu dieser Zeit nach dem Einbau von Edelgasen in Verbindungen suchte, mit Schmach aus den Laboratorien ausgeschlossen hätte. Diese Schmach kann man mit der vergleichen, mit der zu jener Zeit jeder Mathematiker belegt wurde, der sich mit der Erforschung der unendlich kleinen Zahlen befaßte." [USPE87, S. 108]. Die Bewertung dieser neuen Entdeckung ist bis heute keineswegs abgeschlossen, weil sie tief in die Grundbegriffe eingreift, wie wir gleich noch andeuten werden. Außerdem sind sie ein überzeugendes Beispiel dafür, wie man sich auch in der Mathematik Entdeckungen verbauen kann, wenn man mit falschen philosophischen Vorstellungen ein Problem bewertet. Da das Denken sich ständig weiterentwickelt, darf man bekanntlich nicht mit neuen Begriffsinhalten an die Bewertung früherer Epochen herangehen. Aber in diesem Fall liegen die Dinge in der Tat anders, weil große Mathematiker wie Leibniz und ein halbes Jahrhundert später Euler souverän mit den unendlich kleinen Zahlen operiert haben. Nun ist nichts dagegen einzuwenden, daß man Ende vorigen Jahrhunderts eine sogenannte „exakte Begründung" der reellen Zahlen gegeben hat, die dem Stand der damaligen mathematischen Forschung entsprach. Aus philosophischer Sicht ist aber keinesfalls zu akzeptieren, daß man in der anschließenden Epoche dann in „Fachkreisen" der Mathematiker davon überzeugt war, daß es die unendlich kleinen Zahlen nicht geben kann, weil sie nicht in das axiomatische Schema paßten. Das ist um so bemerkenswerter, da die Frage nach der Existenz der unendlich kleinen Zahlen sich im Begriffssystem der Mathematik in der ersten Hälfte unseres Jahrhunderts zu einem innermathematischen Existenzproblem wandeln ließ, unabhängig davon, welchen Standpunkt man zum Verhältnis zwischen der Existenz im Sinne der Mathematik und der „wirklichen Existenz" im Sinne der Philosophie bezog. Wir wollen das

jetzt erläutern und werden uns dabei mit einigen mathematischen Grundbegriffen bekannt machen.

Fundamentale algebraische Grundbegriffe sind die Begriffe **Gruppe, Ring, Körper**, die in diesen Vortrag auch erläutert werden. Es gibt keinen Grund, diese Begriffe nicht in eine wissenschaftliche Allgemeinbildung aufzunehmen, so wie man auch die Begriffe Gen, Katalysator, Molekül etc. als Bestandteile einer wissenschaftlichen Allgemeinbildung akzeptiert.

Kurz gesagt ist ein **Körper** (in der Algebra) eine Gesamtheit von Dingen a,b,....x,y,... mit denen man so rechnen kann, wie mit den reellen Zahlen. Wir wollen eine Liste von Axiomen dafür zusammenstellen:

(2.1)

*Gesetze der Addition*

(1) $a+(b+c) = (a+b)+c$ (*Assoziativgesetz*)

(2) $a+0 = a$ (*Existenz der Null; neutrales Element der Addition*)

(3) $a+(-a) = 0$ (*Existenz des inversen Elementes*)

(4) $a+b = b+a$ (*Komutativgesetz*)

*Gesetze der Multiplikation*

(5) $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ (*Assoziativgesetz der Multiplikation*)

(6) $a\cdot 1 = a$ (*Existenz der Eins; neutrales Element der Multiplikation*)

(7) $a\cdot(1/a) = 1$ *falls* $a\neq 0$ *ist.* (*Existenz des inversen Elements*)

(8) $a\cdot b = b\cdot a$ (*Kommutativgesetz*)

(9) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ (*Distributivgesetz*)

Außerdem gibt es noch die Axiome der Ordnung, wie z. B. aus a >b und b > c folgt a > c usw., die wir uns jetzt schenken.

Wenn in einer Gesamtheit R zwar eine Multiplikation und eine Addition definiert ist, aber im allgemeinen kein inverses Element der Multiplikation existiert, wenn man also (7) wegläßt, so nennt man eine solche algebraische Gesamtheit einen **Ring**. Die ganzen Zahlen bilden einen Ring. Das Rechnen mit den ganzen Zahlen genügt allen Axiomen ohne (7). Genauer ist es ein Ring mit 1. Wenn man auch noch das Axiom (6) wegläßt, so erhält man einen Ring ohne Eins. Ein Beispiel dafür ist die Menge der geraden Zahlen. Für das Rechnen mit ihnen gelten alle Axiome außer (6) und (7).

In der streng formalistischen Auffassung der Axiome spielt es keine Rolle, was die Elemente des Zahlkörpers sind, die Hauptsache ist, daß das Axiomensystem widerspruchsfrei ist. Daß man diese Widerspruchsfreiheit nicht abschließend beweisen kann, sondern letztlich nur durch die „Praxis" bestätigen kann, auch wenn es lediglich eine „theoretische" oder mathematische Praxis ist, ist seit den Resultaten von Gödel Allgemeingut auch der Mathematik geworden. Gleichzeitig öffnet das auch einen Weg zurück zu Leibniz. Denn er war unmißverständlich der Meinung, daß der widerspruchsfreie Umgang mit Objekten deren Existenz begründet. Er schreibt [LEIB66, I, Brief an Varignon, S. 98]:"Man kann somit die unendlichen und unendlich kleinen Linien – auch wenn man sie nicht in metaphysischer Strenge und als reelle Dinge zugibt, – doch unbedenklich als ideale Begriffe brauchen, durch welche die Rechnung abgekürzt wird, ähnlich den sog. imaginären Wurzeln in der gewöhnlichen Analysis, wie z. B. $\sqrt{-2}$. ... Ebenso könnte man unseren Kalkül der transscendenten Kurven nicht aufstellen, ohne von Differenzen zu sprechen, die im Begriff sind zu verschwinden, wobei man ein für allemal den Begriff des Unvergleichbarkleinen einführen kann, statt stets von Größen zu reden, die unbegrenzter Verminderung fähig sind.... alles, um damit Begriffe zu bezeichnen und aufzustellen, die zur Abkürzung der Rechnung dienen, und die in Realitäten ihre Grundlage haben." In heutiger Sprechweise heißt das, man kann den Körper R der reellen Zahlen zu einen größeren Zahlkörper *R erweitern, der auch genügend viele (um Differential- und Integralrechnung zu treiben) unendlich kleine und unendlich große Zahlen enthält.

Daß es einen solchen Zahlkörper gibt, war genau die Entdeckung Robinsons [ROBI63]. Er hat erstmals auf einem Seminar im Herbst 1960 darüber vorgetragen. Aber auch für Leibniz, Euler und v.a. war es nicht zweifelhaft, daß es diesen größeren Zahlkörper gibt, auch wenn das für sie einfach bedeutete, daß man mit diesen Objekten widerspruchsfrei rechnen kann. Den Begriff des Zahlkörpers gab es damals noch nicht. Man kann sich wirklich wundern, warum die Mathematiker sich dazu hinreißen ließen, so nachdrücklich zu behaupten, das diese unendlich kleinen Zahlen nicht existieren. Hätten sie doch auch in der streng formalistischen Denkweise mit der Ablehnung eines solchen Zahlkörpers solange warten müssen, bis seine Widersprüchlichkeit gezeigt war, was natürlich nicht mög-

lich ist, wie wir jetzt wissen, da es einen solchen Zahlkörper „wirklich" gibt.

Wie kommt man nun zu einem solchen Zahlkörper *R, der die gewöhnlichen reellen Zahlen enthält, aber außerdem noch hinreichend viele unendlich große und damit auch unendlich kleine Zahlen, so daß die Infinitesimalrechnung möglich wird. Eine meisterhafte kurze Darstellung der Konstruktion dieser neuen Zahlen findet man in dem hervorragenden Buch „Zahlen" [EBBI88]. In unserem Zusammenhang ist außerdem an der Darstellung in diesem Buch noch bemerkenswert, daß sie direkt an die Leibnizschen Vorstellungen anknüpft. Die Autoren dieses Buches sind alle sehr namhafte Mathematiker, die sich somit eindeutig zur Tragweite der Leibnizschen Konzeption positionieren. Man liest dort auf Seite 257:

„Bevor wir in den nächsten Paragraphen alles dies und mehr zeigen werden, wollen wir jetzt, ausgehend von den Aussagen, die etwa Leibniz und l'Hospital über das unendlich Kleine und den Umgang damit gemacht haben, einen Weg aufzeigen, der basierend auf einer einzigen, sehr natürlichen Forderung fast zwangsläufig zu dem von Robinson benützten *R führen wird.

Wie wir schon erwähnten, war man sich früher durchaus darüber im klaren, daß Größen wie etwa dx oder f(x+dx) nicht einfach reelle Zahlen sein können. Zu Beginn seines Lehrbuches „G.F.A. de Analyse des infiniments petits" (Paris 1696) gibt der Marquis de l'Hospital folgende Definitionen:

„Definition I. Variable Größen sind solche, die stetig ab- oder zunehmen. Und konstante Größen sind solche, die beständig gleich bleiben, während andere sich ändern...".

„Definition II. Der unendlich kleine Teil, um den variable Größen ständig zu- oder abnehmen, heißt das Differential dieser Größe."

Eine Größe wie etwa dx ist also etwas Variables, etwas, was „mit der Zeit" variiert werden kann. Leibniz schreibt im Jahre 1702 in einem Brief an den Pariser Professor Pierre Varignon u. a.: „Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen daß die unvergleichlich kleinen Größen, selbst in ihrem populären Sinn genommen, keineswegs konstant und bestimmt sind, daß sie vielmehr, da man sie so klein annehmen kann wie man will, in geometrischen Erwägungen dieselbe Rolle wie die Unendlichkleinen im strengen Sinne spielen".

Mit den unendlich kleinen Größen meint Leibniz hier die von ihm eingeführten Differentiale.

Diese Zitate legen unserer Ansicht nach nahe, die Größe dx als eine (variable) Funktion anzusehen (sagen wir – als eine Funktion der Zeit –), die auf die Dauer immer kleinere relle Werte annimmt. Dagegen kann etwa die Zahl 2 als eine Funktion der Zeit angesehen werden, die konstant den Wert 2 hat. Dabei ist es unerheblich, ob die Zeit kontinuierlich abläuft oder nicht. Soweit das Zitat.

Gehen wir genau nach dieser Methode vor, so können wir die Menge Rvar (var für variabel) aller Folgen reeller Zahlen

(2.2)

$$R_{var}: \quad a = (a_1, a_2, a_3, \dots)$$

betrachten. In $R_{var}$ ist die Menge R der reellen Zahlen eingebettet, wenn wir z.B. 2 mit der konstanten Zahlenfolge (2, 2, 2, ... ) identifizieren. In $R_{var}$ gibt es aber auch wachsende Zahlenfolgen, die dann auf die unendlich großen Zahlen führen. Eine solche Folge hat einen speziellen Namen

(2.3)

$$\omega = (1,2,3,\dots n, n+1,\dots)$$

Nun kann man diese Folgen schon addieren und multiplizieren, indem man alle Rechenoperationen komponentenweise ausführt. Nur die Division ist nicht uneingeschränkt definiert, da die Folgen Nullen enthalten können, wie etwa die Folge (1, 0, 1, 0, ...). Jedenfalls ist aber $R_{var}$ bereits ein Ring, also auch eine Erweiterung des Ringes der reellen Zahlen. Das Problem der Division wird sich mit erledigen, wenn wir eine noch ganz andere Frage beachten. Im Sinne der Herangehensweise werden wir zwei Folgen, die sich nur am Anfang unterscheiden, als äquivalent ansehen, da es uns nur auf den Verlauf der „variablen Größe" ankommt. Also werden wir z. B. die Folge ω äquivalent zur Folge (2,2,2,2,5,6,...., n,n+1,...) ansehen. Das bringen wir etwas eleganter zum Ausdruck, indem wir die Menge D aller Folgen einführen, die ab einer gewissen Stelle nur noch Nullen haben, $d = (d_1, d_2, d_3, \dots 0,0,0, \dots)$. Dann nennen wir zwei Folgen a,b äquivalent mit dem Zeichen ~ , wenn ihre Differenz in D liegt,

(2.4)

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad b - a \in D$$

Wenn man Folgen aus D addiert oder multipliziert, erhält man wieder Folgen aus D, denn an den unendlich vielen Nullen ab einer gewissen Stelle ändert sich nichts. D ist also selbst ein Ring (ohne Eins). Außerdem ist das Produkt a•d einer beliebigen Folge a mit einer Folge $d \in D$ wieder eine Folge aus D, also $R_{var} \bullet D \subset D$. Ein solcher Teilring heißt Ideal. Hieraus lernen wir, daß ein Ideal eine Äquivalenzrelation definiert, die mit den algebraischen Operationen verträglich ist, und umgekehrt entspricht jeder solchen Äquivalenzrelation ein Ideal. Das liefert uns die Möglichkeit, eine maximale Äquivalenzrelation auszuwählen. Wir haben dazu nur ein maximales echtes Ideal $D_{max}$ auszuwählen (dieses ist nicht eindeutig bestimmt), das D enthält, $D \subset D_{max}$. Wir nennen nun zwei Folgen a, b äquivalent wenn ihre Differenz in $D_{max}$ liegt. Auch dafür verwenden wir das gleiche Symbol ~ . Die Menge *R der maximalen Äquivalenzklassen ist nun ein Körper. Daß man in *R addieren und multiplizieren kann, hatten wir uns schon überlegt. Es ist nun eine Konsequenz der Maximalität der Äquivalenzrelation, daß man in *R auch uneingeschränkt dividieren kann, sofern der Teiler von Null verschieden ist. Das einzusehen erfordert allerdings eine etwas diffizilere Betrachtung, die wir uns hier schenken.

*R ist nun aber nicht nur ein Körper sondern sogar ein geordneter Körper. Ein Element von *R nennen wir positiv, wenn es durch eine Folge a repräsentiert werden kann, deren Elemente alle positiv sind (größer oder gleich Null). Wir wollen uns jetzt als einzige Übung vergegenwärtigen, daß *R unendlich große Zahlen enthält. Eine solche Zahl ist ω, es ist die Äquivalenzklasse, die durch die Folge (2.3) repräsentiert wird. Warum ist die transfinite Zahl ω größer als jede gewöhnliche reelle Zahl? Dazu überlegen wir uns, daß wir x durch die konstante Zahlenfolge (x,x,x, ...) repräsentieren wollten. Auf Grund der Äquivalenzrelation ist sie aber auch durch jede Folge repräsentiert, die am Anfang beliebig viele Nullen hat, und dann konstant gleich x ist. Ebenso können wir in ω am Anfang erst beliebig viele Nullen setzen, also

(2.5)

$$x \sim (0,0,0,\ldots x,\ x\ ,\ x\ ,\ \ldots\ )$$

$$\omega \sim (0,0,0,\ldots k, k+1, k+2, \ldots\ )$$

Dabei ist k frei wählbar und wir können es größer als x wählen. Somit sehen wir unmittelbar, daß $\omega$ größer als x ist. Da $\omega$ unendlich groß ist, ist $\varepsilon = 1/\omega$ unendlich klein. $\omega$ ist aber keineswegs die kleinste unendlich große Zahl. Die gibt es nicht, denn auch die Zahlen $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3$, ... sind unendlich groß.

Wir haben somit einen Zahlkörper $^*R \supset R$ gefunden, der echt umfassender als der Körper der reellen Zahlen ist. Etwas verblüffend ist nun, daß sich alle reellen Funktionen f(x) auf natürliche Weise für alle nichtstandard Zahlen, unendlich große und unendlich kleine, definieren lassen, aber es springt trotzdem sofort ins Auge. Sei $x^*$ eine beliebige transfinite Zahl, so wird diese durch eine Folge $(x_1,x_2,x_3,\ldots)$ repräsentiert. Wir haben nun $f(x^*)$ nur als diejenige Zahl zu nehmen, die durch die Folge $(f(x_1), f(x_2), f(x_3),\ldots)$ repräsentiert wird.

Es besteht kein Zweifel, daß Leibniz, wenn man ihm diese Aussagen zu lesen gäbe, sagen würde: „Genau so habe ich es gemeint". Sie werden sich fragen, soll denn das alte Problem der unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen tatsächlich eine solch einfache Lösung haben? Es hat diese „einfache Lösung". Die ganze Problematik steckt in der Maximalität der Äquivalenzrelation ~ oder anders gesagt, in der Existenz eines solchen maximalen Ideals $D_{max}$. Solche Begriffe hat man erst seit einem Jahrhundert nach der Begründung der Mengenlehre und dann der modernen Algebra ausformuliert. Historisch kann man sowieso nie sagen, was wäre wenn, aber es gibt gar keinen Zweifel, daß wenigsten bereits in den 30er Jahren der Körper der nichtstandard Zahlen hätte gefunden werden könne, hätte es nicht eine „Ideologie" gegen die reale Existenz der unendlich kleinen Zahlen gegeben. Denn all die komplizierten logischen Konstruktionen, die durch Gödel im Zusammenhang mit seinem berühmten Theorem und dann durch viele andere in die mathematische Diskussion eingebracht wurden, hätten ohne weiteres zu dem Körper $^*R$ der nichtstandard Zahlen führen können, den erst 30 Jahre später Robinson entdeckte. Bevor wir die Brücke zu Betrachtungen aus der Logik schlagen,

soll noch ein Wort dazu gesagt werden, wie sich die Leibnizschen Differentialbetrachtungen in diesem „exakt konstruierten" Zahlkörper *R nun darstellt.

Eine Zahl wollen wir endlich nennen, wenn sie sich durch irgendeine gewöhnliche reelle Zahl beschränken läßt. Für zwei endliche Zahlen x,y schreiben wir $x \approx y$, wenn die Differenz x-y unendlich klein ist. In unserem erweiterten Zahlkörper *R haben wir also zwei Gleichheitsbegriffe. Die elementweise Gleichheit $x = y$, wenn also y die gleiche Zahl wie x bezeichnet und die infinitesimale Gleichheit $x \approx y$, wenn der Unterschied zwischen den beiden Zahlen unendlich klein ist. Für gewöhnliche reelle Zahlen fallen diese beiden Gleichheitsrelationen zusammen. Andererseits gibt es unter allen Zahlen y, die zu einer endlichen Zahl x infinitesimal gleich sind, eine gewöhnliche reelle Zahl $x^{st}$, die man den Standardanteil von x nennt. Ist nun $x_0$ eine gewöhnliche reelle Zahl und dx eine unendlich kleine Zahl, so ist natürlich $(x_0 + dx)^{st} = x_0$. Dies hat nun sofort die Differentialrechnung zur Folge, so wie sie die „Alten" gehandhabt haben. Ist $y = x^2$, so folgt für ein gewöhnliches reelles x

(2.6)

$$dy = (x + dx)^2 - x^2 = 2x\,dx + dx^2 \text{ , also}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx \text{ , und indem man zum Standardanteil übergeht,}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^{st} = (2x)^{st} = 2x\,.$$

Man muß also nur den Zusammenhang zwischen einer Zahl und ihrem Standardanteil ständig im Hinterkopf haben, und sofort wird das Rechnen mit Differentialen, wie es Leibniz oder Euler virtuos gehandhabt haben, vollkommen „exakt" in unserem heutigen Verständnis.

In diesem Zusammenhang ist eine Episode interessant, in der Marx eine Rolle spielt, und die in einer Monographie über „Nichtstandard Analysis" in einem speziellen Abschnitt unter der Überschrift „Karl Marx on Mysterious Differential Calculus" dargestellt ist [KUSR94, S. 7]. Verschiedentlich wird eine Kritik des unendlich Kleinen aus dem Wort „Chimäre" in folgender Marxschen Formulierung abgeleitet: „The consolation some

rationalizing mathematicians are tightly holding at, that in the qualitative sense dy and dx are in fact only infinitely small, that their ratio is only approaching 0/0, is a chimera ....“ . Die Autoren bemerken dazu, daß die später folgenden Marxschen Erklärungen einfach verschwiegen werden: „... in fact dy/dx does not denote the extravagant 0/0, but, on the contrary, it is a festive uniform for dy/dx when the latter is functioning as a ratio of infinitely small differences....“. „We therefore have nothing else to do but to view increments of the variable h as infinitely small and to ascribe to them, as such, *independent existence* ...“ .

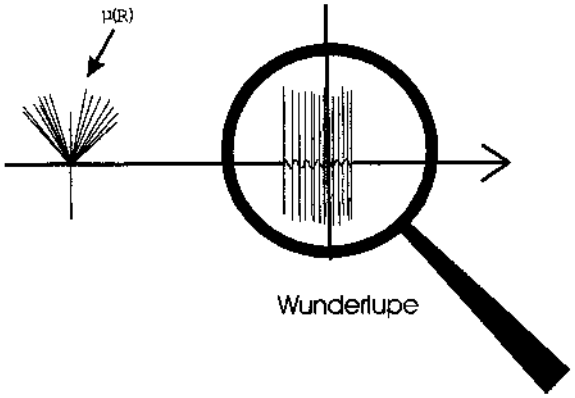
Marx jedenfalls hat „seinen Leibniz“ genau verstanden, bezüglich der Existenz solch „sinnlich-übersinnlicher „Dinge wie unendlich kleine Differentiale. Wir kommen darauf im nächsten Kapitel nochmals zurück.

Nun liegt in der Konstruktion des erweiterten Zahlkörpers *R eine gewisse Willkür und man kann sich fragen, ob es noch viel mehr solche nichtstandard Zahlen gibt, als in diesem Körper enthalten sind. In der Tat ist das so. Wir hatten schon gesehen, daß jede Funktion, die für gewöhnliche reelle Zahlen definiert ist, automatisch auch für die nichtstandard Zahlen definiert ist. Aber schon Leibniz hatte viel mehr im Auge. Alles, was man über reelle Zahlen aussagen kann, gilt in entsprechend „modifizierter Form“ auch für die nichtstandard Zahlen. Es ist gerade diese Herangehensweise, die im Rahmen der modernen Logik und Modelltheorie auf die „Wiederentdeckung“ der infinitesimalen Zahlen durch Robinson geführt hat. Bekanntlich hatte sich zu Beginn unseres Jahrhunderts eine formal-logische Herangehensweise an die Existenzprobleme der Mathematik herausgebildet. Hilbert hat dabei eine besondere Rolle gespielt. Nach dieser Betrachtungsweise „existieren“ z. B. die geometrischen Objekte Punkt, Gerade, etc. oder auch die Zahlen mathematisch wohlbegründet, wenn die Axiomensysteme, die diese Objekte beschreiben, widerspruchsfrei sind. Die Widerspruchsfreiheit sieht man etwa dadurch ein, daß man ein widerspruchsfreies Modell für die Axiome findet. Dabei muß man die Logik und Mengenlehre selbst mit in diese formalen Systeme einbeziehen, weil man sonst nicht weiß, ob man Widersprüche über die Logik oder Mengenlehre in die Mathematik einschleppt, wie die Erkenntnisse zu Beginn unseres Jahrhunderts deutlich gemacht hatten. Dabei wird der Rahmen der Mengenlehre selbst gesprengt, weil solche Begriffe wie „Menge aller Mengen“ oder „Mengen aller Ordnungszahlen“ selbst wi-

dersprüchlich sind. Über diese Problematik kann man sich in dem unterhaltsamen Buch von Hofstadter [HOFS85] informieren.

Die Dinge liegen nun so, daß man für eine „reichhaltige formale Sprache", die die gesamte Arithmetik enthält, auch eben nichtstandard Modelle findet, in denen solche nichtstandard Elemente aber auch nichtstandard Mengen auftreten. Weil beispielsweise jede transfinite Ordnungszahl auf eine unendlich große Zahl führt, kann die Gesamtheit der unendlich großen Zahlen keine Menge „im naiven Verständnis" sein. Da aber für jede unendlich große Zahl $\alpha$ der Quotient $1/\alpha$ unendlich klein ist, ist die Gesamtheit $\mu(R)$ aller unendlich kleinen Zahlen keine Menge. Diese Gesamtheit hat die Bezeichnung Monade erhalten. Es ist nicht die Leibnizsche „philosophische Monade". Allerdings ist es durchaus lohnend, den Umgang mit diesen „mathematischen Monaden" aus philosophischer Sicht zu durchleuchten. Man erhält dann gewissermaßen „mathematische Modelle" für verschiedene Eigenschaften der Leibnizschen Monaden. Schauen wir uns das Kontinuum der Geraden aus Sicht der nichtstandard Zahlen einmal an.

(2.7)




Um den Koordinatenursprung herum liegt also die Monade $\mu(R)$. Wir brauchen zu jeder gewöhnlichen reellen Zahl x nur alle unendlich kleinen Zahlen zu addieren und erhalten die Gesamtheit $x + \mu(R)$. Somit liegt um jeden „klassischen" Punkt der Geraden eine „Unmenge" von weiteren infinitesimalen Punkten herum. Die „wirkliche" Gerade hat also eine viel

kompliziertere Struktur, als man in der klassischen Mechanik annimmt. Sie ist nicht aus Punkten „zusammengesetzt", sondern, wenn überhaupt, aus Myriaden von Faserbündeln. Die „Wunderlupe" hat die Eigenschaft, endliche Dinge nicht zu vergrößern, aber das unendlich Kleine sichtbar zu machen. So sehen wir, daß um den Punkt herum ein unendlich kleines Stück des Kontinuums liegt, durch die Wellenlinie symbolisiert. Niemand wird abstreiten wollen, daß sich plötzlich das Problem der Bewegung eines „Massenpunktes" längs dieser „neuen Geraden", also auch alle Probleme der Elaten, in einem ganz neuen Licht darstellen. Das ist aber bereits ein neues Thema.

Fassen wir also zusammen: Es gibt neben dem Modell R der reellen Zahlen ein nichtstandard Modell °R für ein formalisiertes System der Logik und Arithmetik, das neben den gewöhnlichen reellen Zahlen auch hinreichend viele unendlich kleine Zahlen enthält. Und für dieses System gilt das sog. **Übertragungsprinzip**, das man auch **Leibnizsches Prinzip** nennt: Eine beliebige Formel (ohne Parameter) ist entweder in beiden Systemen wahr oder falsch.

Um ein Gefühl für die Problematik zu bekommen, die in diesem Prinzip steckt, schließen wir den Abschnitt noch mit einem Beispiel ab. Sei R der Zahlkörper der reellen Zahlen. In ihm gilt das sogenannte „archimedische Axiom": Ist a eine feste Zahl und e eine beliebig kleine Zahl (alle positiv) so werden die Glieder der Zahlenfolge

(2.8)

e, e+e, e+e+e, .... irgendwann größer als a.

Nun kann das archimedische Axiom in einem Zahlkörper mit unendlich kleinen Zahlen, also in unserem obigen *R nicht gelten. Denn ist e unendlich klein, so sind alle Glieder in (2.8) unendlich klein und können also ein endliches a nicht übertreffen. Auf den ersten Blick sieht das wie ein Widerspruch zum Leibnizschen Prinzip aus. In *R soll doch „alles" gelten, was in R gilt. Der Widerspruch löst sich dadurch, daß nicht alles gelten soll, sondern nur alle Formeln. Wir müssen also erst (2.8) in eine Formel umwandeln. Dazu können wir (2.8) so lesen:

(2.9)

Für alle a und alle e existiert eine natürliche Zahl $n \in N$ mit $n \cdot e > a$ ,

*oder als (logisch-mathematische) Formel geschrieben*

$\forall a \, \forall e \, \exists n \, ((n \in N) \text{ und } (n \cdot e > a))$ .

In dieser Formelschreibweise gilt die Aussage nun auch für die nichtstandard Zahlen. Wo ist der oben skizzierte Widerspruch hin? Er steckt im Symbol N für „natürliche Zahlen". Im nichtstandard Fall muß man das N in der Formel als Bezeichnung für die „nichtstandard natürlichen Zahlen" lesen. Ist e eine unendlich kleine Zahl, so gilt $n \cdot e > a$ trotzdem für eine nichtstandard natürliche Zahl n, die dann allerdings unendlich groß ist. (Wie etwa das obige $\omega$).

## 3. Die Monade und das Sein

Der zentrale Begriff der Leibnizschen Philosophie ist die Monade. Natürlich kann man, wie es häufig geschieht, diesen Begriff als überholt abtun, und trotzdem die Aktualität dieser oder jener Teile der Leibnizschen Philosophie betonen und nutzen. Dann hat man aber das Kernstück der Leibnizschen Philosophie gestrichen und somit ist auch den abenteuerlichsten Interpretationen der Leibnizschen Philosophie Tür und Tor geöffnet. Ein in vielerlei Hinsicht erstaunliches Beispiel, zu welch extremen Interpretationen das führen kann, gibt Bertrand Russell [RUSS03]: „Die Philosophie von Leibniz, seine Verdienste und Fehler und sein Platz in der Geschichte des Denkens sind bisher ganz allgemein und vollständig mißverstanden worden. Das erklärt sich teilweise aus seiner reinen intellektuellen Größe, teilweise aus der Unkenntnis der Herausgeber, teilweise aus seiner mangelnden Zeit, ein Opus magnum zu verfassen, und – jetzt kommt die abenteuerliche Formulierung – teilweise auch aus seinem grossen Mangel an moralischer Würde. Dieser letzte Grund veranlaßte ihn, vorwiegend seine schlechtesten Schriften zu veröffentlichen, die Konsistenz seines Systems um der Orthodoxie willen zu zerstören und die Welt (nach seinem erfolglosen Experiment mit Arnaud) bezüglich der Grundlagen seiner metaphysischen Lehre irrezuführen. Unter den Schrif-

ten, die er unveröffentlicht hinterließ, befindet sich viel, das einen weitaus höheren Wert hat als jede philosophische Abhandlung, die er der Welt zu sehen erlaubte." Soweit Bertrand Russell.

Ganz anders klingt dagegen die Einschätzung von Ernst Bloch [BLOC85, S. 124]: „Er ist ein ungeheurer Sämann, der im Morgenwind des Bürgertums seine Gedanken ausstreut, deren Frucht bei vielen heute noch nicht aufgegangen ist. ... Er kannte die Scholastiker noch völlig, ... und es gab nichts in der Welt – auch in diesem Punkt besteht eine Verwandtschaft mit Hegel –, von dem er glaubte, daß es gänzlich falsch sei. Er glaubte von allem, es stelle ungeheuer übertrieben und aufgebläht eine Seite von einer Sache dar. Daß ganz falsch überhaupt nichts ist, hat er entdeckt. So kommt es, daß man, wäre er kein solch produktiver Genius ersten Ranges gewesen, sagen könnte, er sei ein Eklektiker gewesen. Da er aber ein Eklektiker nicht sein konnte, so ist das ein Sammeln von dem, was in der Vergangenheit nicht ausgereift ist, von weiterkochenden Problemen, von denen er angeregt war und die er selbst dann wieder ausstreute. ...Diejenigen, die die Frechheit haben, Leibniz einen Eklektiker zu nennen, sind selbstverständlich selber armselige Nur-Epigonen, die nur die Katechismusphrasen repetieren."

Aber, und ich möchte es wiederholen, Leibniz hat nicht nur eine Fülle von Ideen ausgestreut, die zu jeder Art philosophischer Interpretationen ausgebeutet werden können, sondern es gibt eine zentrale Idee, die alles zu einem Ganzen faßt, zu einem dialektisch geschlossen-offenen System. Hören wir dazu nochmals Ernst Bloch [BLOC85, S. 119]: „Bedeutende Philosophie unterscheidet sich von unbedeutender dadurch, daß ihr Inhalt in einer sehr kurzen Formel, höchstens auf einer Seite, ja sogar auf einer halben Seite und am besten in einer Formel wiedergegeben werden kann, so daß es dem Weisen, dem Kundigen mindestens, genügt. Mittelmäßige und unbedeutende Philosophie muß sehr breit sein und ganz dicke Bände schreiben. Am Ende weiß man aber immer noch nicht, was der Mann eigentlich will. Deshalb schreibt er so sehr viele Bände, weil er es eben selbst nicht genau weiß, während große Philosophie einen durchschlagenden Klang hat, ein personans, ein Durchtönendes hat, das sich in einer Formel ausdrücken läßt. In der schönsten Weise zeigt sich das bei Leibniz in dem Titel seiner Dissertation »De principio individui«."

Der Begriff der Monade kommt von Giodarno Bruno her, erhält aber bei Leibniz dann einen gewandelten Inhalt, wird zum zentralen Begriff seiner Philosophie, und mit ihm beginnt auch sein „Axiomensystem der Philosophie", die Monadologie (alle Zitate und Punkte der Monadologie entnehmen wir der Ausgabe [LEIB14]):

„1. Die Monade, von der wir hier sprechen wollen, ist nichts anderes als eine einfache Substanz, die in dem Zusammengesetzten enthalten ist; einfach sein heißt soviel wie: ohne Teile sein (vgl. Theodicee, §10)."

Leibniz assimiliert in seiner Monadologie die gesamte vorangegangene philosophische Entwicklung, so auch die über den Inhalt der Begriffe Teil und Ganzes. Nicht nur kann beim Zusammensetzen von Teilen keine Energie oder Bewegung „vom Himmel fallen", was Leibniz dann in seinem allgemeinen Energieerhaltungssatz zum Ausdruck bringt, sondern das Ganze kann auch keine Eigenschaft haben, die nicht schon in den Teilen ihre Wurzeln hat. Das Verhältnis vom Teil zum Ganzen wird in der Physik heute oft so gelesen, daß etwa die Kohlenstoffatome „ihre" Eigenschaften haben, aber der Diamant hat dann neue Eigenschaften, die durch die Kristallstruktur bedingt sind, durch die Kristallstruktur hinzukommen. Dagegen ist auch nichts einzuwenden, solange man im physikalischen Begriffssystem bleibt. Das gilt aber nicht für die philosophische Seite der Problematik und schon gar nicht für die Leibnizsche Philosophie. Diese reflektiert ganz und gar die Dialektik von Stoff und Struktur. Besonders aus der Leibnizschen Raum-Zeit-Konzeption ergibt sich, daß die „Elementarbausteine", und das sind nicht Atome, nicht „in" einem Raum zusammengesetzt werden können. Heutzutage kann man sich diese Auffassung durch einfache physikalische Modellvorstellungen verdeutlichen. Fangen wir auf der Ebene der kosmischen Hintergrundstrahlung an, so können wir sagen, daß alle Stoffe und Stoffstrukturen in dem elektromagnetischen Feld der Hintergrundstrahlung schwimmen und alle Wechselwirkungen „in" diesem Quantenfeld sich realisieren. Schaut man sich den komplizierten und teilweise auch künstlich wirkenden mathematisch-theoretischen Mechanismus genauer an, mit dem man von dem Quantenfeld der Hintergrundstrahlung zum elektrischen Feld E(x) im euklidischen Raum mit den x-Koordinaten der Ingenieure kommt, so wird deutlich, welch „abgeleitete" Größe der physikalische Raum ist.

Die Leibnizsche Monadologie versteht sich als ein Axiomensystem für alle philosophischen Verhältnisse in der Welt. Das kann vermessen erscheinen. Aber auch das Axiomensystem der euklidischen Geometrie erklärt nicht alle Geometrie, wie wir heute wissen. Das Thema, das hier zur Diskussion steht, ist nicht die Frage, was das Leibnizsche System noch nicht erklärt, sondern der Nachweis, daß es teilweise auf unerwartete Weise Fragen beantwortet, die Leibniz und andere Philosophen zwar bereits philosophisch scharfsinnig behandelt haben, die in den Einzelwissenschaften aber erst in unserem Jahrhundert auftraten.

Was mit dem landläufigen Satz, daß die Welt sich ständig verändert, ausgesprochen wird, ist zweifellos richtig. Es ist aber nicht diese Welt, auf die das Axiomensystem der Monadologie bezogen ist. Was in diesem Zusammenhang Welt ist, kann man nicht besser formulieren, als wenn man Leibniz selbst sprechen läßt [LEIB68, Theodizee, S. 101]:" „Welt" nenne ich hier die ganze Folge und das ganze Beieinander aller bestehenden Dinge, damit man nicht sagen kann, mehrere Welten könnten zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten bestehen. Man muß sie insgesamt für eine Welt rechnen, oder, wie man will, für ein *Universum.*" Um zu verstehen, wie Leibniz Raum und Zeit als Ordnung der Dinge auffaßt, sollte man in seiner Definition der Welt sehr genau auf die Formulierung „Folge aller bestehenden Dinge" achten. Was in einem speziellen Weltmodell, in dem die Zeit bereits „abläuft" aus einem Ding erst später wird, gehört zur „Leibnizschen philosophischen Welt" immer dazu. Die Formulierung, „die Zeit läuft ab" ist also nur Ausdruck der Korrelation zwischen den Abfolgen in den Zuständen aller bestehenden Dinge. Was aus einem Ding einmal wird, gehört zu den Eigenschaften, zu den Prädikaten der Dinge, so wie der Charakter eines Menschen erst durch seine Handlungen offensichtlich wird und vieles lange im Verborgenen schwelt. Leibniz hebt das immer wieder hervor. Ein beliebtes Beispiel für ihn ist Kaiser Augustus. Daß er einmal Kaiser ist, gehört zu seinen Prädikaten. Nehmen wir ein aktuelles Beispiel aus der Physik. Der diesjährige Physiknobelpreis wurde für den fraktionalen Quanten-Halleffekt verliehen. Es sind makroskopische Quanteneffekte in 2-dimensionalen Festkörperstrukturen. Daß man hier „allgemeingültige physikalische Gesetzmäßigkeiten" entdeckt hat, wird niemand bestreiten. Komplizierter ist schon die Frage, ob diese Gesetzmäßigkeiten erst mit den Festkörpern „entstanden", oder

ob sie schon im Urknall galten? Sicherlich gelten sie in der „Welt". Wenn man sich zurechtlegt, wie diese Gesetzmäßigkeiten schon im Urknall galten, so kommt man zum Verständnis der Frage, wie Eigenschaften des Ganzen schon in den Teilen stecken.

Die wissenschaftliche Tragweite des Leibnizschen philosophischen Systems besteht nun in der Tatsache, daß Begriffe in einer Allgemeinheit wie der der „Welt", der Monade usw. sich nun nicht in einer nebulösen unendlichen Vielheit verflüchtigen, sondern daß es Leibniz gelingt, die unendliche Mannigfaltigkeit der Eigenschaften der Welt auf sehr wenige Eigenschaften der Monaden zu beziehen, genau auf drei Grundbegriffe: Perzeption, Appetitus und Representatio mundi. Aus Gründen, die gleich erläutert werden, wollen wir am Begriff Perzeption festhalten. Appetitus wird als Streben, Bestrebung, Begehren usw. in der Übersetzung ausgedrückt. Wir wollen das Wort „Streben" verwenden, wie in [LEIB14]. Representatio mundi kann man als Spiegelung oder Widerspiegelung des Universums verstehen, oder als Repräsentation, als Ausdrücken oder auch als Begreifen, wenn es sich um die Spiegelung in der Seele, im Bewußtsein handelt.

Die meisten Mißverständnisse zur Leibnizschen Monadologie erwachsen aus einer Umdeutung des Wortes Perzeption. Perzeption wird in der Regel als Wahrnehmung gelesen, sowohl im allgemeinen Sprachgebrauch als auch in der Psychologie. Aber ganz falsche Assoziationen entstehen, wenn man, wie es an zahllosen Stellen der Literatur geschieht, einfach sagt, daß nach Leibniz die Monaden Wahrnehmungen haben und sie dann als belebt charakterisiert und gar noch die gesamte Leibnizsche Philosophie unter Vitalismus einordnet. Die Verhältnisse liegen ganz umgekehrt. Leibniz versteht seine Philosophie als Grundlage für eine Naturwissenschaft und ordnet den Menschen, seine Seele und sein Bewußtsein in diese umfassende Naturbetrachtung ein. In Punkt 14 der Monadologie wird gesagt:

„14. Der vorübergehende Zustand, der eine Vielheit in der Einheit oder in der einfachen Substanz einbegreift und repräsentiert, ist nichts anderes als das, was man P e r z e p t i o n nennt. Diese muß, wie sich in der Folge zeigen wird, von der Apperzeption oder dem Bewußtsein unterschieden werden. Gerade hier haben die Cartesianer einen großen Fehler gemacht, insofern sie diejenigen Perzeptionen, deren man sich nicht bewußt wird, für nichts gehalten haben. ..."

Halten wir also fest: Der „Metabegriff" ist der Begriff des Zustandes. Die Monaden haben „vorübergehende Zustände" also eine Abfolge von Zuständen, die man sich aber nicht zeitlich geordnet vorstellen darf. Wie schon hervorgehoben, erwächst gerade der Zeitbegriff aus einer speziellen Abfolge von Zuständen. Erst wenn man eine Gesamtheit hat, sagen wir ein Gehirn, setzen sich die Myriaden von Zuständen ihrer Bestandteile zu dem zusammen, was man gemeinhin Wahrnehmung nennt. Ich bin in meinem Vortrag im Kolloquium zum Leibniz-Tag 1996 [LASS96] darauf eingegangen, wie einerseits der moderne Zustandsbegriff der Mathematik und Physik die Leibnizschen Intentionen verständlich macht und andererseits zeigt, wie weitreichend die moderne Physik Inhalte des Leibnizschen Zustandsbegriffes realisiert.

Ich wiederhole es, die Leibnizsche Philosophie ist kein Vitalismus, die Monaden sind nicht lebendig. Wenn man überhaupt an dieser Stelle das Wort lebendig mit Recht gebrauchen kann, dann nur um den Gegensatz zu t o t auszudrücken. Die Materie ist an keiner Stelle tot und auch die Monaden sind es nicht. Wir können Marx als Zeugen dafür aufrufen [MARX85, S. 160]:

„Unter den der Materie eingeborenen Eigenschaften ist die Bewegung die erste und vorzüglichste, nicht nur als mechanische und mathematische Bewegung, sondern mehr noch als Trieb, Lebensgeist, Spannkraft, als Qual – um den Ausdruck Jakob Böhmes zu gebrauchen – der Materie. Die primitiven Formen der letzteren sind lebendige, individualisierende, ihr inhärente, die spezifischen Unterschiede produzierende Wesenskräfte.

In Bacon, als seinen ersten Schöpfer, birgt der Materialismus noch auf naive Weise die Keime der allseitigen Entwicklung in sich. Die Materie lacht in poetisch-sinnlichem Glanze den ganzen Menschen an."

In der Leibnizschen Monadologie sind die Bewegung und die Kräfte voll in die Monaden hinein geholt. Die mechanischen Bewegungen sind selbst in komplizierter Weise eine Folge der Zustandsänderungen der Monaden. Die Kräfte existieren nicht neben den Monaden, sondern gehören zur Welt der Monaden, etwa so wie in der Elementarteilchenphysik die Kraftfelder selbst ihre Quanten haben. Z. B. werden elektromagnetische Kräfte zwischen den Protonen und Elektronen durch die elektromagnetischen Felder „vermittelt" und die Quanten des elektromagnetischen Feldes sind die Photonen, also ihrerseits Elementarteilchen. Die inneren

Kräfte, die inneren Bewegungen sind in die Zustandsänderungen der Monaden akkumuliert. So formuliert Leibniz ganz nüchtern in Punkt 15. der Monadologie:

„15. Die Tätigkeit des inneren Prinzips, das die Veränderung oder den Übergang von einer Perzeption zu einer anderen bewirkt, kann als S t r e b e n bezeichnet werden. ..."

Die Monaden sind also nicht tot. Sie haben eine innere Dynamik, eine Veränderlichkeit, ein Streben nach Veränderung. Die Dialektik in der Leibnizschen Herangehensweise kommt an dieser Stelle darin zum Ausdruck, daß die Zustände sich verändern, dadurch von einem Prinzip gesprochen werden kann, daß aber andererseits der Zustand nur im Zuge seiner Veränderung begriffen werden kann, auch dadurch festgelegt ist, was er alles nicht ist.

Wie bereits betont, muß man das Gesamtsystem der Leibnizschen Philosophie nehmen, um den jeweiligen Inhalt der Begriffe zu erfassen. Sowenig wie man beim Axiomensystem der euklidischen Geometrie vorher klären kann, was Punkt, Gerade, Ebene sind, ebensowenig kann man im Leibnizschen System vorher klären, was Substanz, Teil, einfach, zusammengesetzt etc. bedeuten. Insbesondere muß man immer beachten, daß Teilbarkeit hier nichts mit räumlicher Teilbarkeit zu tun hat. Ja, auf der Ebene der Monaden gibt es noch gar keinen Raum, weder im Sinne der Newtonschen Konzeption noch der Einsteinschen, sofern auch in der Relativitätstheorie der Raum nicht selten als ein Behälter verstanden wird, wenn auch ein „gekrümmter". Vom Raum der klassischen Naturwissenschaft kann man erst sprechen, wenn man Körper hat (wenn man will, durchaus im Descartschen Sinne). Körper sind nach Leibniz immer Aggregate von Monaden (von unendlich vielen). Teilen ohne räumlich zu teilen war im Rahmen des Newtonschen Weltbildes eine nahezu unvorstellbare Sache. Dies war auch ein konkreter Punkt, an dem Kant an Leibniz gescheitert ist. Daß Kant die Philosophie ungeheuer bereichert hat, steht außer Frage, aber außer Frage steht für mich auch, daß er zu viel von Leibniz weggeworfen hat und zwar völlig unnötig. Gleich recht gilt das natürlich für die sog. Neukantianer, die aber außerdem selbst vom Gehalt der Kantschen Philosophie wenig bewahrt haben.

Einige physikalisch-mathematische Aspekte dieser Teilbarkeitsproblematik werden wir noch diskutieren. Auch hatten wir im vorigen Abschnitt

schon gesehen, daß die Ausarbeitung der Leibnizschen Konzeption des Infinitesimalen dazu führt, daß man sich Mengen nicht als zusammengesetzt aus ihren Elementen vorstellen darf. Jetzt will ich noch einen entscheidenden Punkt hervorheben, dessen Nichtbeachtung immer wieder eine Ursache dazu ist, Leibniz unter irgendwelche Klassifikationen der Philosophie einzuordnen, wo er gar nicht hingehört. Am absurdesten ist die Einordnung unter die subjektiven Idealisten. Nichts ist aber falscher als die Monaden als geistige Gebilde aufzufassen. Das ist, wo es „gut gemeint ist", weil man die Leibnizsche Philosophie retten wollte, aber mit der Monade nichts anzufangen wußte, dem streng mechanisch materialistischen Standpunkt geschuldet, wo man sich nichts handfestes Reales vorstellen konnte, das nicht in Raum und Zeit liegt. Wer nur einmal schnell bei Leibniz nachlesen will, könnte auch durch Begriffe in die Irre geführt werden, die damals eine ganz andere Bedeutung hatten als heute, speziell im dialektisch-historischen Materialismus. Z. B. kann eine von Leibniz gewählte Überschrift wie „Was jenseits der Sinne und der Materie liegt" zu Mißverständnissen beitragen, die aber schon dann ausgeräumt werden, wenn man nur weiter liest [LEIB66 II, S. 419]:

„Was die zweite Frage anbetrifft, ob es immaterielle Substanzen gibt, so muß man sich erst näher über ihre Bedeutung klar werden, ehe man zu ihrer Auflösung schreitet. Bisher hat man unter der Materie etwas verstanden, was nur leidende und indifferente Bestimmungen, wie z. B. die Ausdehnung und die Undurchdringlichkeit, einschließt und erst durch etwas anderes zu einer gegebenen Form oder Tätigkeit bestimmt werden muß. Wenn man demnach sagt, es gebe immaterielle Substanzen, so will man damit sagen, daß es Substanzen gibt, die andere Bestimmungen in sich schließen, nämlich die Perzeption und das Prinzip der Tätigkeit oder der Veränderung, das man weder durch die Ausdehnung, noch durch die Undurchdringlichkeit zu erklären vermag."

Nehmen wir die letzten Sätze einmal ganz wörtlich: Es gibt also Substanzen, die sich nicht durch Ausdehnung und Undurchdringlichkeit charakterisieren lassen, und die das Prinzip der Tätigkeit und Veränderung in sich tragen. Im weiten Sinne der Worte gab es in der klassischen Newtonschen Physik keine solchen Objekte, diese kommen erst durch die Teilchen der Quantenphysik in die Naturwissenschaften hinein. Und schon gar nicht gab es solche Objekte als unteilbare Einheiten.

Das Problem der Einheiten oder der unteilbaren Substanzen hat eine Tradition durch die gesamte Philosophie hindurch, angefangen von Parmenides. Für Leibniz war es keine Frage, daß es Einheiten gibt, es war seine zentrale Idee wie wir Bloch folgend bereits anmerkten. Seine berühmte Formulierung „Was nicht **ein** Sein ist, ist auch nicht ein **Sein**!" bringt das Grundproblem auf einen Nenner. Man muß es aber nicht einer Unklarheit oder gar Unfähigkeit von Leibniz zuschreiben, wenn er keine „physikalischen Beispiele" für Monaden anführt. Die konnte er damals gar nicht angeben und wie wir verdeutlichen wollen, ist dabei auch heute Vorsicht geboten. Das Fehlen von Beispielen hat die Philosophen seit Aristoteles immer bewegt. Zu Beginn dieses Jahrhunderts schreibt Windelband in seinem zumindest damals sehr beachteten „Lehrbuch der Geschichte der Philosophie" [WIND93, S. 117]:

„Je schärfer so Aristoteles den wissenschaftlichen Substanzbegriff in seiner logischen und metaphysischen Bestimmung ausgebildet hat, um so verwunderlicher kann es auf den ersten Blick erscheinen, daß er weder ein methodisches noch ein sachliches Prinzip angegeben hat, nach dem zu entscheiden wäre, welches nun eigentlich die wahrhaft seienden Einzeldinge in seinem Sinne sind. Klar ist nur, daß er einerseits nicht jedes Beliebige, was gelegentlich in der Erfahrung als von den übrigen getrenntes Ding erscheint, als Wesen gelten ließ, andererseits, daß er den organischen Individuen, insbesondere z. B. den einzelnen Menschen diesen Charakter zuschrieb. Im Sinne seiner Lehre wäre es, zu meinen, daß er nur da hätte von einem „Wesen" reden können, wo eine innere Formbestimmtheit den Grund der Zusammengehörigkeit der einzelnen Merkmale bildet, wo also die Erkenntnis dieses Wesens die Aufgabe der Wissenschaft, das Seiende durch den allgemeinen Begriff zu bestimmen, insofern löst, als das bleibende Einzelding den Gattungsbegriff für alle seine besonderen in der Wahrnehmung sich zeigenden Erscheinungen bildet.

Aber die sokratisch-platonische Ansicht von der Aufgabe der Wissenschaft brachte es schließlich mit sich, daß Aristoteles daneben doch wieder das Wesen des Einzeldings als dasjenige bestimmte, wodurch es seiner Gattung zugehört."

Das Problem der Einheit ist äußerst kompliziert und es ist kein Mangel der Leibnizschen Philosophie, daß er selbst in diesem Zusammenhang oft unentschieden bleibt. Ganz im Gegenteil ist hoch interessant, was Leibniz

als Einheiten ansehen möchte [LEIB92, Brief an Arnauld, S. 237]: „Diese Modi nun schließen Beziehungen zu anderen Substanzen ein, wodurch der Geist veranlaßt wird, sie gedanklich zu vereinigen und im Dienst einer bequemen Handhabbarkeit für das Denken alle diese Dinge zusammen unter einem Namen zu fassen. Man darf sich aber nicht dahingehend täuschen lassen, aus ihnen ebenso viele Substanzen oder wahrhaft reale Wesen zu machen. Das tun nur die, die bei den Erscheinungen stehenbleiben, oder auch die, die aus allen Abstraktionen des Geistes Realitäten machen und Zahl, Zeit, Ort, Figur als ebenso viele gesonderte Wesen auffassen. Ich dagegen bin der Ansicht, daß man die Philosophie nicht besser erneuern und auf etwas klar Umrissenes zurückführen kann, als wenn man allein nur die Substanzen oder vollständigen Wesen anerkennt, ausgestattet mit einer wahrhaften Einheit und ihren verschiedenen aufeinander folgenden Zuständen; bei allem übrigen handelt es sich nur um Phänomene, um Abstraktionen oder Beziehungen. Niemals wird man eine Art Regel finden können, die ermöglichte, durch Aggregation eine wahrhafte Substanz zu konstituieren; so sind z. B. alle die Teile, die auf einen gemeinsamen Zweck hin zusammenwirken, geeigneter, eine wirkliche Substanz zu bilden als die, die sich berühren. Alle Beamten der Indischen Kompanie Hollands werden dann weit eher eine reale Substanz ausmachen als ein Steinhaufen. Was aber ist dieser gemeinsame Zweck anderes als eine Ähnlichkeit oder auch eine Ordnung des Handelns und Erleidens, die unser Geist in den verschiedenen Dingen bemerkt? Will man dagegen die Einheit durch Berührung vorziehen, so wird man auf andere Schwierig-keiten stoßen."

Wir wollen aber vorrangig im Rahmen der Physik bleiben, und da ist es in der Tat so, daß ein physikalisches Objekt, das im Leibnizschen Sinne als eine einfache Substanz angesehen werden kann, erstmals mit der Feldtheorie auftrat. Wir können diesen Sachverhalt nicht besser formulieren, als direkt ein Zitat Einsteins anzuführen. In seinen letzten Lebensjahren hat Einstein nochmals verschiedene Gelegenheit genutzt, den philosophischen Gehalt seiner Entdeckungen ins richtige Licht zu rücken. Seine allgemeine Relativitätstheorie hatte schon bedeutende Ausarbeitungen durch eine Vielzahl von Gelehrten gefunden, und damit auch die verschiedensten Interpretationen. Von Einstein sind viele pointierte Äußerungen bekannt. Eine ist der Ausspruch: „Die Relativitätstheorie war so schön

einfach, bis sich die Mathematiker ihrer angenommen haben." Dieser Ausspruch wird oft mit dem Kommentar versehen, daß Einstein etwas Mühe mit strenger Mathematik gehabt hätte, und die ausgefeilte mathematische Theorie der gekrümmten Räume nicht recht verstanden hätte. So trösten sich auch diejenigen Studenten mit Einstein, die mit der entsprechenden Mathematik ihre Schwierigkeiten haben. In Wirklichkeit zielt der Einsteinsche Aphorismus in eine ganz andere Richtung, nämlich gegen die auch heute noch in populären Formulierungen dominierende Auffassung, daß das Wesen der allgemeinen Relativitätstheorie der „gekrümmte Raum" sei. Einstein wurde nicht müde immer wieder darauf hinzuweisen, daß der entscheidende Punkt die Beseitigung ausgezeichneter Koordinatensysteme ist. Zur erneuten Herausgabe seiner berühmten „Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie" unter dem neuen Titel „Grundzüge der Relativitätstheorie" hat er 1954, also ein Jahr vor seinem Tod zwei Anhänge geschrieben. Dort lesen wir im Anhang II [EINS90, S. 138]:

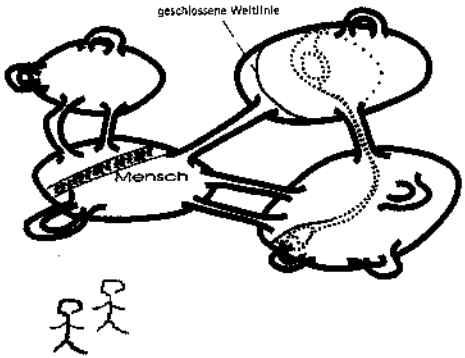
„Die eigentliche Leistung der (allgemeinen) Relativitätstheorie liegt darin, daß sie die Physik von der Notwendigkeit der Einführung des „Inertialsystems" (bzw. der Inertialsysteme) befreit hat. Das unbefriedigende an diesem Begriff liegt darin: Er wählt ohne Begründung unter allen denkbaren Koordinatensystemen gewisse Systeme aus. Es wird dann angenommen, daß die Gesetze der Physik nur in bezug auf solche Inertialsysteme gelten (z. B. der Trägheits-Satz und das Gesetz von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit). Dadurch wird dem Raum als solchem eine Rolle im System der Physik zuerteilt, die ihn vor den übrigen Elementen der physikalischen Beschreibung auszeichnet:

... Wir fragen nun: Welche Neuerungen der nach-Newtonschen Entwicklung der Grundlagen der Physik haben die Überwindung des Inertialsystems möglich gemacht? In erster Linie ist es die Einführung des Feldbegriffes durch und im Anschluß an die Faraday-Maxwellsche Theorie des Elektromagnetismus, genauer gesagt die Einführung des Feldes als eines selbständigen nicht weiter reduzierbaren Grundbegriffs. Die allgemeine Relativitätstheorie kann – soweit wir es gegenwärtig beurteilen können – nur als Feldtheorie gedacht werden. Sie hätte sich nicht entwickeln können, wenn man an der Auffassung festgehalten hätte, daß die Realität aus materiellen Punkten bestehe, die unter dem Einfluß von zwischen ihnen wirkenden Kräften sich bewegen."

Dieses Einsteinzitat kann in verschiedene Richtungen ausgewertet werden. Hier soll vor allem die Betonung auf der Hervorhebung des irreduziblen Charakters des elektromagnetischen Feldes liegen. Es ist eine solch einfache Substanz ohne Teile. Es hat somit Züge einer Monade. Jedenfalls ist es nach der Einsteinschen Formulierung das erste physikalische Beispiel einer nicht weiter reduzierbaren physikalischen Substanz. Das hat Einstein zwar 1954 zum wiederholten Male so formuliert, aber schon um die Jahrhundertwende genau erkannt, zu einer Zeit, als die Maxwellsche Theorie noch längst nicht in ihrer Bedeutung verstanden war, ja teilweise noch gar nicht akzeptiert wurde. Dazu paßt die Episode, daß er nicht zuletzt deswegen die Aufnahmeprüfung in Zürich nicht bestand, weil er die Bedeutung der Faraday-Maxwellschen Feldtheorie hervorhob. Daß Einstein dabei den ihn examinierenden Professor respektlos mit „Herr Weber" angeredet hat, mag ein übriges dazu getan haben.

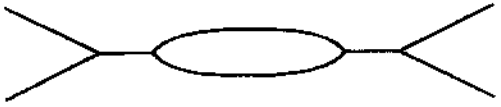
Wenn wir das elektromagnetische Feld als einen Kandidaten für Monaden akzeptieren, so wird klar, daß diese sich über die gesamte Welt erstrecken, so wie durch den Teilchen-Welle-Dualismus der Quantenphysik sich jedes Teilchen sofort über das gesamte Universum erstreckt. Aber noch in einem ganz anderen Sinne ist ein Individuum kein Punkt oder lokalisierter Fleck im Universum. Ein Einsteinscher Kosmos (in dem Raum und Zeit eine Einheit bilden) kann ein kompliziert zusammenhängendes Gebilde sein. In einschlägigen populären Darstellungen zur Kosmologie findet man Bilder wie in (3.1).

(3.1)



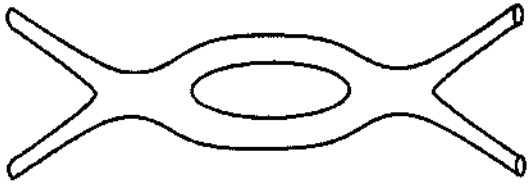
Das Universum ist eine mehrfach-zusammenhängende Mannigfaltigkeit, hier als einzelne Luftballons symbolisiert, die durch Schläuche (Wurmlöcher) verbunden sind. Da Raum und Zeit eine Einheit bilden, ist ein Individuum kein Punkt in dieser Mannigfaltigkeit, sondern immer eine Weltlinie. Auch wenn das Individuum mechanisch ruhen sollte, entsteht trotzdem eine Weltlinie, da ja Zeit „vergeht". Im „linken unteren Teil" des Universums leben die Menschen. Zu jedem Menschen (oder auch der ganzen Menschheit) gehört nicht nur eine Weltlinie, sondern ein Weltschlauch, da ja jedes (gedachte) Teilchen des Menschen selbst eine komplizierte Weltlinie hat. Die Menschheit lebt in einem etwas glatten Teil des Universums. In der Nähe der Menschheit sind makroskopische Zeitreisen in die Vergangenheit wahrscheinlich nicht möglich. In anderen Teilen des Universums (links oben) haben wir geschlossene Weltlinie. Diese könnten auch sehr kurz sein. Aber dort werden wohl keine Menschen leben, die dann in die Vergangenheit zurück reisen, und ihren Großvater umbringen, bevor der Vater geboren ist. Betrachten wir einmal ein Elementarteilchen als ein Individuum. Es kann zerfallen in zwei Teilchen die sich dann wieder vereinigen und wir erhalten dann etwa folgendes Bild (Feynmangraphen):

(3.2)



Sind diese Elementarteilchen nicht punktförmig, sondern „Strings" (kleine geschlossen Ringe) so ist ihre Weltlinie nicht eine eindimensionale Kurve, sondern ein ganzer Schlauch wie in (3.3). Dieser Schlauch

(3.3)



erstreckt sich dann durch das gesamte Universum, wie im rechten Teil in (3.1) symbolisiert. Wenn auch die Menschen nicht durch Wurmlöcher rutschen werden (das führt auf viele Widersprüche), so ist das für einzelne Elementarteilchen natürlich kein Problem, wie im Bild angedeutet ist.

Fassen wir zusammen: Wenn man sich von den Monaden „ein Bild machen" will, so muß es mindestens so kompliziert sein, wie sich jede Phantasie ausmalt, die sich um die Skizze (3.1) rankt. Heute, in der Kosmologie nach Einstein, sind uns solche raum-zeitlichen Vorstellungen längst vertraut geworden. In der Newtonschen Physik gab es nichts dergleichen. So können wir es auch einem Kant „nachsehen", wenn er unteilbare Einheiten letztlich doch als Punkte, Kraftpunkte oder dergleichen auffaßte.

## 4. Der Satz vom zureichenden Grund und der Energieerhaltungssatz.

In der Regel fangen in modernen Büchern die Ausführungen zum allgemeinen Energieerhaltungssatz etwa folgendermaßen an, ohne Leibniz überhaupt zu erwähnen: „Die Entdeckung des Energieerhaltungssatzes durch Mayer, Joule und Helmholtz ...". Albert Einstein, der sich selbst in wesentlichen Punkten bis zum Ende seines Lebens von der „physikalischen Öffentlichkeit" mißverstanden fühlte und auch tatsächlich mißverstanden wurde, hatte ein gutes Gespür für das Mißverständnis der Leibnizschen Ideen in Kreisen der Naturwissenschaftler. Es gibt vielfältige deutliche Formulierungen Einsteins zur richtigen Einordnung und Wertung der Leibnizschen Erkenntnisse. In einer Zeit, in der die Mehrheit der Physiker kaum noch „wußte", daß Leibniz den allgemeinen Energieerhaltungssatz nicht nur formuliert, sondern zu Grundlage seiner Dynamik gemacht hatte, schrieb Einstein [EINS84, S. 125]: „Der Satz von der Erhaltung der Energie, der schon im 17. Jahrhundert von Leibniz in seiner vollen Allgemeingültigkeit gültig vermutet wurde, entwickelte sich im 19. Jahrhundert wesentlich als Folge eines Satzes der Mechanik". Das „gültig vermuten" bezieht sich keineswegs auf etwaige nur vage Formulierungen des Energieerhaltungssatzes durch Leibniz, diese waren ganz eindeutig, wie wir sehen werden, sondern auf die konkreten Formen der Energie.

Selbstverständlich hat Leibniz noch nicht das mechanische Wärmeäquivalent formuliert, oder die Gleichheit der mechanischen und elektrischen Energie bei entsprechenden Übergängen, da diese physikalischen Erscheinung damals noch gar nicht quantitativ untersucht wurden. Das ist aber gar nicht das Entscheidende, denn auch heute liegt die zentrale philosophische Bedeutung des allgemeinen Energieerhaltungssatzes nicht so sehr in der Tatsache begründet, daß er bisher bei allen „Energieumwandlungen" bestätigt wurde, sondern vielmehr in seiner richtungsweisenden erkenntnistheoretischen Kraft, die aus der Überzeugung erwächst, daß er niemals verletzt werden kann. Irgendwelche Anzeichen beim Aufbau einer neuen physikalischen Theorie, die auf eine Verletzung des Energieerhaltungssatzes hindeuten, werden immer als ein Mangel dieser neuen Theorie empfunden. Der Energieerhaltungssatz dient also gleichsam als Richtschnur beim Ausbau der physikalischen Theorien, und so wurde er von Leibniz auch angewendet, als eine Grundtatsache der Mechanik, die sich aber ihrerseits aus seinem philosophischen System ergab. Holz schreibt dazu vollkommen treffend [HOLZ83, S. 110]: „Der Grundgedanke, der eine ars combinatoria sinnvoll macht, ist wieder im monadologischen System zu suchen. Wenn wir nämlich die Welt als ein universales, sich dauernd in Bewegung und Veränderung befindliches Beziehungsgefüge denken, so entsteht Neues in dieser Welt durch andersartige Kombination der Beziehungsglieder; in einer solchen Welt haben wir unter Geltung des Satzes von der Erhaltung der Energiegesamtmenge (auf den Leibniz sehr viel Wert legte, weil er darin eine Garantie gegen theologischen Wunderglauben sah) ständig Geburt und Tod, Entstehen und Vergehen. In diesem dauernden Werden vollzieht sich der Übergang zu qualitativ Neuem durch andersartige Verbindung qualitativ faßbarer Elemente."

In diesem Sinne ist der Energieerhaltungssatz heute geeignet, den „Weg zurück zur Leibnizschen Philosophie" zu finden. Es ist das Prinzip „Aus nichts wird nichts", das in der Leibnizschen Philosophie eine viel umfassendere und konkretere Formulierung gefunden hat, welche das philosophische Wesen des Energieerhaltungssatzes ausmacht. Gerade weil die Naturwissenschaft die Leibnizsche Physik über Bord geworfen hatte, mußte der Energieerhaltungssatz wiederentdeckt werden. Das reflektiert sich auch heute noch in Standardwerken zur „Geschichte der Naturwissenschaft" wo man, ohne Leibniz überhaupt zu erwähnen, über die Ent-

deckung des Energieerhaltungssatzes durch Robert MAYER etwa folgendes lesen kann: „Als tragendes philosophisches Prinzip wählte er 1845 den Leitsatz des antiken materialistischen Philosophen Demokrit „Aus nichts wird nichts. Nichts wird aus nichts", und er kam zu Formulierung des allgemeinen Satzes über die Erhaltung und Umwandlung der Energie".

Die Leibnizsche Dynamik hat sich herausgebildet in einer ständigen Auseinandersetzung mit den Descartschen Auffassungen. In der Schrift „Kurzer Beweis eines wichtigen Irrtums, den Descartes und andere in der Aufstellung eines Naturgesetzes, nach dem Gott stets dieselbe Bewegungsqualität erhalten haben soll, begangen haben" aus dem „historischen Jahr 1686", schreibt Leibniz [LEIB66, I, S. 246]: „Nun ist es aber der Vernunft angemessen, daß sich dieselbe Summe der bewegenden Kraft in der Natur erhält und sich weder vermindert – denn niemals sehen wir einen Körper Kraft verlieren, ohne daß sich diese auf andere überträgt – noch auch vermehrt, weshalb auch ein mechanisches perpetuum mobile niemals zustande kommt, weil nämlich keine Maschine und selbst die ganze Welt nicht ihre Kraft, ohne einen Impuls von außen, erhöhen kann." Kraft ist bei Leibniz in diesen und ähnlichen Zusammenhängen das, was wir heute Energie nennen. Die Kraft im Sinne der Newtonschen Mechanik ist ein späterer Begriff. Selbst in den „Prinzipien" ist für Newton Kraft das, was wir heute Wirkung nennen.

Leibniz gebraucht hier, 1686, als Ausgangspunkt für den Energieerhaltungssatz noch die Formulierung „der Vernunft angemessen". Aus dem gleichen Jahr stammen auch die ersten Entwürfe seines philosophischen Systems. Im Zuge ihrer Ausreifung in den nächsten 30 Jahren wird der Energieerhaltungssatz immer konsequenter eine Folge der monadologischen Philosophie. In einem Brief an de l'Hospital zehn Jahre später ist der Energieerhaltungssatz mit der Leibnizschen Auffassung zu Ursache und Wirkung verknüpft [LEIB66, I, S. 277 ]:"Alle Beweise führen übereinstimmend zu genau demselben Resultat. Sie sehen, daß der Satz von der Gleichheit von Ursache und Wirkung, d. h. die Ausschließung eines mechanischen perpetuum mobile, meiner Schätzung der Kraft zugrunde liegt. Diese erhält sich immer das Quantum, das zur Hervorbringung einer bestimmten Wirkung, zur Erhebung eines Gewichtes auf eine bestimmte Höhe, zur Spannung einer Feder etc. erforderlich ist, ohne daß in der Gesamtwertung das geringste gewonnen oder verloren werden kann, wenn-

gleich allerdings oft ein Teil von ihr, den man jedoch niemals in Rechnung zu ziehen vergessen darf, durch die nicht mehr wahrnehmbaren Teile des Körpers oder durch seine Umgebung absorbiert wird."

Auch der Hinweis auf den möglichen Übergang der Energie auf nicht mehr wahrnehmbare Teile lenkt auf das Wesen der Wärme als Bewegung unsichtbarer Teile hin, gegen die sich die Physik noch lange gesträubt hat. Bevor wir weiter ausführen, wie zentral der Gedankenkreis um den allgemeinen Energieerhaltungssatz für die Leibnizsche Dynamik war, wollen wir an der durch Leibniz richtig gefundenen Formel $E \sim m\ v^2$ verdeutlichen, wie er sein „Prinzip des zureichenden Grundes" zur Ableitung physikalischer Gesetzmäßigkeiten nutzte. Es muß nicht noch einmal betont werden, wie eindeutig und zweifelsfrei er seine Grundprinzipien in der Monadologie charakterisiert und wir wollen diese beiden Punkte 31. und 32. vollständig zitieren:

„31. Unsere Vernufterkenntnis beruht auf zwei großen Prinzipien: erstens auf dem des Widerspruchs, kraft dessen wir alles als falsch beurteilen, was einen Widerspruch einschließt, und als wahr alles, was dem Falschen entgegengesetzt oder kontradiktorisch ist (vgl. Theodicee, §44, §169)."

„32. Sie beruht zweitens auf dem Prinzip des zureichenden Grundes, kraft dessen wir annehmen, daß sich keine Tatsache als wahr oder existierend, keine Aussage als richtig erweisen kann, ohne daß es einen zureichenden Grund dafür gäbe, weshalb es eben so und nicht anders ist - wenngleich uns diese Gründe in den meisten Fällen nicht bekannt sein mögen (vgl. Theodicee, §44, §196)."

An dieser Stelle ist es angezeigt nochmals nachdrücklich darauf hinzuweisen, daß für Leibniz Axiome, Postulate, Prinzipien etc. niemals nur Gedankenkonstruktionen sind, die man der Natur vorschreibt, an denen man die Natur testet. Vielmehr sind es Grundwahrheiten, die selbst im Prozeß der Wahrheitsfindung bestätigt, oder wie Leibniz ohne Skrupel sagt, bewiesen werden müssen. Zu diesem speziellen Postulaten schreibt er [LEIB91, S. 81]: „Diese Argumente sind doch sonnenklar, und darum ist es sehr merkwürdig, wenn man mir vorwirft, ich würde meinen Satz von der Notwendigkeit eines hinreichenden Grundes ohne irgendeinen Beweis, der entweder von der Natur der Dinge oder der göttlichen Vollkommenheit Gebrauch macht, vorbringen. Nämlich die Natur der Dinge bringt es mit

sich, daß jedem Ereignis seine geeigneten Bedingungen, die zu seinem Eintreten erforderlichen Dinge und Dispositionen vorangehen müssen. Gerade ihre Existenz ist der hinreichende Grund für das Ereignis."

Wie man den Bezug auf Gott lesen muß, wird aus den Erörterungen im nächsten Kapitel deutlich.

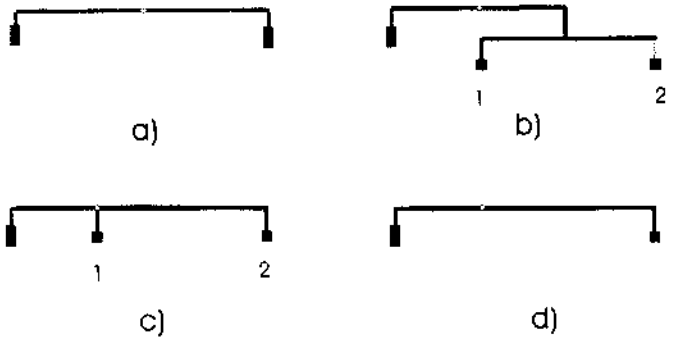
Leibniz wendet das Prinzip des zureichenden Grundes mit äußerster Konsequenz an. Wir werden noch diskutieren, wie er hieraus den Schluß auf die Nichtexistenz des leeren Raumes zieht. Nichts ist ohne Grund, keine Zahl in der Natur, kein Gesichtszug eines Menschen etc., nicht einmal die Naturgesetze selbst. Diese sind nicht nur Gründe für spezielle Meßresultate, sondern selbst das Resultat tieferer Gründe. Aber hören wir, wie Einstein das formuliert und zwar in einem bemerkenswerten Zusammenhang, in seiner Rede zum 60. Geburtstag von Max Planck [EINS93, S. 109]: „Bei dieser Unsicherheit der Methodik könnte man denken, daß beliebig viele, an sich gleichberechtigte Systeme der theoretischen Physik möglich wären; diese Meinung ist auch prinzipiell zutreffend. Aber die Entwicklung hat gezeigt, daß von allen denkbaren Konstruktionen eine einzige sich als unbedingt überlegen über alle andere erwiesen hat. Keiner, der sich in den Gegenstand wirklich vertieft hat, wird leugnen, daß die Welt der Wahrnehmungen das theoretische System praktisch eindeutig bestimmt, trotzdem kein logischer Weg von den Wahrnehmungen zu den Grundsätzen der Theorie führt. Dies ist es, was Leibniz so glücklich als „prästabilierte Harmonie" bezeichnet. Diesen Umstand nicht genügend zu würdigen, wird von den Physikern manchem Erkenntnistheoretiker zum schweren Vorwurf gemacht. Hierin scheinen mir auch die Wurzeln der vor einigen Jahren zwischen Mach und Planck geführten Polemik zu liegen. Die Sehnsucht nach dem Schauen jener prästabilierten Harmonie ist die Quelle der unerschöpflichen Ausdauer und Geduld, mit der wir Planck den allgemeinsten Problemen unserer Wissenschaft sich hingeben sehen, ohne sich durch dankbarere und leichter erreichbare Ziele ablenken zu lassen."

Diese Ausführungen Einsteins zu Leibniz gewinnen noch an Bedeutung, wenn man sie auf dem Hintergrund der Dreiecksbeziehung Mach, Planck, Einstein wertet. Einstein hat den Einfluß Machs auf ihn, der sich aus dessen treffender kritischen Analyse der Newtonschen Mechanik ergab, immer hoch gewürdigt. So war er auch durch die scharfe Kontroverse zwischen Mach und Planck nachhaltig berührt und hat sich vermit-

telnd dazu geäußert. Z. B. schreibt er an Mach: „Ich kann heute noch nicht begreifen, wie Planck, den ich sonst wie kaum eine zweiten hochschätzen gelernt habe, Ihren Bestrebungen so wenig Verständnis entgegenbringen konnte." [MACH88, S. 771]. Trotzdem akzeptiert Einstein nichts von dem, was man die positivistische oder konventionelle Position Machs bezeichnen kann. In diesem Sinne ist die Einsteinsche Hervorhebung des Leibnizschen Standpunktes eine unzweideutige Abgrenzung von der Machschen philosophischen Position, der Leibniz mit einem Federstrich abtut [MACH88, S,467]: „Bei Leibniz, dem Erfinder der besten aller Welten und der prästabilierten Harmonie, welche in Voltaires „Candide"...ihre gebührende Abfertigung gefunden hat, brauchen wir nicht zu verweilen".

Wir kommen auf die erkenntnistheoretischen Konsequenzen des Prinzips des zureichenden Grundes noch einmal im nächsten Abschnitt zurück. Jetzt wollen wir vor allem zeigen, wie aus dem Satz vom zureichenden Grund ganz konkrete quantitative Aussagen gewonnen werden können. Das klassische Beispiel dafür aus der Antike ist die Ableitung des Hebelgesetzes durch Archimedes mittels schrittweiser und wiederholter Anwendung dieses Prinzips, ein Beispiel, an das Leibniz unmittelbar anknüpft. Die einzelnen Schritte sind in der folgenden Abbildung dargestellt:

(4.1)




In a) bleibt ein Hebel mit gleichen Hebelarmen, an dem gleiche Gewichte hängen, natürlich im Gleichgewicht. Welchen Grund sollte es geben, daß sich eine Seite des Hebels senkt? Wiederum durch Anwendung des Satzes

vom zureichenden Grund können wir das Gewicht auf der rechten Seite durch zwei halbe Gewichte ersetzen, die ihrerseits an zwei gleichen Hebelarmen hängen. Hier müssen wir nur hinzufügen, daß wir den Hebel selbst als gewichtslos annehmen wollen. Die Länge des Fadens F spielt keine Rolle, und so können wir ihn zu Null verkürzen und kommen somit zum Bild c). Da alles in Ruhe bleibt, können jetzt auch die beiden Hebelstücke rechts vom Drehpunkt D verschmelzen, ohne daß etwas in Bewegung gerät. Wiederum eine Anwendung des Satzes vom zureichenden Grund. Nun hängt aber das linke halbe Gewicht 1 genau unter den Drehpunkt und es gibt keinen Grund warum etwas in Bewegung geraten sollte, wenn wir dieses Gewicht entfernen. Somit sind wir zur Situation d) gekommen. Mit anderen Worten haben wir gezeigt, daß bei doppeltem Kraftarm das halbe Gewicht ausreicht, um das Gleichgewicht zu halten. Man kann nun den Prozeß ständig so ähnlich fortsetzen und bringt so nicht nur die Zahlen $1/2$ und 2 ins Spiel, sondern schrittweise alle rationalen Zahlern n/m. Damit gilt also das Gesetz „Kraft × Kraftarm = Last × Lastarm" mindestens für alle rationalen Zahlen. Der Übergang zu allen Zahlen fordert dann noch eine Stetigkeitsüberlegung, durchaus wiederum eine Anwendung des Satzes vom zureichenden Grund: Wenn das Hebelgesetz für alle Hebelarmlängen rationaler Größen, die z. B. beliebig nahe an $\pi$ liegen gilt (bei jeweils entsprechenden Gewichten), warum sollte es dann für einen Hebelarm der Länge $\pi$ (der Länge des Halbkreises) nicht mehr gelten?

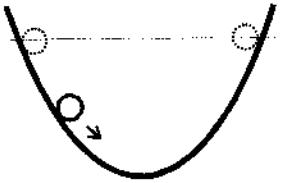
An dieser Stelle sollte niemand denken, daß dieser Beweis des Hebelgesetzes durch die Newtonsche Mechanik etwa „erledigt wäre". Natürlich kann man innerhalb der Newtonschen Mechanik das Hebelgesetz viel „wissenschaftlicher" ableiten. Aber dann hat man ja die Newtonschen Axiome vorausgesetzt, deren Hinterfragung schon durch Leibniz klar gefordert wurde, eine philosophische Aufgabe, die „nach Einstein" noch aktueller geworden ist.

Schauen wir uns jetzt an wie Leibniz beweist, daß die mechanische Energie proportional zu $m\,v^2$ ist. Die Argumentation ist nicht nur ein weiteres Beispiel für die Anwendung des Satzes vom zureichenden Grund, sondern sie ist noch wegen der Tatsache interessant, daß Leibniz hier Argumentationen benutzt, die später im sogenannten d'Alembertschen Prinzip ihre schärfere Formulierung gefunden haben, ein Prinzip, das sich

nicht aus den „Newtonschen Axiomen“ ableiten läßt. Zuerst formuliert er folgendes:

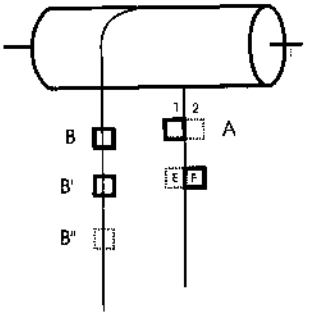
„Korollar. Es erlangt daher ein Körper von einem Pfund, der aus der Höhe von einem Fuß fällt, genau die Kraft, einen gleichgroßen Körper zur selben Höhe von einem Fuß zu heben.“

(4.2)



Das ist bereits eine Folgerung aus dem allgemeinen Energieerhaltungssatz, ohne daß eine Formel für die Größe der Energie nötig ist. Leibniz schreibt dann [LEIB66, I, S. 253]: „Außerdem postuliere ich, daß es gestattet ist, verschiedenartige Verbindungen der schweren Massen unter sich und wiederum Lösungen dieser Verbindungen anzunehmen, ferner auch andere Veränderungen hypothetisch einzuführen, vorausgesetzt, daß sie keine Änderung der Größe der Kraft bedingen, indem man sich Fäden, Wellen, Hebel und anderer Maschinen, ohne Schwere und Widerstand, angebracht denkt.“ Man werfe nochmals einen Blick auf obige Ableitung des Hebelgesetzes, wie dort Massen an und abgehängt wurden. Das Hebelgesetz ist ein rein statisches Gesetz. Jetzt kommt die Geschwindigkeit ins Spiel, deshalb treten Rollen auf. Leibniz diskutiert alles im wesentlichen an der folgenden Skizze:

(4.3)

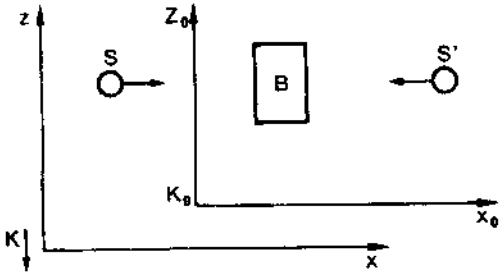


Er schreibt dann weiter:
„Theorem: Unter diesen Voraussetzungen behaupte ich, daß beim Fall des Körpers B von einem Pfund aus der Höhe BB" von zwei Fuß genau so viel Kraft erzeugt wird, als erforderlich ist, um den Körper A von zwei Pfund zur Höhe AA' von einem Fuß zu heben.

Beweis: Ich nehme an, der Körper A setze sich aus zwei Stücken E und F zusammen, von denen jedes ein Pfund schwer ist...". Formulieren wir es jetzt etwas knapper: Zuerst fällt B bis zu B' und zieht dabei die linke Hälfte E von A hoch. Dann wird diese vom Faden gelöst, rechts unten die rechte Hälfte F von A an den Faden befestigt und ebenfalls um ein Fuß hochgezogen, wobei B seinen Endpunkt in B" erreicht. Zusammengefaßt haben wir also erhalten: Wenn eine Masse $m_1$ beim Fallen um die Länge $s_1$ eine andere Masse $m_2$ unter Energieerhaltung um die Fallhöhe $s_2$ bewegt, so gilt $m_1 s_1 = m_2 s_2$. Leibniz argumentiert dann weiter: Galilei hat schon gezeigt, daß die Fallhöhe s zum Quadrat $v^2$ der erreichten Geschwindigkeit proportional ist. Er hat somit an der Fallbewegung gezeigt, daß die Energie proportional zu $m v^2$ ist. Wieder auf Grund des allgemeinen Energieerhaltungssatzes, in Kombination mit dem Satz vom zureichenden Grund, ist es dann eine Konsequenz, daß bei jeder Form der Bewegung einer Masse die Energie proportional zu $m v^2$ ist. Man kann dazu die verschiedensten Gedankenexperimente anstellen.

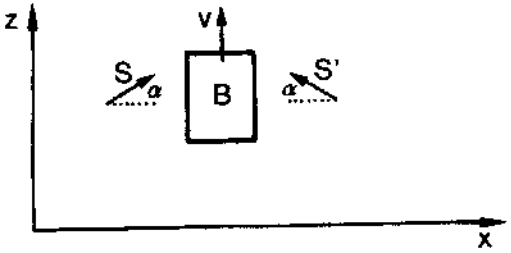
Es versteht sich, daß man immer die entsprechenden Prozesse betrachten muß, um die Größe der jeweiligen Energie aus den allgemeinen Erhaltungssätzen abzuleiten. In diesem Fall mußte Leibniz also Rollen und Fäden hinzuziehen, mit diesen praktisch umgehen. Es ist in diesem Zusammenhang äußerst bemerkenswert, daß es Einstein für richtig hielt, seine berühmte Formel $E = m c^2$, die mit äußerster Konsequenz aus dem Ansatz der Relativitätstheorie folgt, mit einer solch einfachen Überlegung wie der obigen abzuleiten. Dazu reichten Rollen und Fäden aber nicht mehr aus, sondern es mußte die elektromagnetische Strahlung hinzugezogen werden. Einstein ging folgendermaßen vor [EINS84, S. 122]: „Wir fassen nun folgendes System ins Auge. Bezüglich eines Koordinatensystems $K_0$

(4.4)




schwebe der Körper B frei im Raum. Zwei Strahlungskomplexe S, S', je von der Energie E/2 breiten sich längs der positiven beziehungsweise negativen $X_0$-Achse aus und werden von B absorbiert. Bei der Absorption wächst die Energie von B um E . Der Körper bleibt bei diesem Prozeß aus Symmetriegründen in Ruhe. Nun betrachten wir denselben Prozeß von einem System K aus, welches sich gegenüber $K_0$ mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt. In bezug auf K ist dann die Beschreibung des Vorganges
folgender:

(4.5)




Der Körper B bewegt sich in positiver z-Richtung mit der Geschwindigkeit v. Die beiden Lichtkomplexe haben in bezug auf K eine Fortpflanzungsrichtung, welche einen Winkel $\alpha$ mit der x-Achse bildet. Das Aberrationsgesetz besagt, daß in erster Näherung $\alpha = v/c$ ist, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. ..."

Wir brechen die Erörterung jetzt ab, weil die wesentlichen philosophischen Gesichtspunkte dieser Einsteinschen Argumentation schon sichtbar

sind. Er kommt jedenfalls am Ende zur einer Formel $M' - M = E/c^2$. Massendifferenz ist also Energie dividiert durch $c^2$. Einstein hebt die Bedeutung dieses Beweises seiner berühmten Formel mit folgenden Worten hervor: „Die vorstehende Ableitung des Äquivalenzgesetzes, die bisher nicht publiziert ist, hat zwei Vorteile. Sie bedient sich zwar des speziellen Relativitätsprinzips, setzt aber die technisch-formalen Hilfsmittel der Theorie nicht voraus, ...".

Man achte auf das Wesen dieser Ableitung. Die Formulierung, „... aus Symmetriegründen bleibt der Körper in Ruhe" ist nichts anderes als eine Variante des Satzes vom zureichenden Grund. Weiterhin würde ein „gescheiter Physikstudent" sicher kritisch bemerken wollen, daß er viel exaktere Ableitungen der Einsteinschen Formel kennt. Beunruhigen würde ihn vor allem der Teil der Einsteinschen Argumentation, wo mit $\alpha = v/c$ eine Näherung zur Ableitung einer solch „exakten" Formel wie $E = m c^2$ herangezogen wird. In Wirklichkeit liegt darin aber gerade die philosophische Bedeutung dieser Ableitung, besonders in Hinblick auf das Verständnis der Leibnizschen Philosophie. Man kann ruhig etwas „grob" vorgehen. Entweder man bekommt gar nichts heraus, oder man kommt zwangsläufig auf das richtige Naturgesetz. Dieser Aspekt war auch in obiger Leibnizscher Ableitung enthalten, die keinesfalls „mittelalterlich" ist. Leibniz kannte natürlich das Newtonsche Gravitationsgesetz mit der Abhängigkeit der Kraft vom Quadrat der Entfernung. Die Kräfte auf die Körper sind deshalb in den verschiedenen Höhen nur näherungsweise gleich. Trotzdem führt die Ableitung auf die einzig richtige Formel für die mechanische Energie.

Die Einsteinsche Ableitung weist nochmals auf den Punkt hin, in dem er sich bis zum Ende seines Leben immer mißverstanden fühlte. Wir hatten schon hervorgehoben, daß er das Relativitätsprinzip für das Entscheidende hielt, die Unabhängigkeit vom Koordinatensystem, nicht so sehr irgendwelche Eigenschaften des Raumes, gekrümmt oder nicht. 1955 beging unsere Akademie den 50. Jahrestag der Begründung der Relativitätstheorie. Einsteins enger Kollege und Freund, Leopold Infeld, hatte es übernommen, Einstein zu einer Teilnahme an diese Veranstaltung zu bewegen. Einstein lehnte mit Hinweis auf seine Gesundheit ab, er starb wenige Monate später. Er schrieb (17. Januar 1955) [BORN69, S. 64]: „Ich bin leider (oder soll ich sagen gottlob) nicht mehr gesund genug, um

bei solch offiziellen Anlässen zu erscheinen. Ich denke es wäre hübsch, wenn Sie in Ihrer Predigt klarmachten, daß der Schwerpunkt der Theorie in dem allgemeinen Relativitätsprinzip liegt. Denn die meisten gegenwärtigen Physiker haben dies noch nicht erfaßt."

## 5. Wahrheit und Existenz

Obwohl das Gottesproblem nicht zum Gegenstand dieses Vortrags gehört, ist es unmöglich, die Leibnizsche Monadologie als ein „wissenschaftliches Axiomensystem" ernst zu nehmen und gleichzeitig etwa die Gott betreffenden Punkte der Monadologie zu streichen. Leibniz war ein tief religiöser Mensch, und an der Existenz Gottes gab es für ihn keinen Zweifel. Das mindert aber in keiner Weise den wissenschaftlichen Wert seiner „Monadologie", ganz im Gegensatz zu der sehr verbreiteten Auffassung unter atheistischen Naturwissenschaftlern oder auch unter religiösen, die allerdings Gott aus der naturwissenschaftlichen Forschung heraus halten möchten. Das ist nicht nur nicht möglich, sondern es ist genau das Gegenteil angezeigt. Leibniz verwendet nämlich in der Wissenschaft den Gottesbegriff so, wie später Einstein, „...Gott würfelt nicht", mit allen sich daraus ergebenden Konsequenzen.

Man kann also keineswegs auf den Teil der Monadologie verzichten, in dem der Gottesbegriff einen zentralen Platz hat, etwa so, wie man eine nichteuklidische Geometrie aufbauen kann, indem man aus den euklidischen Axiomensystem alles wegläßt, was mit dem Parallelenaxiom zu tun hat. Im Gegenteil, Gott spielt für das Leibnizsche philosophische System eine entscheidende Rolle. Den springenden Punkt kann man von folgender Seite her erfassen: Entgegen einer formalistischen Auffassung eines Axiomensystems, bei der man das Problem der Wahrheit ganz außerhalb läßt, ist der Begriff der Wahrheit Bestandteil der Leibnizschen Monadologie. Hieraus ergibt sich zwingend, daß Leibniz das Wesen der Wahrheit im Kontext aller anderen Begriffe seiner Monadologie bestimmt. Ein ganz wesentlicher Zusammenhang besteht zwischen dem Gottesbegriff und dem der Wahrheit. Aber ganz im Gegensatz zu Descartes, bei dem der Gottesbegriff dem Wahrheitsbegriff voran geht, wie überhaupt dem gesamten philosophischen System, hat Leibniz die Begriffe in die Mitte sei-

ner Monadologie gelegt und noch dazu den Gottesbegriff hinter den Wahrheitsbegriff, der im Pkt. 31 (s. vorangehendes Kapitel) eingeführt wird. Der Begriff Gott folgt dann erst im Pkt. 38 und zwar in der Kette folgender „Axiome", die wir verkürzt zitieren:

„36. Der zureichende Grund muß sich aber auch bei den zufälligen oder Tatsachenwahrheiten finden lassen, d. h. in der Folge und im Zusammenhang aller erschaffenen Dinge. Hier könnte die Auflösung in einzelne Gründe schrankenlos weitergehen, wegen der ungeheuren Mannigfaltigkeit der Naturdinge ... ."

„37. Da nun alle Einzelheiten ihrerseits immer nur andere vorhergehende und noch speziellere Zufälligkeiten enthalten, deren jede zu ihrer Begründung wieder eine ähnliche Analyse erfordert, kommt man dadurch nicht weiter. Daher muß der zureichende oder letzte Grund außerhalb der Folge oder der Folgen-Reihe der einzelnen zufälligen Dinge liegen, so unbegrenzt diese Folge auch sein mag."

„38. So muß der letzte Grund der Dinge in einer notwendigen Substanz liegen, in der das Besondere der Veränderungen nur in eminenter Weise, wie in ihrer Quelle, enthalten ist: und diese Substanz nennen wir Gott."

Bis hierher könnte man in der Tat denken, daß sich die Axiome zu Gott einfach aus der Monadologie streichen ließen. Die Folgen-Reihen der zufälligen Dinge und damit auch der Beweisketten kann man für sich bestehen lassen, ohne Gott hinzuzunehmen, wie es in verschiedenen erkenntnistheoretischen Systemen auch geschieht. Am Rande sei bemerkt, daß man den Bezug auf eine Quelle als Anstoß für die „gehässige" Bemerkung Hegels verstehen kann, „bei Leibniz ist Gott die Gosse, in die alles fließt". Aus der Sicht des Hegelschen Systems erscheint der Leibnizsche Gott tatsächlich überflüssig, ist doch alles dialektische Selbstentfaltung des Geistes. Ganz anders liegen die Dinge in der Leibnizschen Monadologie, in der es die unendliche Mannigfaltigkeit der Monaden wirklich gibt, die aber in einem gegenseitig bedingten Beziehungsgefüge stecken, in dem kein Platz für weitere Eingriffe ist, nicht einmal für Gott. Leibniz versteht nämlich die Vollkommenheit Gottes so konsequent, daß die geschaffene Welt für immer „perfekt funktioniert" und keine Möglichkeit für Eingriffe offen läßt. Seine vielfältigen Äußerungen dazu sind ganz unzweideutig. So schreibt er z. B. in den Specimen Dynamicum, den „Leibnizschen Prinzipien der Dynamik": „...so ist doch, wie ich glaube, der Grund für irgend

eine Wahrheit der Natur niemals unmittelbar in der Wirksamkeit Gottes zu suchen. Vielmehr hat Gott stets den Dingen selbst Eigenschaften und Bestimmungen beigelegt, aus denen sich alle ihre Prädikate erklären lassen." [LEIB66, I, S. 270].

Es ist hier kein Raum die Stellung Gottes im Leibnizschen System detaillierter zu analysieren. Das letzte Zitat allein macht aber verständlich, warum kein geringerer als MARX die Leibnizsche Position gegen die berühmte Kritik KANTS an den ontologischen Gottesbeweis verteidigt, in der Kant eindrucksvoll den Vergleich von hundert gedachten Talern zu hundert wirklichen Talern heranzieht. Diese Zerlegung des Leibnizschen ontologischen Gottesbeweises durch Kant hatte großen Eindruck gemacht. Marx dagegen schreibt: „Die Beweise für das Dasein Gottes sind entweder nichts als hohle Tautologien – z. B. der ontologische Beweis hieße nichts als: „was ich mir wirklich (realiter) vorstelle, ist eine wirkliche Vorstellung für mich", das wirkt auf mich, und in diesem Sinne haben alle Götter, sowohl die heidnischen als christlichen eine reale Existenz besessen. Hat nicht der alte Moloch geherrscht? War nicht der delphische Apollo eine wirkliche Macht im Leben der Griechen? Hier heißt auch Kants Kritik nichts. Wenn jemand sich vorstellt, hundert Taler zu besitzen, wenn diese Vorstellung ihm keine beliebige, subjektive ist, wenn er an sie glaubt, so haben ihm die hundert eingebildeten Taler denselben Wert wie hundert wirkliche. Er wird z. B. Schulden auf seine Einbildung machen, sie wird wirken, wie die ganze Menschheit Schulden auf ihre Götter gemacht hat. Kants Beispiel hätte den ontologischen Beweis bekräftigen können. Wirkliche Taler haben dieselbe Existenz, die eingebildete Götter haben. Hat ein wirklicher Taler anderswo Existenz als in der Vorstellung, wenn auch in einer allgemeinen oder vielmehr in einer gemeinschaftlichen Vorstellung der Menschen? Bringe Papiergeld in ein Land, wo man diesen Gebrauch des Papiers nicht kennt, und jeder wird lachen über deine subjektive Vorstellung. ...

Oder die Beweise für das Dasein Gottes sind nichts als Beweise für das Dasein des wesentlichen menschlichen Selbstbewußtseins, logische Explikationen desselben. Z. B. der ontologische Beweis. Welches Sein ist unmittelbar, indem es gedacht wird? Das Selbstbewußtsein." [MARX87, S. 43].

Schon Feuerbach hat diese Rolle Gottes bei Leibniz klar herausgestrichen. „... nämlich, daß es sich hier im letzten Grunde nicht um die Realität eines vom Denken, vom Verstande unterschiedenen Wesens, sondern nur um die Realität und Gottheit des Verstandes oder Geistes handelt."[FEUE84, S. 257)]. Feuerbachs „Leibniz-Buch" war das bedeutendste philosophiehistorische Werk des Junghegelianismus und die erste große Leibniz-Darstellung des 19. Jahrhunderts. „Er ist der Kopernikus der neuen Philosophie" schreibt Feuerbach (S. 39), ein Seitenhieb auf Kant. Wie auch immer, jedenfalls ist es keine Zufälligkeit, daß Marx in dieser Form Leibniz gegen Kant in Schutz nimmt, sondern er war wohl der erste, der nach der Periode der „klassischen deutschen Philosophie" genau wieder jenen wesentlichen Aspekt der Leibnizschen Philosophie aufnahm, der in den philosophischen Systemen von Kant bis Hegel unberücksichtigt geblieben ist, und der in der Naturwissenschaft der damaligen Zeit fast noch gar keine Rolle spielte. Es ist das reale (und nicht nur gedachte) dialektische Verhältnis von Stoff und Form, oder, um einen heute aktuellen Begriff zu gebrauchen, von Stoff und Struktur, der das Wesen der Monade bestimmt. Marx hatte z. B. mit „Wert der Ware", mit dem „Wert der Ware Arbeitskraft", ja mit dem Warenbegriff selbst Dinge als real existent benannt, die „nur" im Verhältnis der Menschen im Arbeitsprozeß begründet sind. Nicht zufällig nimmt Marx zur Beschreibung dieser „Realitäten" Bezug auf den Substanzbegriff. Hören wir ihn selbst, wie blumig er diese Realitäten beschreibt, die in der damaligen Physik nichts Ähnliches hatten: „Betrachten wir nun das Residuum [den Rest] der Arbeitsprodukte. Es ist nichts von ihnen übriggeblieben als dieselbe **gespenstische Gegenständlichkeit**, eine **bloße Gallerte** unterschiedsloser menschlicher Arbeit, d. h. der Verausgabung menschlicher Arbeitskraft ohne Rücksicht auf die Form ihrer Verausgabung. Diese Dinge stellen nur noch dar, daß in ihrer Produktion menschliche Arbeitskraft verausgabt, menschliche Arbeit aufgehäuft ist. Als Kristalle dieser ihnen gemeinschaftlichen gesellschaftlichen Substanz sind sie Werte – Warenwerte. ...

Ein Gebrauchswert oder Gut hat also nur einen *Wert*, weil abstrakt menschliche *Arbeit* in ihm *vergegenständlicht* oder ***materialisiert*** ist. Wie nun die *Größe* seines Werts messen? Durch das *Quantum* der in ihm enthaltenen **„wertbildenden Substanz"**, der Arbeit. ...

Die Arbeit jedoch, welche die **Substanz der Werte** bildet, ist gleiche

menschliche Arbeit, Verausgabung derselben menschlichen Arbeitskraft der Gesellschaft." [Kapital, S. 42ff.]

Über den merkwürdigen Substanzcharakter der Ware schreibt er dann weiter: „Die Ware scheint auf den ersten Blick ein selbstverständliches, triviales Ding. Ihre Analyse ergibt, daß sie ein sehr vertracktes Ding ist, voll metaphysischer Spitzfindigkeiten und theologischer Mucken. Soweit sie Gebrauchswert ist, ist nichts Mysteriöses an ihr,.... Die Form des Holzes z. B. wird verändert, wenn man aus ihm einen Tisch macht. Nichtsdestoweniger bleibt der Tisch Holz, ein ordinäres sinnliches Ding. Aber sobald er als Ware auftritt, verwandelt er sich in ein ***sinnlich übersinnliches*** Ding. Er steht nicht nur mit seinen Füßen auf dem Boden, sondern er stellt sich allen anderen Waren gegenüber auf den Kopf, und entwickelt aus seinem Holzkopf Grillen, viel wunderlicher, als wenn er zu tanzen begänne. (Man erinnert sich, daß China und die Tische zu tanzen anfingen, als alle übrige Welt still zu stehen schien...). ...

Das Geheimnisvolle der Warenform besteht also einfach darin, daß sie den Menschen die gesellschaftlichen Charaktere ihrer eigenen Arbeit als gegenständliche Charaktere der Arbeitsprodukte selbst, als gesellschaftliche Natureigenschaften dieser Dinge zurückspiegelt, ...

Könnten die Waren sprechen, so würden sie sagen, unser Gebrauchswert mag den Menschen interessieren. Er kommt uns aber nicht als Dingen zu. Was uns aber ***dinglich*** zukommt, ist unser Wert. Unser eigener Verkehr als Warendinge beweist das."

Wie gesagt, spielten solch „sinnlich-übersinnlichen" **Dinge** in der Physik der damaligen Zeit keine Rolle, sie waren alle aus der „exakten Naturwissenschaft" verbannt. Erst die Quantenobjekte des 20. Jahrhunderts tragen wieder diesen Charakter. Besonders augenfällig ist das bei den sogenannten Quasiteilchen. Wir verweisen dazu auf den Vortrag zum Leibniz-Tag 1996 [LASS96]. Wenn man eine gewisse stoffliche Qualität ins Auge faßt, z. B. einen Kristall, und „auf diesem stofflichen Hintergrund" bilden sich Formen oder Strukturen aus, z. B. Schwingungszustände, dann sind die Elemente oder Quanten dieser neuen Struktur, in unserem Beispiel die Phononen als Quanten der Schwingungszustände, ebenso real und ebenso fundamental, wie die anderen Bausteine, die den stofflichen Hintergrund formieren, auch wenn sie „gespenstische Gegenständlichkeit von gallertartigem Charakter" besitzen, ohne „Rücksicht auf die Form ihrer Ent-

stehung", um voll in der Marxschen Sprechweise zu bleiben. Phononen sind eben Phononen, egal ob im Diamant als Schwingungen der Kohlenstoffatome oder im Quarz als Schwingungen der Moleküle des Siliziumoxydes. Die Phononen, diese sinnlich-übersinnlichen Dinge, können dann gemeinsam mit den handfesten Elektronen wieder neue Verbindungen eingehen, und es entstehen z. B. die Cooper-Paare, die Akteure der Supraleitung sind. In dem Vortrag waren wir noch genauer auf die Solitonen eingegangen, die Quanten nichtlinearer Strömungsvorgänge. Ich greife dieses Beispiel nochmals auf, um zu verdeutlichen, daß es natürlich kein allgemeines Schema gibt, die neuen Strukturfelder, die „neuen Monaden", zu bestimmen. Beispielsweise könnte man geneigt sein, einen solchen nichtlinearen Strömungsvorgang als eine komplizierte Schwingung zu betrachten und ihn einfach in die Fourierkomponenten zerlegen, in der Annahme, seine Phononenstruktur zu bestimmen. Dann zielt man aber an den Solitonen vorbei und hat die wesentlichen Strukturelemente verfehlt. Es ist also erst ein durch nichts abzukürzender und mit allen Zufällen behafteter Erkenntnisprozeß, der uns die Strukturelemente als reale sinnlich-übersinnlichen Dinge aufdeckt. Er ist in der Physik nicht einfacher als in der Ökonomie oder umgekehrt.

Marx zielt mit dem Begriff sinnlich-übersinnliches Dings genau auf das richtige Verständnis des Verhältnisses von Wahrheit und Existenz, wie es auch und besonders in der Leibnizschen Monadologie angelegt ist. Der Mensch mit seiner Seele, d. h. Monade, seinem Verstand, seinem Denken ist ebenso Teil wie auch Akteur des „harmonischen monadologischen" Beziehungsgefüges, das die Welt ausmacht. Alles was existiert, existiert in diesem Beziehungsgefüge als dialektische Einheit von Stoff und Form. Und weil der Mensch mit seinem Verstand untrennbarer Bestandteil dieses Beziehungsgefüges ist, kann das Sinnliche nicht vom Übersinnlichen getrennt werden. Der gerade von den Naturwissenschaftlern oft verspottete Hegelsche Satz „Alles, was vernünftig ist, ist wirklich" ist im vollen Umfang in der Leibnizschen Monadologie angelegt. Wer noch nie oder lange nicht mehr einen Blick auf die Leibnizsche Monadologie geworfen hat, besonders auch aus dem Kreis der Mathematiker und besonders dann, wenn er kein „Hegelianer" ist, stutzt unweigerlich, wenn er liest, wie umgekehrt im „Axiom 31" (s. vorangehendes Kapitel) Leibniz den Begriff der Wahrheit faßt. Wenn es nicht „unvernünftig" ist, ist es wahr und folg-

lich existent, in den Möglichkeiten und dem Streben der Monaden angelegt. Treffend pointiert es Bloch bei seinen Interpretationen der Marxschen Feuerbachthesen: „Der Pragmatismus sagt, daß etwas wahr ist, wenn es nützlich ist. Das ist nicht der Sinn der elften These. Sondern der Sinn ist: Nur deshalb ist etwas nützlich, weil es wahr ist. Das Nützliche ist auf das Wahre bezogen, zur Erweiterung des Nützlichen." [BLOC85, Bd.4, S. 433].

Die Marxsche Bewunderung für Leibniz war uneingeschränkt und zweifellos würde eine detaillierte Untersuchung solcher inhaltlichen Zusammenhänge, wie sie hier angedeutet wurden, viele Wege ebenen, entweder von Leibniz zu Marx oder von Marx zu Leibniz, ganz wie man will. Jedenfalls war Marx wohl der einzige Wissenschaftler, der anderthalb Jahrhundert nach Leibniz Tapete aus dessen Arbeitszimmer an seiner Wand hatte. Hören wir wie er selbst das beschreibt, und wie der Ökonom nicht zu verleugnen ist [MARX50, Brief an Engels vom 10. Mai 1870., S. 387]: „Kugelmann hat mir zu meinem Geburtstag zwei Stück Tapete aus dem Arbeitszimmer von Leibniz geschickt, was mich sehr amüsiert hat. Nämlich Leibniz' Haus ist niedergerissen worden letzten Winter, und die dummen Hannoveraner – die in London ein Geschäft mit den Reliquien hätten machen können – haben alles weggeschmissen. Diese zwei Stück stellen jedes etwas Mythologisches dar, das eine Neptun in seinen Wogen etc. und das andere Venus, Amor etc., ganz im schlechten Louis XIV-Geschmack. Dagegen bewährt sich die Güte (Solidität) der damaligen Manufakturarbeit, verglichen mit der jetzigen. Ich habe beide Sachen in meinem Arbeitszimmer aufgehangen. Du kennst meine Bewunderung für Leibniz".

Aber zurück zu den Axiomen der Monadologie und dem Leibnizschen Gottesbegriff. Wer damit nicht zurecht kommt, kann gut und gern Marx einmal wörtlich nehmen, und den Begriff Gott durch Selbstbewußtsein ersetzten, wobei der ganze philosophische Reichtum dieses Begriffes beleuchtet werden muß, der sich durch seine Geschichte zieht, angefangen von Aristoteles, wo er so etwas wie Gottheit bedeutete bis hin zu Fichte, Hegel und Feuerbach. Ja, für diesen „Gottesersatz" kann man selbst das Stichwort bei Leibniz finden. Die eine Seite der Medaille hatten wir bereits angesprochen. Gott hat in der von ihm geschaffenen perfekten Welt keine Notwendigkeit für weitere Eingriffe offengelassen. Wir erfassen also

seine Weisheit, wenn wir uns mit der unendlichen Vielfalt der Welt befassen. Die andere Seite der Medaille kommt im folgenden Leibnizzitat zum Ausdruck [LEIB71, S. 26]: „...daß endlich die Begriffe der Geschöpfe zwar nicht das Maß für die Macht Gottes sind, daß aber ihr Begriffsvermögen und ihre Fassungskraft nichtsdestoweniger das Maß dafür bilden, was die Natur vermag., indem alles, was der Naturordnung gemäß ist, durch irgendein Geschöpf begriffen und verstanden werden kann." Die Seele spiegelt also das gesamte Universum wider, wie im Pkt. 63 der Monadologie formuliert. Der Verstand hat die Kraft hinter alle Geheimnisse zu steigen, den zureichenden Grund für alles aufzuklären.

Der Leibnizsche Standpunkt führt immer wieder auf folgende Schlußweise, die man ohne „Gott" lesen kann: Wenn der Mensch mit seinem Bewußtsein eine Wahrheit erfaßt, so ist es eine wirkliche Wahrheit, (die er erfassen kann, weil Gott ihn so geschaffen hat,) andererseits ist diese Wahrheit aber auch (Gott) immer gegenwärtig und sie ist an keiner Stelle der Welt verletzt, denn das würde der Vollkommenheit (der göttlichen Schöpfung) widersprechen. Keineswegs zieht sich Leibniz hier etwa ins Nebulöse einer undefinierbaren Vollkommenheit oder Harmonie zurück. Wie es sich für ein Axiomensystem gehört, ist der Begriff der Vollkommenheit selbst Bestandteil der Monadologie (Pkt. 50). Ein Ding ist vollkommener als ein anderes (bezüglich eines bestimmten Sachverhaltes), wenn ich in ihm den Grund für einen Sachverhalt im anderen finden kann. Auf die ganze Welt bezogen kann man es auch so formulieren: Wenn der Verstand etwas Wirkliches feststellt, so findet er dafür auch den Grund. Einstein formulierte diese Credo unmißverständlich: „Wir wollen nicht nur wissen wie die Natur ist und wie ihre Vorgänge ablaufen, sondern wir wollen auch nach Möglichkeit das vielleicht utopisch und anmaßend erscheinende Ziel erreichen, zu wissen, warum die Natur so und nicht anders ist. .... So erlebt man gewissermaßen, daß selbst Gott jene Zusammenhänge nicht anders hätte festlegen können, als sie tatsächlich sind. ... Dies ist das prometheische Element des wissenschaftlichen Erlebens. ... Hier hat für mich stets der eigentliche Zauber wissenschaftlichen Nachdenkens gelegen." [EINS29]. Knapper und prägnanter kann man nicht ausdrücken, wie die naturwissenschaftliche Seite des Leibnizschen Begriffs von „der besten aller Welten" zu verstehen ist.

Ein Beispiel: Man kann sich klar machen, daß es unendlich viele Prim-

zahlen gibt, wie schon von Euklid bewiesen wurde. Weil das durch den Verstand überzeugend bewiesen werden kann, ist es eine notwendige, eine ewige Wahrheit und es ist deshalb auch wirklich so in der Realität, d. h. welche Zahl ich auch ins Auge fasse, es gibt immer eine größere Gesamtheit von Dingen, die ich nicht in gleiche Teile teilen kann. Nun könnte man geneigt sein, diese Denkweise nur auf „so einfache mathematische Gesetzmäßigkeiten" wie die der Teilbarkeit zu beziehen. Leibniz ist aber bei der Anwendung dieses Grundsatzes uneingeschränkt konsequent. Lassen wir ihn selbst sprechen und hören wir nochmals, wie er die umfassende Gültigkeit des Energieerhaltungssatzes begründet [LEIB66, II, Brief an Arnaud, S. 220]: „Es ist also unendlich viel vernunftgemäßer und Gottes würdiger, anzunehmen, daß er von Anfang an die Maschine der Welt so geschaffen hat, daß es sich, ...jederzeit ohne Verletzung der beiden großen Naturgesetze der Erhaltung der Kraft und der Richtung – vielmehr mit deren genauer Befolgung – so trifft, daß die Spannkräfte der Körper bereit sind, von selbst in der richtigen Weise zu spielen, ...".

Was die „Spannkräfte" des Körpers sind, bleibt hier offen. Aber eine Untersuchungsrichtung zum Wesen der Spannkräfte unter Beachtung des Energieerhaltungssatzes wird hier nicht nur angeregt, sondern sie ist selbst angelegt in der Fragestellung. Leibniz geht aber in seiner Konsequenz noch einen ganzen Schritt weiter, und kommt damit z. B. auch zu Einsichten über Raum und Zeit, die erst seit Einstein in der Naturwissenschaft akzeptiert werden. Die Leibnizsche Konsequenz besteht in folgender Schlußweise: Einmal angenommen, es hätte für Gott zwei gleichwertige Möglichkeiten gegeben, etwas zu schaffen, wobei keine der beiden Möglichkeiten vor der anderen ausgezeichnet wäre. Dann hat es Gott nicht geschaffen. Gott hat sich also nicht selbst in die Lage gebracht, in einer unbestimmten Situation ohne Grund eine von zwei gleich möglichen Situationen auszuwählen. Bei Vermeidung des Gottesbegriffs heißt das: Wenn wir einer Fragestellung den zureichenden Grund nicht finden können, dann berührt die Frage etwas, was es gar nicht gibt, dann ist es eine nur gedachte Frage, keine wirklich wissenschaftliche Frage. Leibniz ist mit dieser Konsequenz an das Problem der Existenz des leeren Raumes herangegangen, das wir nun behandeln wollen.

Heute ist es bereits eine Modeerscheinung geworden, von der Überwindung der „Newtonschen Wissenschaft" zu sprechen. Deshalb soll noch-

mals darauf hingewiesen werden, daß damit eine Wissenschaftsauffassung, Wissenschaftsmethode und ein wissenschaftliches Weltbild gemeint ist, wie es sich in der Wissenschaftsentwicklung der letzten zweihundert Jahre herausgebildet hat, infolge der Newtonschen Entdeckungen, die aber nicht mit den weit darüber hinausgehenden philosophischen Einsichten Newtons verwechselt werden dürfen. Tatsächlich erklärt Newton in seinen Mathematischen Prinzipien der Naturlehre: „Der absolute Raum bleibt vermöge seiner Natur und ohne Beziehung auf einen äußeren Gegenstand stets gleich und unbeweglich." Analog lehrt er über die Zeit: „Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand."

Keine Streitfrage zwischen der Newtonschen und der Leibnizschen Philosophie ist so ernsthaft diskutiert und auch so breit bekannt geworden, wie die über Raum und Zeit. Sie war Gegenstand des Briefwechsels zwischen Leibniz und Clarke, den man aber auch als einen Briefwechsel zwischen Leibniz und Newton betrachten kann, denn dieser hat selbst mit Hand angelegt und auch der Publikation die endgültige Form gegeben. Der Briefwechsel wurde in den Jahren 1715 bis 1716 geführt und endete mit dem Tod Leibniz'. Schon wenige Monate später wurde der Briefwechsel von Clarke herausgegeben. Allein daraus wird ersichtlich, welch große Bedeutung dieses Problem in der damaligen geistigen Auseinandersetzung hatte. Es ging keineswegs nur um eine physikalisch-mathematische Frage, sondern um eine Kernfrage der Religion und die Leibnizschen Positionen gegen Newton waren für diesen nicht ganz „ungefährlich". Gleich der erste Brief von Leibniz vom November 1715 enthält folgende Passagen: „1. Es scheint, daß die natürliche Religion (in England) in einen ganz außerordentlichen Verfall geraten ist. ... 3. Monsieur Newton sagt, der Raum sei das Organ, das Gott benutzt, um die Dinge wahrzunehmen. Wenn Gott aber zur Wahrnehmung der Dinge ein Hilfsmittel benötigt, dann sind die Dinge von ihm nicht vollkommen abhängig und auch nicht sein Erzeugnis. 4. Monsieur Newton und seine Anhänger haben von Gottes Werk eine recht merkwürdige Meinung. Ihrer Meinung nach ist Gott gezwungen, seine Uhr von Zeit zu Zeit aufzuziehen, andernfalls würde sie stehenbleiben. Er besaß nicht genügend Einsicht, um ihr eine immerwährende Bewegung zu verleihen. Gottes Maschine ist ihrer Meinung nach so-

gar so unvollkommen, daß er gezwungen ist, sie von Zeit zu Zeit durch einen außergewöhnlichen Eingriff zu reinigen und sogar zu reparieren, so wie ein Uhrmacher sein Werk repariert, der ja ein um so ungeschickterer Handwerker ist, je öfter er gezwungen ist, sein Werk in Ordnung zu bringen und zu reparieren. Meiner Meinung nach ist immer die gleiche Kraft und Wirksamkeit vorhanden, nur daß sie gemäß den Naturgesetzen und der herrlichen prästabilierten Ordnung von Materie auf Materie überwechselt."

Wir sehen hier noch einmal, welch zentrale Rolle der allgemeine Energieerhaltungssatz für Leibniz spielte, wie überhaupt der ganze Briefwechsel nochmals die fundamentalen Positionen seiner Philosophie betonte. Hier soll es uns lediglich um das Raum-Zeit-Problem gehen. Newton forderte einen absoluten Raum, Leibniz bestreitet ihn. Dabei darf man das Problem nicht simplifizieren und hierbei ist Einstein wieder unser Zeuge. Wheeler schreibt in seinem außergewöhnlichen Buch, zweifellos die beste allgemeinverständliche Darstellung der Einsteinschen Raum-Zeit-Konzeption, folgendes [WHEE91, S. 16]: „Einstein hat mir gegenüber deutlich hervorgehoben, daß sich Newton der Probleme, die mit dem Begriff des absoluten Raumes verbunden waren, durchaus bewußt gewesen ist. Diese Schwierigkeiten waren auch nicht der Aufmerksamkeit von Newtons großem Zeitgenossen Gottfried Leibniz entgangen, der erklärt hatte, daß Raum und Zeit nicht Dinge, sondern Ordnungen der Dinge sind." Man braucht diese Meinung über die Newtonsche Raumvorstellung nicht anzuzweifeln. Das Problem besteht darin, daß die „axiomatische" Newtonsche Formulierung der Mechanik ohne den absoluten Raum nicht konsistent ist. Genau dagegen zielt auch die Leibnizsche Auffassung und genau deshalb ist die Leibnizsche Gegenthese nicht nur ein Randproblem, sondern betrifft die philosophischen Grundlagen der Physik.

Einstein hat sich, bei allerhöchster Wertschätzung für Newton, immer wieder dazu geäußert, warum die richtige Leibnizsche Auffassung über Raum und Zeit so lange verdrängt, und damit auch weiterführende physikalische Überlegungen blockiert wurden. Er schreibt [EINS90, S. 6]: „Begriffe und Begriffssysteme erhalten die Berechtigung nur dadurch, daß sie zum Überschauen von Erlebniskomplexen dienen; eine andere Legitimation gibt es für sie nicht. Es ist deshalb nach meiner Überzeugung eine der verderblichsten Taten der Philosophen, daß sie gewisse begriffliche

Grundlagen der Naturwissenschaften aus der Kontrolle zugänglicher Gebiete des Empirisch-Zweckmäßigen in die unangreifbare Höhe des Denknotwendigen (Apriorischen) versetzt haben. Denn wenn es auch ausgemacht ist, daß die Begriffe nicht aus den Erlebnissen durch Logik (oder sonstwie) abgeleitet werden können, sondern in gewissem Sinne freie Schöpfungen des menschlichen Geistes sind, so sind sie doch ebensowenig unabhängig von der Art der Erlebnisse, wie etwa die Kleider von der Gestalt der menschlichen Leiber. Dies gilt im besonderen auch von unseren Begriffen über Raum und Zeit, welche die Physiker – von Tatsachen gezwungen – aus dem Olymp des Apriori herunterholen mußten, um sie reparieren und wieder in einen brauchbaren Zustand setzen zu können." An dieser Stelle sei nur am Rande vermerkt, daß Einstein die Anregungen zu den grandiosen jahrelangen Untersuchungen Piaget's über die Herausbildung der Raum-Zeit-Begriffe bei Kindern gegeben hat. Die Ergebnisse zeigen nicht nur, daß nichts von diesen Strukturen apriorisch oder angeboren ist, sondern sie weisen auch detailliert nach, auf welchem Wege sich diese Begriffe herausbilden. Bemerkenswert ist dabei, daß die scheinbar „apriorischste" und einfachste Geometrie, die euklidische Geometrie, speziell das Parallelenaxiom, erst sehr spät ins Bewußtsein rückt. Geometrische Zusammenhänge neuerer geometrischer Gebiete, speziell der Topologie, treten in der Entwicklung des Kindes viel früher auf [PIAG92], [GINS98].

Warum ist es für Leibniz ausgemachte Sache, daß es den leeren absoluten Raum nicht gibt? Wenn er existieren würde, hätte Gott bei seiner Schöpfung die Dinge (Sonnen, Planeten usw. ) auch anders in den Raum verteilen können, als sie es sind. Er hätte vor dem leeren Raum gestanden und die Dinge zufällig hineinlegen können. So handelt aber die höchste Vernunft nicht. Hören wir Leibniz selbst [LEIB91, 3. Brief an Clarke, S. 37]: „Man erkennt den wichtigen Satz an, daß nichts geschieht, ohne daß es so und nicht anders ist. Jedoch gesteht man ihn mir nur dem Worte nach zu und in Wirklichkeit bestreitet man ihn mir. Dies zeigt, daß man die gesamte Tragweite dieses Satzes nicht völlig verstanden hat. Darum benutzt man auch ein Beispiel aus einem von meinen Beweisen gegen den wirklichen absoluten Raum, der ja ein Idol für etliche englische Zeitgenossen ist." Und weiter [LEIB91, Leibniz' 4. Brief, S. 51] „1. Bei vollkommen unterschiedslosen Dingen besteht keine Möglichkeit zum Auswählen und

folglich gibt es weder eine Wahl noch einen Willen... 2. Ein bloßer Wille ohne irgendeinen Beweggrund ist nicht nur eine zur Vollkommenheit Gottes in Widerspruch stehende Fiktion, sondern auch trügerisch und widerspricht sich selbst. Er ist unvereinbar mit der Definition des Willens und in meiner Theodizee zur Genüge widerlegt worden."

Daß es keinen absoluten leeren Raum gibt, in dem Atome willkürlich verteilt sind, die auch anders verteilt sein könnten, ist für ihn keine ursächliche Annahme, sondern das Ergebnis seiner philosophisch-naturwissenschaftlichen Forschungen. Davon legen die folgenden Worte Zeugnis ab [LEIB66, S. 153]: „Wer für die Leere ist, läßt sich hierbei mehr durch die sinnliche Anschauung als durch die Vernunft leiten. In meiner Jugend verfiel ich auch auf die Ansicht vom Leeren und den Atomen; seither aber haben Vernunftgründe mich davon zurückgebracht. Es war ein verlockendes Phantasiegebilde: man beschränkt in ihm seine Nachforschungen, man nagelt gewissermaßen Untersuchungen fest, man glaubt, die ersten Elemente, ein non plus ultra, gefunden zu haben. Wir möchten der Natur Stillstand gebieten, von ihr verlangen, daß sie begrenzt sei wie unser Geist ...".

Wenn der Raum also nichts anderes als die Ordnung der Dinge ist, wenn es keinen leeren Raum gibt, wo befinden sich dann die realen Dinge? Die Antwort könnte man kurz so fassen: Es gibt, wie auch Leibniz immer wieder betont, keine Materie (Stoff) ohne Körper. Jeder Körper hat also seinen Raum. Diese Räume sind vielfältig aufeinander bezogen. In der Regel sind es „nichtkommutative Räume" (s. LASS96). Wenn es (wie bei einem Festkörper) gewöhnliche dreidimensionale Räume sind, kann man sie sich auch aneinandergefügt denken. Erst durch diesen Abstraktionsprozeß kommt man zum unendlichen Raum, den man sich nachträglich (aber nur nachträglich) wieder leer denken kann. Wesentlich und fundamental ist aber nicht dieser nachträglich abstrahierte leere Raum, sondern das kategoriale Beziehungsgeflecht der konkreten Räume. Wie wir nun im letzten Kapitel darlegen wollen, ist gerade dieses kategoriale Beziehungsgeflecht das Fundament für den revolutionär neuen Geometriebegriff der Mathematik. Er hat sich in einem langen Erkenntnisprozeß beim „Herumschlagen" mit verschieden Typen abstrakter Räume innerhalb der reinen Mathematik herausgebildet. Jetzt kehrt dieser Geometrie- und Raumbegriff in die Physik zurück, und ist eine bemerkenswerte Bestätigung und mathematische Fassung der Leibnizschen philosophischen Raumkonzeption.

## 6. Strings, Monster und Moonshine

Trotz der von Leibniz markant vertretenen anderen und wie wir heute sagen können richtigeren Auffassung dominierte die Newtonsche Raum-Zeit-Konzeption zwei Jahrhunderte. Alle, die grundsätzlich davon abwichen, wie etwa Theodor Fechner, tragen das Stigma des Sonderlings. Kaum ein Physiker hat es gewagt oder auch nur ernsthaft daran gedacht, die Newtonschen Dogmen in Frage zu stellen.

Erst Bernhard Riemann hat schon ein halbes Jahrhundert vor Einstein mit seiner neuen Theorie von Raum und Zeit klar die Newtonschen Dogmen überwunden. Aber die wissenschaftliche Öffentlichkeit hat diese neue Konzeption als mathematisches Hirngespinst abgetan. Mit der Helmholtzschen Schrift „Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen" war offensichtlich für die Physiker das Urteil gesprochen. Aus philosophischer Sicht trug zur Nichtbeachtung der weitreichenden naturphilosophischen neuen Riemannschen Konzeption zweifellos die Tatsache bei, daß Riemann ein Verehrer der Herbartschen Philosophie war und aus ihr die Anregungen nahm. In einer Zeit, in der das philosophische Weltbild der Naturwissenschaftler weitgehend durch den Neukantianismus geprägt war, wurde der Riemannsche philosophische Standpunkt, sofern er überhaupt zur Kenntnis genommen wurde, abschätzig abgetan.

Bei der Raum-Zeit-Frage schienen die Würfel eindeutig zu Gunsten Newtons gefallen zu sein. In einem solchen naturwissenschaftlichen Weltbild war kein Platz für Monaden. In unserem Jahrhundert hat zwar die Physik den bekannten Umbruch erfahren und durch die Einsteinsche Raum-Zeit-Auffassung in der Relativitätstheorie ist ein wesentlicher Aspekt der Leibnizschen Philosophie naturwissenschaftliche Realität geworden, aber für das eigentliche Problem seiner Philosophie, ein Verständnis der monadologischen Konzeption, hatte sich nicht viel geändert. Ganz im Gegenteil schien der andere große Zweig der modernen Physik unseres Jahrhunderts, die Quantentheorie, der Monadologie geradezu einen weiteren Todesstoß zu versetzen. Allgemein bekannt ist die Aussage, daß die Quantentheorie nun endgültig bewiesen hätte, daß die Natur doch Sprünge macht, im scheinbaren Gegensatz zur Leibnizschen Grundthese von der Kontinuität in der Natur. Unterdessen hat die moderne Meßtechnik, die bis in den Pikosekundenbereich reicht, nun doch gezeigt, daß die Niveau-

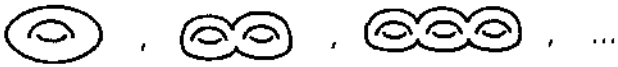
sprünge oder spontanen Phasenübergänge duraus über Zwischenzustände verlaufen. Aber die Quantensprünge sind nicht der markanteste Punkt im Verhältnis zur Monadologie. Gravierender ist die Tatsache der Ununterscheidbarkeit der Elementarteilchen gleicher Sorte. In einem Elektronengas z. B. sind die einzelnen Elektronen prinzipiell ununterscheidbar, was für die neuen Statistiken, die Quantenstatistiken, von ausschlaggebender Bedeutung ist. Damit mußte jeder Versuch scheitern, die Elementarteilchen etwa als Monaden zu denken. Auf den ersten Blick wären sie natürlich Kandidaten dafür gewesen. Sie sind feiner als die Atome und nicht mehr raum-zeitlich lokalisierbar.

Nun klang in der zitierten Einsteinschen Aussage, daß das elektromagnetische Feld eine nicht mehr reduzierbare Einheit ist, bereits an, daß nicht die Quanten der Felder die Einheiten sind, sondern, wenn überhaupt, die Felder selbst. In jüngster Zeit ist nun ein ganz neuer Aspekt hinzugekommen. Es sind die sogenannten Stringtheorien entstanden. Nach diesen Theorien sind die Elementarobjekte nicht mehr punktförmig, sondern kleine Strings. Wenn sie sich „ausbreiten" entstehen dann solche Schläuche, wie in (3.3) angedeutet. Nun darf man aber all das nicht zu wörtlich nehmen, so wie schon in der klassischen Quantenphysik der Wellencharakter der Teilchen nicht zu bildlich als mechanische Welle verstanden werden darf. Die zentralen Begriffe der Quantentheorie sind Wellenfunktionen, Operatoren, Hilberträume usw. Erst wenn man sich von den ablaufenden Prozessen ein „Bild" machen möchte, wird man je nach Art auf solche Vorstellungen wie Teilchen oder Welle geführt, mechanische Interpretationen realer Strukturen in der Quanten- und Elementarteilchenwelt. Die philosophischen Aspekte dieser Strukturen sind in dem Buch „Materiestruktur" unseres Mitgliedes Herbert Hörz umfassend dargestellt [HÖRZ71]. Mit der Stringtheorie wird ein neues Kapitel aufgeschlagen. Als ihr Geburtsjahr wird das Jahr 1973 angesehen. Es dauerte dann aber noch ein Jahrzehnt, bis ihr Wesen durch eine neue Sichtweise begriffen wurde. Seit 1983 hat sie eine stürmische Entwicklung genommen, worüber man sich in dem meisterhaften Büchern von Michio Kaku [KAKU93 und 98] informieren kann. Eine entsprechende Verarbeitung der philosophischen Aspekte dieser Strukturen, die „hinter den Elementarteilchen" liegen, steckt noch ganz in den Anfängen. Nicht zuletzt soll dieser Vortrag die Aufmerksamkeit darauf lenken, daß es sicher anregend sein wird, bei

der Beurteilung der Strings direkt an die philosophischen Positionen von Leibniz anzuknüpfen oder anders formuliert, sich auf diese wieder zu besinnen.

Der „See der Strings" formt sich aus Objekten, denen Bilder wie (3.3) entsprechen. In Erweiterung der Streuvorstellungen von Elementarteilchen, der Feynmangraphen, entstehen solche mehrfach-zusammenhängende Schläuche. In (3.3) hatte sich der String nach dem Zusammenstoß einmal geteilt und wieder vereinigt. Das kann sich nun beliebig oft wiederholen, so daß sich folgende 2-dimensionale Flächen ergeben:

(6.1)



Es sind sogenannte Riemannsche Flächen. Sie wurden durch die revolutionäre Umgestaltung und Neubegründung der Funktionentheorie Mitte vorigen Jahrhunderts durch Bernhard Riemann in die Mathematik eingeführt. In (3.3) haben wir nur den Zusammenhangscharakter, d. h. die Anzahl der Löcher in den Brezeln hervorgehoben. Die Riemanschen Flächen unterscheiden sich auch noch durch innere Parameter, die „Dicke" der einzelnen „Schläuche". Diese Parameter heißen Modul. Da nun alle denkbaren Streuprozesse der Strings möglich sind, liegt hinter den Elementarteichen der See der Strings von dem man sich folgendes Bild machen kann:

(6.2)

Die Elementarteilchen Protonen, Neutronen, Elektronen usw. sind nun nicht etwa aus den Strings zusammengesetzt, sondern sie sind Schwingungsmodi dieses Sees der String. Dieser See von Flächen (6.2) (und ähnliche Gebilde) ist bereits während des gesamten 20. Jahrhunderts ein Objekt der Mathematik und hat auch den Namen eines Raumes getragen, nämlich Modulraum. Es sind Raumtypen, die bis zur Entstehung der

Stringtheorie in keiner Weise mit realen physikalischen Räumen in Zusammenhang gebracht wurden, die aber Gegenstand intensivster mathematischer Untersuchungen und Begriffsbildungen der reinen Mathematik waren, „rein" bis in die jüngste Zeit, d. h. nicht mit direkten physikalischen Interpretationen verknüpft.

Hier ist es angezeigt, die in diesem Zusammenhang bedeutendsten Mathematiker der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts zu nennen, Träger des „Mathematiknobelpreises", der Fields-Medaille. Nobel hat für die Auszeichnung mit seinem heute berühmten Preis die Mathematiker ausgeschlossen. Es gibt über die Gründe dafür verschiedene Legenden, bis hin zu „Affären" Nobels, die damals namhafte Mathematiker treffen mußten. Wie dem auch sei, jedenfalls ist der Ausschluß der Mathematiker offensichtlich kein Zufall. Der kanadische Wissenschaftler und Industrielle John Charles Fields hat sich der Mathematiker „erbarmt" und 1932 einen entsprechenden Preis gestiftet, der seinen Namen trägt, „Fields-Medaille". Diese hohe Auszeichnung wird aller vier Jahre während der Mathematikerkongresse verliehen, in der Regel zwei bis vier solche Preise und einer für Informatik, so daß man etwa einen „Mathematiknobelpreis" pro Jahr vergibt. Allerdings müssen die Preisträger bei der Verleihung jünger als 40 Jahre sein, dadurch sind es weniger als die Nobelpreisträger in den anderen Wissenschaften.

Ein großes Ereignis war der Internationale Mathematikerkongreß ICM'98 im August 1998 in Berlin, 101 Jahre nach dem ersten solchen Kongreß 1897. Für die „Systematisierung" der internationalen Zusammenarbeit der Mathematiker zu Beginn dieses Jahrhunderts hatte die 1890 gegründete Deutsche Mathematikervereinigung (DMV), die entscheidenden Impulse gegeben. Die deutschen Mathematiker waren bis zur Nazizeit international führend. Trotzdem war der Berliner Kongreß der erste in Deutschland nach 94 Jahren. In einer eindrucksvollen Rede ging der Senior der deutschen Mathematik in der zweiten Hälfte unseres Jahrhunderts und Ehrenpräsident des ICM'98, Friedrich Hirzebruch, den Gründen dafür nach. Er schilderte das Schicksal der Präsidenten der DMV aus dem ersten Drittel unseres Jahrhunderts Felix Klein, Alexander Wilhelm von Brill, Max Noether, David Hilbert, Alfred Pringsheim, Friedrich Engel, Kurt Hensel, Edmund Landau, Erich Hecke, Otto Blumenthal und Hermann Weyl. Alle wurden von ihren Lehrstühlen verjagt. Nur David

Hilbert starb 1943 in Göttingen (Felix Klein war schon 1925 gestorben) [ICM'98, I, S. 31]. In Berlin wurden zwei von den vier Fields-Medaillen für bahnbrechende Resultate vergeben, die unmittelbar im Zusammenhang mit der Stringtheorie stehen, für den Beweis der Moonshine-Vermutung (Richard Borcherds), worüber wir noch sprechen werden und für den Beweis der Witten-Vermutung (Maxim Kontsevich).

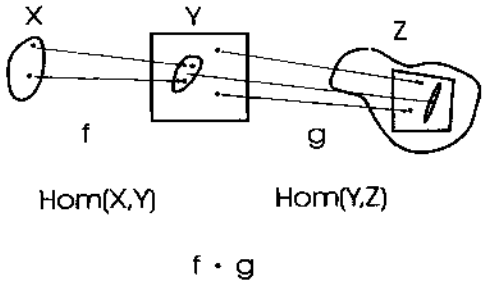
**Edward Witten** ist ohne Einschränkung der „Leitwolf" der Stringtheorie. Geboren 1954, Fieldspreisträger 1990, ist er nicht nur ein großer Physiker und Mathematiker, sondern er ist der Theoretiker par excellence. Er ist der einzige Theoretiker dieses Jahrhunderts, für den in der Literatur vorsichtig ein Vergleich mit Einstein gewagt wird. Von der Ausbildung her Physiker, ist er der erste „Nichtmathematiker", der die Fields-Medaille erhalten hat. Die Witten-Vermutung betrifft die Modulräume und den Zusammenhang mit der Solitonentheorie. Für Einzelheiten zur Struktur dieser Modulräume ist hier kein Platz, vielmehr wollen wir den Bogen schlagen zum zweiten großen und außergewöhnlichen Mathematiker der Nachkriegsperiode, zu **Alexander Grothendieck**, geboren 1928, Fieldspreisträger 1966. Er ist der Begründer einer neuen Herangehensweise in der Geometrie, die in ihrem revolutionären Charakter alles übertrifft, was es seit der Entdeckung der Differential- und Integralrechnung gegeben hat. Er hat nicht nur eine neue geometrische Methode begründet und damit den geometrischen Horizont, das geometrische Begriffssystem, bedeutend erweitert, sondern mit ihrer Hilfe zentrale offene Fragen der Mathematik erfolgreich gelöst. Diese neue Geometrie eröffnete die Möglichkeit, mit geometrischen Methoden an Objekte heranzugehen, die auf den ersten Blick nicht wie „Räume" aussehen, wie etwa obiger „Stringsee", die ein Konglomerat von kontinuierlichen und diskreten Objekten sind. Dadurch wird in diese Geometrie die Zahlentheorie einbezogen. Der Begriff *arithmetische Geometrie* ist Ausdruck einer jüngsten Entwicklung in dieser Richtung, die in enger Wechselwirkung zur Entwicklung der Stringtheorie steht.

Wir können hier nur eine Andeutung der Grothedieckschen Zugangsweise zur Geometrie geben, die aber in einer interessanten Weise auf die Leibnizsche Auffassung über Geometrie zurückführt. Der Ausgangsbegriff ist der der Kategorie (als neuer mathematischer Begriff). Man startet sofort mit der gesamten Kategorie aller Räume (eines gewünschten

Typs). Dabei fordert man von einer Kategorie weiter nichts, als daß sie Objekte A,B, ... X,Y,... hat und zwischen den Objekten gibt es Beziehungen, sogenannte Homomorphismen. Die Menge aller Homomorphismen oder kürzer einfach Morphismen von X in Y bezeichnet man als Hom (X,Y) . Für all diese Mengen fordert man im wesentlichen nur eine einzige Eigenschaft algebraischen Charakters. Wenn $f \in$Hom (X,Y) und $g \in$Hom (Y,Z) so soll das (formale) Produkt f g definiert sein und ein Element von Hom(X,Z). Um mit dieser Forderung eine Vorstellung zu verknüpfen, stelle man sich vor, daß die Objekte X,Y,... Mengen seien und die Morphismen f,g,... Abbildungen, wie in der folgenden Skizze.

(6.3)

Kategorie:



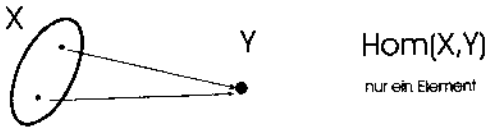

f bildet also X in Y ab und g bildet Y in Z ab. f g ist dann die daraus zusammengesetzte Abbildung von X in Z. Dann soll es auch noch jeweils ein identisches Element 1 in Hom (X,X) geben, gedacht als die identische Abbildung von X auf X. Dadurch sind wenigstens die Mengen Hom (X,X) keine leeren Mengen. Einzelne der Menge Hom (X,Y) können durchaus leer sein. Es werden dann für das Rechnen mit diesen Homomorphismen zusätzliche algebraische Eigenschaften gefordert, um zu Raumklassen zu kommen, angepaßt an die jeweils zu untersuchende Fragestellung.

Natürlich fragt man sich, wie Leben in das „Gerippe" (6.3) kommt. Allein die Multiplikation f g der Morphismen wird es doch wohl nicht machen? In der Tat entwickelt sich aber das Begriffssystem dieser neuen Geometrie fast „im Hegelschen Sinne" aus diesen wenigen Grundtatsachen heraus. Nehmen wir dafür ein Beispiel. Wenn wir das Schema

schon Geometrie nennen, so kann man fragen, gibt es auch Punkte? Stellen wir uns einen Moment vor, X,Y,... seien die altbekannten Punktmengen, dann ist die Menge Y genau dann ein Punkt, wenn Hom (X,Y) exakt einen Morphismus enthält,

(6.4)

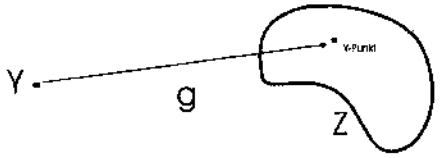
Punkt:




Es kann nur eine Abbildung von X auf den Punkt Y geben. Damit hat man durch „Leibnizsche Begriffsanalyse" die Definition des Punktes herausgeschält. „Ein Objekt Y der Kategorie heißt Punkt, wenn für jedes andere Objekt X , Hom (X,Y) genau ein Element enthält". Weiß man jetzt was Punkte sind, so kann man auch definieren, was Punkte eines Raumes Z sind, indem man auf die folgende Skizze schaut:

(6.5)

Y-Punkt in Z:




Wenn Y ein schon erkannter Punkt ist, so „zielt" ein f∈Hom (Y,Z) genau auf einen Punkt von Z, der allerdings von Y abhängt. Das führte auf den Begriff des Y-Punktes in einem Objekt. Die Y-Punkte von Z wurden von Grothendieck gleich mit den Elementen von Hom (Y,Z) identifiziert. Die Morphismen sind also nicht nur Abbildungen eines Raumes in einen anderen, sondern sie stehen gleich als Synonyme für Punkte. Definitionen von diesem Typ, erweitert auch für Funktionen usw. und die sich daraus ergebenden Konsequenzen, erregten tatsächlich nicht wenig ungläubiges Stau-

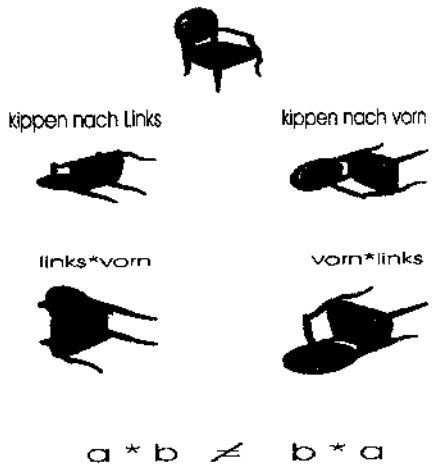
nen, als er sie der Öffentlichkeit vorstellte. Es ergaben sich solch merkwürdige Dinge, wie Funktionen, die von Null verschieden sind, aber in jedem Punkt den Wert Null annehmen usw. Wenn Hom (Y,Z) leer ist, für alle Punkte Y, so ist Z ein Raum ohne Punkte usw.

Werfen wir nochmals einen zusammenfassenden „philosophischen Blick" auf die Grothendiecksche Herangehensweise. Der Zusammenhang zur Leibnizschen Formulierung sticht unmittelbar ins Auge. Geometrie ist nichts anderes als die Beziehungen zwischen den Dingen. Wir hatten oben ein Zitat von Leibniz angeführt, in dem er von „wirklichen Geraden" spricht. Bisher hatten wir stillschweigend übergangen, daß „Gerade" in der Leibnizschen Sprechweise nicht die unendliche Gerade bedeutet, sondern eine endliche Strecke. Die Leibnizschen wirklichen Geraden, sind also wirkliche eindimensionale Strukturen, abgehoben von den wirklichen Objekten, also z. B. die Kante eines „wirklichen" Würfels usw. Der Ausgangspunkt ist also hier nicht der Begriff der unendlichen Geraden, sondern die kategoriale Gesamtheit aller Geraden (lies Strecken) usw. Dann macht die Definition eines Punktes, im Sinne der Leibnizschen Begriffsanalyse, erneut einen Sinn. Diese hatte auch einen tiefe philosophische Bedeutung für Euklid.

Wir müssen es hier bei diesen wenigen Bemerkungen zu den Begriffen der neuen Geometrie bewenden lassen und kommen nun, wie angekündigt zu der anderen jüngst mit der Fieldsmedaille ausgezeichneten Entdeckung, die zum Bereich der Stringtheorie gehört, zum Beweis der Moonshine-Vermutung durch Borcherds.

Vergegenwärtigen wir uns zuerst den Begriff der Gruppe. Das ist eine Gesamtheit von Elementen in der eine Rechenoperation definiert ist, z. B. die Multiplikation $a \bullet b$, so daß alle Gesetze der Multiplikation (5)-(8) von (2.1) gelten. Das Kommutativgesetz $a \bullet b = b \bullet a$ wird nicht verlangt. Ist es ebenfalls erfüllt, so spricht man von einer kommutativen Gruppe. Aber auch bezüglich der Addition bilden die reellen Zahlen oder auch schon die Menge der ganzen Zahlen eine Gruppe. Das neutrale Element ist in dem Fall die Null. Die Drehgruppen des Raumes, die Symmetriegruppen eines Kristalls usw. sind aber im allgemeinen nichtkommutativ, wie wir an den Drehungen des Sessels erkennen. Nennen wir das Kippen nach links

(6.6)




a und das Kippen nach vorn b und verstehen wir unter a•b das hintereinander Ausführen der beiden Drehungen, so sehen wir, daß a • b ≠ b•• a ist. Die Transformationsgruppe des Sessels ist also nichtkommutativ. Wenn man zwei Gruppen hat, G und H, so kann man sie zusammensetzen zu G×H, indem man einfach die Menge der Paare (g,h) bildet und mit diesen Paaren komponentenweise rechnet. Im allgemeinen ist das „Zusammensetzen" noch ein klein wenig komplizierter. Uns kommt es hier nur darauf an, daß man aus gegebenen Gruppen unzählig viele neue bilden kann. Eine Gruppe, die nicht zusammengesetzt ist, nennt man einfach. Ein grosses Problem der Mathematik war die Klassifikation aller endlichen einfachen Gruppen, das erst 1981 endgültig gelöst werden konnte. Wir wollen das Ergebnis jetzt beschreiben.

Zuerst einmal fällt aus obigen Beispiel sofort ins Auge, daß man von den stetigen Drehgruppen des dreidimensionalen Raumes sofort zu endlichen Gruppen kommt, wenn man etwa nur die Drehungen in die drei Achsenrichtungen um jeweils 90° und Vielfache davon betrachtet. Nun kann man die Dimension des Raumes variieren. Außerdem kann man neben den orthogonalen Drehgruppen des n-dimensionalen euklidischen Raumes noch andere einfache kontinuierliche Gruppen als Ausgangsbasis wählen. Das Resultat ist dann, daß man insgesamt 17 Serien einfacher endlicher Gruppen erhält.

Das überraschende und merkwürdige Resultat ist nun, daß man auf diesem Weg nicht alle endlichen einfachen Gruppen bekommt. Es fehlen genau 26 Gruppen. Oder etwas anders formuliert, es gibt genau 26 einfache endliche Gruppen, die keine Drehgruppen „vernünftiger" Räume sind. Diese Gruppen heißen sporadische Gruppen. Die ersten waren schon im vorigen Jahrhundert bekannt und heißen Mathieu-Gruppen, nach ihren Entdecker. Die Existenz der größten sporadischen Gruppe $F_1$ wurde erst 1980 bewiesen und sie ist unter den Namen „Monster-Gruppe" bekannt oder auch als Fischer-Gries Monster, benannt nach ihren Entdeckern. Man kennt diese sporadischen Gruppen sehr genau, jedenfalls weiß man, wieviele Elemente diese Gruppen enthalten, von denen wir einige auflisten:

(6.7)

$M_{11}$: $7920 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$

$M_{12}$: $95040 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$ Emil Mathieu 1861

...

...

$F_1$: 808 017 424 794 512 875 886 459 904 961 710 757 005 754 368 000 000 000 =

$$= 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$$

$$\sim 10^{54}$$

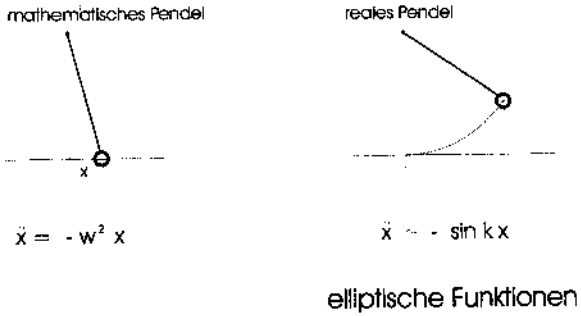
Die Existenz der Monster-Gruppe wurde bereits 1974 durch Fischer und Gries vermutet, als eine Gruppe mit bestimmten Eigenschaften. Der Beweis ihrer Existenz im Jahre 1980 war ein letzter markanter Punkt für die endgültige Klassifikation aller einfachen endlichen Gruppen, die 1981 abgeschlossen werden konnte. Man hat die Lösung dieses Klassifikationsproblems mit den aufwendigsten Entdeckungen der Elementarteilchenphysik verglichen. In den letzten dreißig Jahren haben hunderte Spezialisten an diesem Problem gearbeitet. Wie in der Elemntarteilchenphysik wurde oft die Existenz einer Gruppe mit gewissen Eigenschaften erst vermutet und dann die Existenz durch aufwendige Arbeit nachgewiesen. Die Beweise der Existenz und die Konstruktion aller dieser Gruppen haben einen Umfang von ca. 10 000 Seiten. Selbst die Beschreibung des

Beweisganges auf mathematisch exakter Grundlage und nur für Mathematiker gedacht, erfordert ein ganzes Buch [GORE82].

Wie kann man eine Gruppe wie das Monster mit dieser schon überastronomischen Anzahl von Elementen finden? Die Monstergruppe gewinnt man, etwas vereinfacht gesagt, aus der Symmetriegruppe eines Kristallgitters in einem Raum der Dimension 196883 ! Diese Zahl führt uns auf die Moonshine-Vermutung. Um zu erklären, was es damit auf sich hat, gehen wir in ein ganz anderes Gebiet und nahezu zwei Jahrhunderte zurück.

Die Schwingungen eines mathematischen Pendels werden durch die Sinusfunktion beschrieben und gehören in das Gebiet der trigonometrischen Funktionen, die schon im Mittelalter entdeckt wurden und seit der Begründung der Differential- und Integralrechnung in allen ihren Eigenschaften bestens untersucht sind. Der Begriff „Mathematisches Pendel" bringt zum Ausdruck, daß man nur kleine Ausschläge eines Pendels betrachtet und dadurch die rücktreibende Kraft als proportional zum Ausschlag annehmen kann. Wenn man das reale Pendel betrachtet, also beliebig große Ausschläge zuläßt, so ist die rücktreibende Kraft selbst ein Sinus:

(6.8)




Die Lösung führt auf eine ganz neue Klasse von Funktionen, die elliptischen Funktionen, deren umfassende Theorie erst zu Beginn des vorigen Jahrhunderts in einem Wettstreit zwischen Abel (1802–1829) und Jacobi (1804–1851) ausgearbeitet wurde. Diese Funktionenklasse trägt den Namen elliptische Funktionen, weil sie auch bei der Berechnung der Länge

der Ellipse auftreten. Die Bestimmung des Flächeninhaltes der Ellipse ist „so einfach" wie die Bestimmung der Fläche des Kreises. Aber die Bestimmung der Länge eines Ellipsenbogens führt auf diese neue Klasse nicht elementarer Funktionen. Es gibt nun ganze Serien dieser elliptischen Funktionen, die durch einen sogenannten Modul q charakterisiert sind. Er hängt eng mit dem k in der rücktreibenden Kraft sin kx des realen physikalischen Pendel zusammen. Die Zusammenhänge in der Typisierung der elliptischen Funktionen und ihrer Riemannschen Flächen werden durch die sogenannte elliptische Modulfunktion j(q) „gesteuert", die schon seit mehr als einem Jahrhundert gut untersucht ist:

(6.9)

$$j(q) = 1/q + 744 + 196884\,q + 21493760\,q^3 + \ldots$$

Wie gesagt, die Modulfunktion steht im Zusammenhang mit dem realen physikalischen Schwingungen und anderen nichtlinearen Prozessen in den verschiedensten Zweigen der Physik und Technik. Niemand konnte etwas mit den merkwürdigen großen ganzen Zahlen in der Reihenentwicklung dieser Funktion anfangen. Wenn man früher überhaupt dazu etwas bemerkt hat, so die Äußerung, daß es eben so ist und diese Zahlen rein „zufällig" sind und physikalisch nichts bedeuten.

Nun ist der Koeffizent von q in (6.9) um eins größer als die Zahl **196883**, die Dimension der kleinsten irreduziblen Darstellung der Monstergruppe. Und das führte den namhaften Mathematiker Conway zu der Vermutung, daß auch die anderen großen Zahlen mit den Dimensionen der höheren irreduziblen Darstellungen der Monster-Gruppe zusammenhängen [CONV92, S. 568]. Rein zahlenmäßig sticht das ins Auge. Was aber sollte die Monstergruppe mit der Modulfunktion zu tun haben, oder physikalisch formuliert, mit nichtlinearen Schwingungen? Kein Mensch hatte eine Ahnung welcher Zusammenhang das sein sollte und woher ein Beweis dieser Vermutung kommen könnte. Conway gab ihr deshalb den Namen „Moonshine-Vermutung", nach der weiteren englischen Bedeutung dieses Wortes als fauler Zauber, Unsinn, Geschwafel etc. Jetzt allerdings, nachdem durch Borcherds die Moonshine-Vermutung bewiesen ist, kann man die Bezeichnung gut und gern in der Bedeutung von Mondschein, Silberglanz, erster matter Glanz vor dem Tagesanbruch, lesen. Wa-

rum ist diese Wertung möglich und warum bringen wir dieses außergewöhnliche Resultat in unseren Zusammenhang mit Leibniz?

Borcherds hat die Moonshine-Vermutung beweisen können durch eine prinzipielle Weiterentwicklung des mathematischen Apparates der Stringtheorie, insbesondere durch eine Vertiefung und Erweiterung des Kalküls der Vertexoperatoren. Vertexfunktionen, Vertexoperatoren u. ä. spielen seit einem halben Jahrhundert eine große Rolle bei der Berechnung der Streuquerschnitte in der Elementarteilchenphysik. Sie gehören zum Handwerkszeug bei der Behandlung von Feynmandiagrammen in der Streutheorie (s. (3.2)). Sie waren ein wesentliches Handwerkszeug der „Rechenkunst" der Elementarteilchenphysiker, weit entfernt davon ein Gebiet der reinen Mathematik zu sein. Außer für die Insider waren diese Berechnungsmethoden für jeden anderen und erst recht für jeden „exakten" Mathematiker ein Greuel, auch wegen ihrer Divergenzen. Jetzt plötzlich wird mit einer „salonfähigen" Theorie der Vertexoperatoren ein solch exotisches Problem der scheinbar reinen Mathematik gelöst, welches aber in einem ganz besonderen physikalischen Licht erscheint. Interessanterweise ist damit auch das Problem der „Richtigkeit" mathematischer Resultate berührt. An der Lösung des Klassifikationsproblems für endliche Gruppen, unter denen die Monster-Gruppe der exotischste Vertreter ist, zweifelt zwar kein Mathematiker mehr ernsthaft, trotzdem ist es auch für einem Fachmathematiker, wenn er nicht zum engsten Kreis der Spezialisten gehört, nicht möglich, sich „zwischen Weihnachten und Neujahr" einmal von der Richtigkeit dieser Beweise zu überzeugen. Wenn sich allerdings in zwei so getrennten Gebieten, wie der Theorie der elliptischen Funktionen und der Monstergruppe das Wesen dieser obigen Zahlenfolge offenbart, dann ist das ein weiteres Indiz dafür, daß alles stimmt.

Fassen wir zusammen: Die nichtlinearen Schwingungen führen in ihren inneren Gesetzmäßigkeiten auf die äußerst merkwürdigen Reihen natürlicher Zahlen in (6.9). Ihre Erklärung finden diese Zahlen durch die inneren Zusammenhänge zwischen den Strings, einem Bereich, der „hinter" den Elementarteilchen liegen soll. Das ist wohl im Moment das spektakulärste Beispiel dafür, das mit dem Leibnizschen Begriff der „repraesentatio mundi" verbunden ist, der Spiegelung des ganzen Universums in jeder Monade und einer jeden Monade in einer anderen. Leibniz formuliert das in der Monadologie so:

„56. Diese Verknüpfung oder Anpassung aller erschaffenen Dinge an jedes einzelne und jedes einzelne an alle anderen hat zur Folge, daß jede einfache Substanz Beziehungen enthält, welche die Gesamtheit der anderen zum Ausdruck bringen, und daß sie infolgedessen ein lebendiger, immerwährender Spiegel des Universums ist (vgl. Theodicee, §130 und §360)."

In dem Vortrag zum Leibniz-Tag 1996 [LASS96] hatte ich bereits einen anderen Aspekt des Zusammenhanges zwischen Makro- und Mikrokosmos beschrieben, nämlich eine bestimmte Isomorphie zwischen der Theorie der Solitonen, den nichtlinearen Wasserwellen, und der Stringtheorie. Es ist gerade die gegenseitige Spiegelung der Gesetzmäßigkeiten in den Strings und im makroskopischen Bereich, der im Moment der Stringtheorie ihren Glanz verleiht. Ob die Strings zu den Elementarteilchen in dem Verhältnis stehen, das zu ihrer Schaffung geführt hat, nämlich daß die Elementarteilchen Schwingungsmodi der Strings sind, wird von verschiedenen namhaften Spezialisten durchaus noch bezweifelt. Daß aber mit den Strings ein Realitätsbereich gefunden wurde, der grundlegende Gesetzmäßigkeiten des Universums „hinter den Elementarteichen" offenbart, steht außer Zweifel. Die hier angedeuteten phantastischen Zusammenhänge sind ein nicht unwesentliches zusätzliches Indiz dafür. Jedenfalls läßt dieses Gebiet all diejenigen, die mit ihm vertraut geworden sind, nicht wieder aus seinen Bann. Außerdem sind ganz neuartige Beziehungen zwischen der Physik und der modernsten reinen Mathematik entstanden. Daß dieser Realitätsbereich der Strings auf eine bisher nicht ausgelotete Art und Weise in unsere makroskopische Welt reicht, unter Umgehung der Stufenleiter Elementarteilchen, Atome, Moleküle usw., öffnet ein neues Kapitel im Buch „Materiestruktur". Wie dabei die noch nicht abgegoltenen Fragen der Leibnizschen Philosophie tangiert sind, sollte aus den Beispielen klar werden.

## Literatur:

BLOC85 Bloch, E.: Leipziger Vorlesungen zur Geschichte der Philosophie. Bd.1–4. Suhrkamp. Frankfurt M. 1985

BORN69 Born, M., L. Infeld: Erinnerungen an Einstein. Berlin 1969

CONW92 Conway,J. H.,N. J. A.Sloane: Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer New-York, Berlin u. a. 1992

EBBI88 Ebbinghaus, H.-D., H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, J. Neukirch, A. Pestel, R. Remmert: Zahlen. Springer, Berlin 1988

EINS29 Einstein, A.: Über den gegenwärtigen Stand der Feldtheorie. In: Festschrift Prof. Dr. A. Stodola zum 70. Geburtstag. Zürich und Leipzig 1929

EINS84 Einstein, A.: Aus meinen späten Jahren. Dt. Verlagsanstalt Stuttgart 1984

EINS90 Einstein A.: Grundzüge der Relativitätstheorie. Vieweg Braunschweig 1990

EINS93 Einstein, A.: Mein Weltbild. (Hsg. C. Seelig) Ulstein Frankfurt/M. 1993

FEUE84 Feuerbach, L.: Geschichte der neueren Philosophie. Darstellung, Entwicklung und Kritik der Leibnizschen Philosophie. Gesammelte Werke Bd. 3. Akademie-Verlag Berlin 1984

GINS98 Ginsburg, H. P., S. Opper: Pigets Theorie der geistigen Entwicklung. Stuttgart 1998

GORE82 Gorenstein, D.: Finite Simple Groups. An Introduction to Their Classification. London Plenum Press 1982

HEGE30 Hegel, G. W. F.:Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse. Berlin 1969.; Phil. Bibliothek Meiner, Hamburg 1991

HEIS44 Heisenberg, W.: Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaften. Verlag S. Hirzel Leipzig 1944

HEIS90 Heisenberg, W.: Ordnung der Wirklichkeit. München Piper 1990

HOFS85 Hofstadter, D. R.: Gödel, Escher, Bach ein endloses geflochtenes Band. München 1985

HOLZ83 Holz H. H.: Gottfried Wilhelm Leibniz. Eine Monographie. Reclam Leipzig 1983

HÖRZ71 Hörz, H.: Materiestruktur. Dialektischer Materialismus und Elementarteilchenphysik. Berlin 1971

ICM'98 Proc. Internat. Congress of Mathematicans Berlin 1998. Documenta Mathematica. World Wide Web http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta

KAKU93 Kaku, M., J. Trainer: Jenseits von Einstein. Die Suche nach der Theorie des Universums. Insel Frankfurt 1993

KAKU98 Kaku, M.: Im Hyperraum. Eine Reise durch Zeittunnel und Paralleluniversen. Rohwoldt 1998

KUSR94 Kusraev, A. G., S. S. Kutateladze: Nonstandard Methods of Analysis. Dordrecht, Boston, London 1994

LASS95 Lassner, G.: Die Zahlen der Physik.Vortrag in der Klasse Naturwissenschaften der Leibniz-Sozietät am 22. Dezember 1995. Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät Bd. 20, Berlin 1998

LASS96 Lassner, G.: Leibniz' Monadologie und die Mathematik. Vortrag im Kolloquium zum Leibniz-Tag 1996. erscheint

LEIB14 Leibniz, G. W.: Monadologie. Reclam Stuttgart (1990).

LEIB66 Leibniz, G. W.: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie. I u. II. Phil. Bibliothek Meiner Verlag, Hamburg 1966

LEIB68 Leibniz, G. W.: Theodizee (1710). Hamburg, Meiner 1969

LEIB71 Leibniz, G. W.: Neue Abhandlungen über den menschlichen Verstand.

LEIB82 Leibniz, G. W.: Specimen Dynamicum (1695). Philos. Bibl. 339. Meiner Verlag, Hamburg 1982

LEIB85 Leibniz, G. W.: Metaphysische Abhandlung (1686). Hamburg, Meiner 1985

LEIB87 Leibniz, G. W.:Philosophische Schriften und Briefe:1683–87. Akad.-Verlag Berlin 1992

LEIB91 Leibniz, G. W.: Der Leibniz-Clark-Briefwechsel.Akademie Verlag Berlin 1991
LEIB92 Leibniz, G. W.: Philosphische Schriften und Briefe 1683–1687. Akademie Verlag Berlin 1992
MACH88 Mach, E.: Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Berlin 1988
MARX50 Marx, K, F. Engels, Briefwechsel, IV.Bd. 1868–1885, Berlin 1950
MARX57 Marx, K.: Das Kapital I. Berlin 1957
MARX85 Engels, F., K. Marx: Die heilige Familie. Berlin 1985
PIAG92 Piaget, J.: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie. Surkamp, Frankfurt a. M. 1992
ROBI63 Robinson, A.: Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebras. Amsterdam, North-Holland 1963
ROSE87 Rosenkranz, K.: Geschichte der Kant'schen Philosophie. Akad.Verl. Berlin 1987
RUSS03 Russell, B.: Neue Arbeiten über die Philosophie von Leibniz. In: Heinekamp A., F. Schupp (Hrsg.): Leibniz' Logik und Metaphysik. Darmstadt 1988
USPE87 Uspenskij, V. A.: Was ist Nichtstandard-Analysis (russ.). Nauka, Moskau 1987
VOLT81 Voltaire: Erzählungen, Dialoge, Streitschriften. Bd. 1–3.Rütten & Loening Berlin 1981
WHEE91 Wheeler, A.: Gravitation und Raumzeit. Die vierdimensionale Ereigniswelt der Relativitätstheorie. Heidelberg Spektrum 1991
WIND93 Windelband, W.: Lehrbuch der Geschichte der Philosophie. Tübingen 1993